

文章编号:1007-6735(2013)02-0121-05

一类超线性 Dirichlet 问题无穷多个 径向对称解的存在性

褚后利, 魏公明
(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 应用常微分方程的能量分析法和相平面分析法证明了球上一类超线性 Dirichlet 问题存在无穷多个径向对称解. 首先将所研究的问题转化为常微分方程, 进而利用压缩映射原理证明常微分方程问题存在解, 从而得到原问题存在无穷多个径向对称解. 这一结果对某些不满足 PS 序列紧性条件和超出 Sobolev 嵌入定理临界指数的非线性增长条件仍然成立, 并给出具体实例, 说明了采用这种方法研究问题的优势.

关键词: 超线性 Dirichlet 问题; 径向对称解; 能量分析; 相平面分析

中图分类号: O 175.8 **文献标志码:** A

Existence of Infinite Radially Symmetric Solutions for Superlinear Dirichlet Problem

CHU Houli, WEI Gongming
(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: A radially symmetric superlinear Dirichlet problem was studied by using the energy analysis and the phase-plane analysis. The problem was turned into a boundary value problem of ordinary differential equation. The contraction mapping principle was used to verify the existence of solutions of the differential equation and thereby to prove the existence of infinite radially symmetric solutions. The same result can be still obtained when the growth of the nonlinearity surpasses the critical exponent of the Sobolev embedding theorem or does not satisfy the Palais-Smale condition. Some examples were given to show the advantage of these methods.

Key words: *superlinear Dirichlet problem; radially symmetric solutions; energy analysis; phase-plane analysis*

1 问题的提出

近年来,对超线性边值问题

$$\left. \begin{aligned} \Delta u + |x|^a g(u) &= q(x), & x \in \Omega \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

的研究取得了长足的进展. 其中, Ω 为 R^N 空间中的有界区域, Δ 为 Laplace 算子, g 是 R 到 R 上的连续

收稿日期: 2011-02-23
第一作者: 褚后利(1986-),男,硕士研究生.研究方向:偏微分方程. E-mail: hlchu3036@163.com

函数, $q \in L^2(\Omega)$, 且

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{g(u)}{u^2} = \pm \infty \quad (2)$$

主要目的是找到合适的 Ω, g, q 条件, 使得问题(1)和问题(2)有无穷多个解. 关于此类问题解的存在性利用泛函方法在文献[1-2]中已得到证明.

对超线性边值问题

$$\begin{cases} \Delta u + g(u) = q(x), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

当 g 是奇函数且满足合适的增长条件时, 文献[3-5]证明了问题存在无穷多个解. 而对 g 满足 Sobolev 空间临界指数增长条件下解的存在性, 文献[6]给出了具体证明. 在文献[7]中, Castro 和 Kurepa 将上述结果推广到 g 满足超线性 Sobolev 嵌入定理指数增长时, 问题也存在无穷多个径向对称解. 本文不仅验证了上述结果, 并将上述结论推广到问题(1)和问题(2)上.

取 Ω 为 R^N 空间中中心在原点、半径为 T 的球.

$$q(x) = p(\|x\|) \quad (3)$$

式中, $q(x)$ 为径向对称函数.

为了讨论方便, 不失一般性, 令

$$p \in L^\infty(\Omega), \quad g(0) = 0 \quad (4)$$

式中, g 为严格单调递增函数.

现给出一些定义.

$$G(u) = \int_0^u g(v) dv$$

$$G(|x|, u) = \int_0^u |x|^a g(v) dv$$

$$L(k, u) = (N + \alpha)G(ku) - ((N - 2)/2)ug(u) \quad (5)$$

$$L_\pm(k) = \lim_{u \rightarrow \pm\infty} L(k, u)(u^2/g(u))^{\frac{2N+\alpha}{\alpha+4}} \quad (6)$$

$$F(m, u) = (u^2/g(u))^{N\rho-1}G(ku) + m \quad (7)$$

其中, $k \in (0, 1], \rho > 0, m \in R$.

定理 1 假设 g 是局部 Lipschitz 连续的, 且式(2)和式(3)成立. 当 $-2 < \alpha \leq 0$ 时, 若下列条件之一成立:

a. 对某些 $k \in (0, 1)$, $L(1, u)$ 是下有界的, 且 $L_+(k) = +\infty, L_-(k) = -\infty$;

b. $\forall m \in R$, 当 $u \rightarrow +\infty$ 时, $F(m, u) \rightarrow +\infty$; $u \rightarrow -\infty, F(m, u) \rightarrow -\infty$.

