

文章编号:1007-6735(2013)02-0131-04

KdV-Burgers-Kuramoto 方程另一类 指数函数求法及新的精确解

胡恒春, 王利金, 刘磊
(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 用指数函数法求解了 KdV-Burgers-Kuramoto 方程新的精确解, 并利用其中的部分结果计算了 KdV-Burgers-Kuramoto 方程指数形式的精确解, 同时还得到了 Kuramoto-Sivashinsky 方程指数形式的精确解, 并通过双曲函数变换将其转化为双曲函数形式的解. 最后给出了这两种非线性系统解所对应的图形, 它们的解分别为孤波解和扭结解.

关键词: KdV-Burgers-Kuramoto 方程; 指数函数方法; 新精确解
中图分类号: O 175 **文献标志码:** A

Another Exponential Function Method and the New Exact Solution of KdV-Burgers-Kuramoto Equation

HU Hengchun, WANG Lijin, LIU Lei
(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: An exponential function method was proposed for obtaining the exact solutions of KdV-Burgers-Kuramoto equation, and exact solutions of exponential function type of Kuramoto-Sivashinsky equation were also provided. Exponential form solutions by hyperbolic function transformation can be transformed into hyperbolic function solutions. Corresponding graphs of the two kinds of non-linear system solutions were presented and it can be seen their solutions are solitary wave solutions and kink solutions.

Key words: KdV-Burgers-Kuramoto equation; exponential function method; new exact solution

1 问题的提出

Benney 在研究具有耗散项和不稳定因素下的 KdV 方程时, 提出了一个包含耗散项和不稳定项的一维波模型. 通过这种一维波模型得出了 KdV-Burgers-Kuramoto (KBK) 方程, 也叫 Benney 方程^[1],

它的表达式为

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + \gamma u_{xxxx} = 0 \quad (1)$$

方程(1)在光学物理中起着非常重要的作用, 其中, β 代表频率系数, α, γ 分别表示耗散和不稳定作用. 它可用于描述斜平面上向下流动黏性流体的非线性表面长波、等离子体中不稳定漂流波、碎片状多孔介质中的应力波.

收稿日期: 2012-10-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071164); 上海市重点学科建设资助项目(S30501)

第一作者: 胡恒春(1976-), 女, 副教授. 研究方向: 孤立子与可积系统. E-mail: hhengchun@163.com

当式(1)中的 $\gamma = 0$ 时, KBK 方程就变成了 KdV-Burgers(KB)方程, 它是流体力学中一种非常重要的物理模型^[2], 也是在一维空间中对流体的近似描述, 其表达式形式为

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0 \quad (2)$$

当式(1)中的 $\beta = 0$ 时, KBK 方程就变成了 Kuramoto-Sivashinsky(KS)方程. KS 方程是 Kuramoto 和 Sivashinsky 导出的缓慢变量方程, 被认为是无穷维动力学中非常重要的方程, 它的动力学特征有相当大的普适性, 其表示形式为

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xx} + \gamma u_{xxxx} = 0 \quad (3)$$

KBK 方程、KB 方程和 KS 方程这些非线性系统在很多学科中都有相当广泛的应用, 因此, 求出这些方程的解析解就显得非常重要. 已有一些方法对这些方程进行了求解, 如先验假设法^[3]、齐次平衡法^[4-5]、F-展开法^[6]. 1989 年兰慧彬等^[7]提出了双曲正切函数展开法, 1992 年 Malfeit^[8]首次系统阐述了这种方法的一般求解过程和步骤. 本文通过新的指数函数法, 对系数进行简单选取, 并借助于 Maple 软件计算了方程新的精确解^[9-13].

2 基本思想

非线性偏微分方程

$$\Psi(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{tt}, \dots) = 0 \quad (4)$$

式中, Ψ 为 $u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots$ 的多项式函数.

现介绍指数函数法求解非线性发展方程的步骤.

a. 对方程(4)作行波变换

$$u = u(\xi), \quad \xi = kx + \omega t \quad (5)$$

式中, k, ω 为待定常数.

b. 将式(5)代入方程(4), 得到关于 ξ 的常微分方程

$$\varphi(u, \omega u', ku', k^2 u'', \omega^2 u'', k\omega u'', \dots) = 0 \quad (6)$$

c. 假设方程(6)具有多项式形式的解

$$u(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n \exp(n\xi)}{\sum_{m=-p}^q b_m \exp(m\xi)} \quad (7)$$

式中, c, d, p, q 为待定常数; $a_n (n = -c, \dots, d)$ 和 $b_m (m = -p, \dots, q)$ 为待定系数.

d. 将方程(6)中的最高阶导数项和非线性最高阶项用式(5)和式(7)代入, 然后平衡它们的最高幂

次数就能够得到 d, q 的值. 将方程(6)中的最低阶导数项和非线性最低阶项用式(5)和式(7)代入, 平衡这两项的最低次数确定 c, p 的值.

e. 将确定值后的 $u(\xi)$ 代入方程(6)中, 合并 $\exp(\xi)$ 的同类项, 然后令其系数为零. 由此可得关于待定常数 a_n 和 b_m 的方程组, 再用 Maple 求解该方程组, 将所得的结果代入式(7)就得到了方程(4)的精确解.