则问题(1)有无穷多个满足 $u(0) > 0$ ($u(0) < 0$) 的径向对称解.

定理 1 的结果不仅对满足线性增长条件的 $g(u) = A|u|^p + B$ 适用, 而且对 $g(u) = u \ln u, u > 1$, 问题(1)无穷多个解的存在性也可以由定理 1

得到证明. 定理 1 的方法的另一个优点是, 只要 $p(\|x\|, u, u')$ 是一致有界的, p 可依赖于 $(\|x\|, u, u')$ 而变化.

定理 1 的主要证明过程是首先将问题(1)转化为常微分方程奇异初值问题.

$$\begin{cases} u'' + \frac{n}{t}u' + t^\alpha g(u) = p(t), & t \in (0, T] \\ u(0) = d \\ u'(0) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中, $n = N - 1, d$ 为任意实数.

其次利用能量分析法, 定义能量函数

$$\begin{aligned} E(t, d) &= (u'(t, d))^2/2 + \\ &G(t, u(t, d)) \end{aligned} \quad (9)$$

问题(8)满足

$$u(T, d) = 0 \quad (10)$$

的解即为问题(1)的径向对称解. 进而利用“打靶法”, 找到合适的 $t_0 > 0$, 使得问题(8)的解满足

$$u(t_0, d) = kd, \quad k \in (0, 1) \quad (11)$$

利用式(2)、式(3)和式(11)及 Pohozaev 等式去证明

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} E(t, d) = +\infty, \lim_{d \rightarrow -\infty} E(t, d) = -\infty \quad (12)$$

对 $t \in (0, T]$ 一致成立.

最后利用相平面分析法, 在 (u, u') 平面上定义连续变量函数 $\theta(t, d)$, 且 $\theta(0, d) = 0$. 仿效文献[8]的方法去证明

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \theta(t, d) = \infty \quad (13)$$

由介值定理可知, 问题(10)存在无穷多个解, 进而问题(1)有无穷多个径向对称解.

2 能量分析

首先将问题(8)中的微分方程转化为等价的积分方程

$$\begin{aligned} u(t, d) &= d + \int_0^t r^{-n} \int_0^r s^n (p(s) - \\ &s^\alpha g(u(s, d))) ds dr \end{aligned}$$

引理 1 问题(8)有局部解.

证明 取完备度量空间 $C[0, \epsilon] \times [d' - \epsilon, d' + \epsilon]$, 定义算子

$$\begin{aligned} Au(t, d) &= d + \int_0^t r^{-n} \int_0^r s^n (p(s) - \\ &s^\alpha g(u(s, d))) ds dr \end{aligned}$$

由定理 1 的条件可知, g 满足局部 Lipschitz 条件, 即对 $\forall u_1(t, d), u_2(t, d), \exists K > 0$, 使得

$$|g(u_2(t, d)) - g(u_1(t, d))| < K |u_2(t, d) - u_1(t, d)| \quad (14)$$

定义

$$\|u_2(t, d) - u_1(t, d)\| = \max |u_2(t, d) - u_1(t, d)|$$

则对上述 $u_1(t, d), u_2(t, d)$ 有

$$\begin{aligned} |Au_2(t, d) - Au_1(t, d)| &= \left| \int_0^t r^{-n} \int_0^r s^n (s^\alpha g(u_1(s, d)) - s^\alpha g(u_2(s, d))) ds dr \right| \leq \\ &K \int_0^t r^{-n} \int_0^r s^{n+\alpha} \max |u_1(s, d) - u_2(s, d)| ds dr = \frac{K\epsilon^{\alpha+2}}{(n+\alpha+1)(\alpha+2)} \cdot \end{aligned}$$

$$\|u_1(s, d) - u_2(s, d)\|$$

由 $u_1(t, d), u_2(t, d)$ 的任意性可知

$$\|Au_2(t, d) - Au_1(t, d)\| \leq \frac{K\epsilon^{\alpha+2}}{(n+\alpha+1)(\alpha+2)} \|u_1(s, d) - u_2(s, d)\| \quad (15)$$

当 $\alpha > -2$ 时, 取充分小的 ϵ , 可使得

$$\frac{K\epsilon^{\alpha+2}}{(n+\alpha+1)(\alpha+2)} < 1$$

由压缩映射原理可知, $\exists u(t, d)$, 使得 $Au(t, d) = u(t, d)$, 即证问题(8)有局部解.

引理 2 问题(8)在 $t \in [\epsilon, +\infty)$ 上有解.

证明 假设存在递增序列 $t_n \rightarrow \bar{t} \in R$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u^2(t_n, d) + (u'(t_n, d))^2) \rightarrow \infty$$

如果 $(u'(t_n, d))^2$ 不趋向于无穷大, 则由平均值定理, 可找到一个新的递增序列 $t'_n \rightarrow \bar{t}$, 使得 $(u'(t'_n, d))^2 \rightarrow \infty$. 所以, 不失一般性, 可假设 $(u'(t_n, d))^2 \rightarrow \infty$. 此外, 由式(4)成立, 可知 $G(|x|, u) \geq 0$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(t_n, d) = \infty \quad (16)$$

另一方面

$$E'(t, d) = u'(t, d)p(t) - \frac{n}{t}(u'(t, d))^2 +$$

$$\alpha t^{\alpha-1} G(u) \leq \left(\sqrt{2} \|p\|_\infty + \frac{\alpha}{\epsilon} \right) \cdot$$

$$\max \{ \sqrt{E(t, d)}, E(t, d) \}$$

a. 当 $\sqrt{E(t, d)} > E(t, d)$ 时, 有

$$E(t, d) \leq \left[E(\epsilon, d) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \|p\|_\infty + \frac{\alpha}{\epsilon} \right) (t - \epsilon) \right]^2$$

b. 当 $\sqrt{E(t, d)} \leq E(t, d)$ 时, 有

$$E(t, d) \leq e^{\ln E(\epsilon, d) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \|p\|_\infty + \frac{\alpha}{\epsilon} \right) (t - \epsilon)}$$

即 $E(t, d)$ 是有界的, 与式(16)矛盾. 所以, 假设不成立, 即证问题(8)在 $[\epsilon, \infty)$ 上亦有解.

因为, g 是单调递增函数, 所以

$$\begin{aligned} u'(t, d) &= t^{-n} \int_0^t r^n (p(r) - r^\alpha g(u(t, d))) dr \geq \\ &- \|p\|_\infty \frac{t}{n+1} - g(d) \frac{t^{\alpha+1}}{n+\alpha+1} \end{aligned}$$

由 $k \in (0, 1), d > 0$ 可知, 当

$$\frac{t}{n+1} \|p\|_\infty < \frac{t^{\alpha+1}}{n+\alpha+1} g(d), \alpha \leq 0$$

有 $u'(t, d) < 0$.

令 $t_0 = t_0(k, d)$, 则对 $\forall t \in (0, t_0)$, 有 $d \geq u(t, d) > kd, u(t_0, d) = kd$.

在 $[0, t_0]$ 上积分, 有

$$\begin{aligned} \|p\|_\infty \frac{t_0^2}{2(n+1)} + g(d) \frac{t_0^{\alpha+2}}{(n+\alpha+1)(\alpha+2)} &\geq \\ (1-k)d &\quad (17) \end{aligned}$$

现寻找满足式(17)的 t_0 . 已知

$$\begin{aligned} \|p\|_\infty \frac{t_0^2}{2(n+1)} + g(d) \frac{t_0^{\alpha+2}}{(n+\alpha+1)(\alpha+2)} &\geq \\ \sqrt{\frac{\|p\|_\infty g(d)}{2(n+1)(n+\alpha+1)(\alpha+2)}} t_0^{\alpha+4} &\end{aligned}$$

因此, 只要

$$\sqrt{\frac{\|p\|_\infty g(d)}{2(n+1)(n+\alpha+1)(\alpha+2)}} t_0^{\alpha+4} \geq (1-k)d$$

即可, 此时

$$t_0 \geq \left[\frac{2(1-k)^2(n+1)(n+\alpha+1)(\alpha+2)}{\|p\|_\infty} \frac{d^2}{g(d)} \right]^{\frac{1}{\alpha+4}} \quad (18)$$

引理 3 若 $L(1, u)$ 是下有界的, 且对某些 $k \in (0, 1)$, 有 $L_+(k) = \infty, L_-(k) = \infty$, 则

$$\lim_{d \rightarrow \infty} E(t, d) = \infty, \quad \lim_{d \rightarrow -\infty} E(t, d) = \infty$$

对 $t \in (0, T]$ 一致成立.

证明 令 $v(x) = u(\|x\|)$, $x \in \Omega$, 当 u 满足问题(8), 有

$$\Delta v + |x|^\alpha g(v) = p(\|x\|), x \in \Omega \quad (19)$$

$$v(0) = d, \quad \nabla v(0) = 0 \quad (20)$$

仿效 Pohozaev 不等式的证明方法, 有

$$\begin{aligned} (\Delta v)(x \cdot \nabla v) &= \frac{N-2}{2} \|\nabla v\|^2 + \\ \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N x_j v_{x_i} v_{x_j} \right)_{x_i} &- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N x_j v_{x_i}^2 \right)_{x_j} \quad (21) \\ (|x|^\alpha g(v) - p(\|x\|))(x \cdot \nabla v) &= \\ \sum_j (x_j G(v))_{x_j} &- (N+\alpha) G(v) - \\ p(\|x\|)(x \cdot \nabla v) &\end{aligned}$$

在式(19)两边同乘 $x \cdot \nabla v$, 并在 $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid |x| < \varepsilon\}$, $t_0 \leq \varepsilon \leq T$ 上积分, 由散度定理及 v 的径向对称性, 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \left[\frac{N-2}{2} \|\nabla v\|^2 - (N+\alpha)G(|x|, v) - \right. \\ \left. p(|x|)(x \cdot \nabla v) \right] dx = \\ \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left[\sum_{j=1}^N v_j \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_j v_{x_i}^2 - x_j G(|x|, v) \right) - \right. \\ \left. \sum_{j=1}^N v_j \left(\sum_{i=1}^N x_i v_{x_i} v_{x_j} \right) \right] d\sigma = \\ \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left[\sum_{j=1}^N v_j \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_j v_{x_i} + \right. \right. \\ \left. \left. x_j G(|x|, v) \right) \right] d\sigma \end{aligned} \quad (22)$$

其中, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)$, $\mathbf{v}$ 表示 Ω_ε 在 x 点的外法线单位向量, $j=1, 2, \dots, N$.

另一方面, 在式(19)两边同乘 v , 并在 Ω_ε 上积分, 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \|\nabla v\|^2 dx = \int_{\Omega_\varepsilon} (|x|^\alpha g(v) - \\ p(|x|)) v dx + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} v(\mathbf{v} \cdot \nabla v) dx \end{aligned} \quad (23)$$

将式(23)代入式(22), 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \left[(N+\alpha)G(|x|, v) - \frac{(N-2)g(v)v|x|^\alpha}{2} \right] dx = \\ \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left[\frac{\varepsilon}{2} \|\nabla v\|^2 + \varepsilon G(|x|, v) + \right. \\ \left. \frac{N-2}{2} (v(\mathbf{v} \cdot \nabla v)) \right] d\sigma - \\ \int_{\Omega_\varepsilon} p(|x|) \left((x \cdot \nabla v) + \frac{N-2}{2} v \right) dx \end{aligned} \quad (24)$$

而

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \left[(N+\alpha)G(|x|, v) - \frac{(N-2)g(v)v|x|^\alpha}{2} \right] dx \geq \\ \int_{\Omega_\varepsilon} |x|^\alpha \left[(N+\alpha)G(kd) - \frac{N-2}{2} g(d)d \right] dx \geq \\ 2 \frac{\pi^N}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n}{2}+1)(N+\alpha)} t_0^{2N\alpha} \cdot \\ \left[(N+\alpha)G(kd) - \frac{N-2}{2} g(d)d \right] \end{aligned} \quad (25)$$

由式(18)、式(24)和式(25), 以及 $L(1, u)$ 是下有界的, 有

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{g(d)} \right)^{\frac{2N+\alpha}{\alpha+4}} \left[(N+\alpha)G(kd) - \frac{(N-2)g(d)d}{2} \right] + \\ (\varepsilon^N - t_0^N)B \leq cE(\varepsilon) \end{aligned} \quad (26)$$

其中, B 是与 d 有关的常数.

已知 $L_+(k) = \infty$, 由式(24), 有

$$\lim_{d \rightarrow \infty} E(t, d) = \infty$$

对 $t \in (0, T]$ 是一致成立的.

引理3得证.

引理4 如果 $\forall m \in R$, 当 $u \rightarrow +\infty$ 时, 有 $F(m, u) \rightarrow \infty$, 则

$$\lim_{d \rightarrow \infty} E(t, d) = \infty$$

对 $t \in (0, T]$ 一致成立.

证明 由 E 的定义及式(8), 有

$$\begin{aligned} (t^{2(n+\rho)} E(t, d))' &= 2(n+\rho)t^{2(n+\rho)-1} E(t, d) + \\ &[u'u'' + \alpha t^{\alpha-1} G(u) + t^\alpha g(u)u'] t^{2(n+\rho)} \geq \\ &2(n+\rho)t^{2(n+\rho)-1} G(t, u(t, d)) - \\ &(t^{2(n+\rho)+1} \|p\|_\infty^2)/4\rho \end{aligned} \quad (27)$$

对式(27)在 $[t_0, t]$ 上积分, 有

$$E(t, d) \geq T^{-2(n+\rho)} [t_0^{2(n+\rho)} E(t_0, d) + m] \quad (28)$$

其中, m 是关于 $(n, T, \|p\|_\infty, \rho)$ 的常数. 结合式(18)和式(26), 引理4得证.

3 相平面分析

定义 $\forall t \in (0, \bar{t})$, $(u(t, d), u'(t, d)) \neq (0, 0)$, $r^2(t, d) = u^2(t, d) + (u'(t, d))^2$.

对 $d > 0$, 存在唯一的连续变量函数 $\theta(t, d)$, $t \in (0, \bar{t})$, 使得

$$\begin{aligned} u(t, d) &= r(t, d) \cos \theta(t, d) \\ u'(t, d) &= -r(t, d) \sin \theta(t, d) \\ \theta(0, d) &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

如果 $d < 0$, 可找到变量函数 $\psi(t, d)$, 使得

$$\begin{aligned} u(t, d) &= -r(t, d) \cos \psi(t, d) \\ u'(t, d) &= r(t, d) \sin \psi(t, d) \\ \theta(0, d) &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

经计算, 有

$$\begin{aligned} \theta'(t, d) &= \sin^2 \theta(t, d) + \\ &\frac{(t^\alpha g(u(t, d)) + \frac{n}{t} u'(t, d) - p(t)) \cos \theta(t, d)}{r(t, d)} \end{aligned} \quad (31)$$

现证明定理1.

证明 仿效文献[6]的方法, 由解对初值的连续依赖性,

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \theta(t, d) = \infty, \quad \lim_{d \rightarrow -\infty} \theta(t, d) = -\infty \quad (32)$$

只要证明式(32)成立.

为了证明式(32), 只要证明任意给定正整数 J ,

存在 d_0 , 使得当 $d \geq d_0$ ($-d \geq d_0$) 时, 有

$$\theta(t, d) > J\pi (\phi(t, d) > J\pi)$$

成立.

如果 $x_0 > 0$, 定义

$$m(x_0) = \min\{g(x)/x^2 \|x\| \geq x_0\}$$

由式(2), 有

$$x_0 \rightarrow \infty, m(x_0) \rightarrow \infty \quad (33)$$

令

$$\delta \in (0, \min\{\pi/4, T/64n\}) \quad (34)$$

r_0 满足

$$8\|p\|_\infty < r_0 \quad (35)$$

$$16\delta + 2\pi/\omega(r_0, \delta) \leq 3T/4J \quad (36)$$

$$\omega(r_0, \delta) > 4n/T + 2\|p\|_\infty/r_0 \quad (37)$$

其中, $\omega(r_0, \delta) = (T/4)^a r_0 m(r_0 \cos \delta) \sin^2 \delta \cos \delta$.

当 $E(t, d) \rightarrow \infty$ 时, 有 $r(t, d) \rightarrow \infty$. 由引理 3 和引理 4 可知, 存在 d_0 , 使得对所有 $t \in (0, T]$, 若 $d > d_0$, 则有 $r(t, d) \geq r_0$.

假设 $t \geq T/4$, 且 $\theta(t, d) \in [j\pi/2 - \delta, j\pi/2 + \delta]$. 其中, j 是非负奇数. 由式(31), (34), (35) 及 $g(u)u \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} \theta'(t, d) &\geq \sin^2 \theta(t, d) + \frac{t^a g(u)u}{r^2} - \\ &\quad \frac{4n|u(t, d)u'(t, d)|}{Tr^2(t, d)} - \frac{\|p\|_\infty}{r_0} \geq \\ \cos^2 \delta - \frac{4n \tan \delta}{T} - \frac{\|p\|_\infty}{r_0} &\geq \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (38)$$

另一方面, 如果 $\theta(t, d) \in [j\pi/2 + \delta, (j+2)\pi/2 - \delta]$, 有

$$\begin{aligned} \theta'(t, d) &\geq (T/4)^a g(u(t, d))u(t, d) \cdot \\ \sin^2 \delta / u^2(t, d) - \frac{2n}{T} - \frac{\|p\|_\infty}{r_0} &\geq \\ \frac{\omega(r_0, \delta)}{2} &> 0 \end{aligned} \quad (39)$$

由式(38)和式(39)可知, 对 $t \in [T/4, T]$, $\theta(t, d)$ 是一个单调递增的函数.

现对 $\theta(T, d)$ 进行估计. 假设对某些非负奇数 j , 有

$$|\theta(T/4, d) - j\pi/2| < \delta$$

由式(38)可知, 存在 $t_1 \in (T/4, T/4 + 8\delta)$, 使得

$$\theta_1(t, d) = j\pi/2 + \delta \quad (40)$$

对 $t > t_1$, $\theta(s, d) \in [j\pi/2 + \delta, (j+2)\pi/2 - \delta]$ 及 $s \in [t_1, t]$, 由式(39)可知

$$t - t_1 < 2(\pi - 2\delta)/\omega(r_0, \delta)$$

因此, 存在 $t_0 \in (t_1, t_1 + 2(\pi - 2\delta)/\omega(r_0, \delta))$,

使得

$$\theta(t_2, d) = (j+2)\pi/2 - \delta \quad (41)$$

仿效 t_1 存在性的证明, 可知存在 $t_3 \in (t_2, t_2 + 8\delta)$, 使得 $\theta(t_3, d) = (j+2)\pi/2 + \delta$. 由 t_1, t_2 可得

$$\begin{aligned} T/4 < t_3 < T/4 + 16\delta + 2(\pi - 2\delta)/ \\ \omega(r_0, \delta) &\theta(t_3, d) - \theta(t, d) > \pi \end{aligned} \quad (42)$$

重复上述过程 J 次可知, 对 $\bar{t} \in [T/4, T/4 + J(16\delta + 2(\pi - 2\delta)/\omega(r_0, \delta))]$, 有

$$\theta(\bar{t}, d) \geq J\pi \quad (43)$$

由式(36)可知, $\bar{t} \leq T$.

因为 $\theta(t, d)$ 是单调递增的, 所以

$$\theta(T, d) \geq J\pi \quad (44)$$

另一方面, 如果 $|\theta(T/4, d) - j\pi/2| \geq \delta$, 可找到

$$t_1 \in [T/4, T/4 + J(8\delta + 4(\pi - 2\delta)/\omega(r_0, \delta))]$$

使得 $\theta(\bar{t}, d) \geq J\pi$.

因此

$$\theta(T, d) \geq J\pi \quad (45)$$

综上, 定理 1 得证.

参考文献:

- [1] Fink A, Gatica J A, Hernandez G. Approximation of singular second order boundary value problems [J]. SIAM J Math Anal, 1991, 22(3): 440 - 462.
- [2] Ma R. Positive solutions of singular second order boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 1998, 185(15): 215 - 222.
- [3] Orpel A. Superlinear Dirichlet problems [J]. Nonlinear Anal, 2004, 56(6): 937 - 950.
- [4] Bahri A, Berestycki H. A perturbation method in critical point theory and applications [J]. Trans Amer Math Soc, 1981, 267(1): 1 - 32.
- [5] Rabinowitz P. Multiple critical points of perturbed symmetric functionals [J]. Trans Amer Math Soc, 1982, 272(2): 753 - 769.
- [6] Struwe M. Superlinear elliptic boundary value problems with rotational symmetry [J]. Arch Math, 1982, 39(2): 233 - 240.
- [7] Castro A, Kurepa A. Infinitely many radially symmetric solutions to a superlinear Dirichlet problem in a ball [J]. Proc Amer Math Soc, 1987, 101(1): 57 - 64.
- [8] Csstro A, Lazer A. On periodic solutions of weakly coupled systems of different equations [J]. Boll Un Mat Ital, 1981, 18(5): 733 - 742.

(编辑: 石 瑛)