3 方程的求解

对方程(1)作行波变换

$$u = u(\xi) \quad (8)$$

式中, $\xi = kx + \omega t, k, \omega$ 为待定常数, 方程(1)便化为常微分方程

$$\omega u' + ku u' + k^2 \alpha u'' + k^3 \beta u''' + k^4 \gamma u^{(4)} = 0 \quad (9)$$

方程两边对 ξ 积分, 得

$$\omega u + \frac{1}{2} ku^2 + k^2 \alpha u' + k^2 \beta u'' + k^4 \gamma u''' + c_1 = 0 \quad (10)$$

设方程(1)的解的形式为

$$u(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n \exp(n\xi)}{\sum_{m=-p}^q b_m \exp(m\xi)} = \frac{a_{-c} \exp(-c\xi) + \dots + a_d \exp(d\xi)}{b_{-p} \exp(-p\xi) + \dots + b_q \exp(q\xi)} \quad (11)$$

式中, c, d, p, q 为待定正整数; a_n 和 b_m 为待定系数.

为求得正整数 d, q , 将方程(10)的最高阶导数项和非线性最高阶项次数平衡, 得

$$u^{(3)}(\xi) = \frac{h_1 \exp[(d+7q)\xi] + \dots}{h_2 \exp(8q\xi) + \dots} \quad (12)$$

$$u^2(\xi) = \frac{h_4 \exp(2d\xi) + \dots}{h_3 \exp(2q\xi) + \dots} = \frac{h_4 \exp[(2d+6q)\xi] + \dots}{h_3 \exp(8q\xi) + \dots} \quad (13)$$

式中, h_i 表示已确定的系数.

通过计算可得

$$d = q \quad (14)$$

同样, 为了求得正整数 c 和 p , 将方程(10)的最低阶导数项和非线性最低阶项的次数平衡, 得

$$u^{(3)}(\xi) = \frac{\dots + s_1 \exp[-(7p+c)\xi]}{\dots + s_2 \exp(-8p\xi)} \quad (15)$$

$$u^2(\xi) = \frac{\dots + s_3 \exp(-2c\xi)}{\dots + s_4 \exp(-2p\xi)} =$$

$$\frac{\cdots + s_3 \exp[-(2c+6p)\xi]}{\cdots s_4 \exp(-8p\xi)} \quad (16)$$

式中, s_i 为确定的系数.

从而有

$$c = p \quad (17)$$

由式(14)和式(17)可以看出, c, d 的值可以任意选择, 但方程的精确解并不完全依赖于 c, d . 当 $p = q = 1$ 和 $p = q = 2$ 时, 通过计算所求得解都含有 $\gamma = 0$, 此时方程(1)就变为 KdV-Burgers 方程, 文献[13]已经求出这种情形下的精确解. 因此, 只需从 $p = q = 3$ 开始计算, 方程解的形式可以表示为

$$u(\xi) = \frac{\sum_{n=-3}^3 a_n \exp(n\xi)}{\sum_{m=-3}^3 b_m \exp(m\xi)} \quad (18)$$

如果选取 $a_0 = b_0 = a_2 = a_{-2} = b_2 = b_{-2} = 0$, $b_{-1} = b_1 = 3$ 和 $b_{-3} = b_3 = 1$, 那么, 式(18)就化为

$$u(\xi) = \frac{a_{-3} \exp(-3\xi) + a_{-1} \exp(-\xi) + a_1 \exp(\xi) + a_3 \exp(3\xi)}{\exp(-3\xi) + \exp(3\xi) + 3\exp(\xi) + 3\exp(-\xi)} \quad (19)$$

将式(19)代入方程(10), 然后合并 $\exp(\xi)$ 的同类项, 对那些求得的方程让它们的系数为零, 便可以得到关于待定系数的复杂方程组, 借助 Maple 软件可得到该方程组的 13 种解.

a. $a_1 = 0, a_3 = 0, a_{-1} = 960k^3\gamma, a_{-3} = 0, k = k, \alpha = 4k^2\gamma, \beta = 8k^2\gamma, \omega = -48k^4\gamma$.

b. $a_1 = -960k^3\gamma, a_3 = 0, a_{-1} = 0, a_{-3} = 0, k = k, \alpha = 4k^2\gamma, \beta = -8k^2\gamma, \omega = 48k^4\gamma$.

c. $a_1 = -288k^3\gamma, a_3 = a_{-3} = -96k^3\gamma, a_{-1} = 672k^3\gamma, k = k, \alpha = 4k^2\gamma, \beta = 8k^2\gamma, \omega = 48k^4\gamma$.

d. $a_1 = -672k^3\gamma, a_3 = 96k^3\gamma, a_{-1} = 288k^3\gamma, a_{-3} = 96k^3\gamma, k = k, \alpha = 4k^2\gamma, \beta = -8k^2\gamma, \omega = 2, \gamma = 2$, 得

$$u(x, t) = \frac{1920 \exp(-x + 96t)}{\exp(-3x + 288t) + \exp(3x - 288t) + 3\exp(x - 96t) + 3\exp(-x + 96t)} \quad (20)$$

由双曲函数变换

$$\exp(x, t) = \cosh(x, t) + \sinh(x, t) \quad (21)$$

式(20)化简为

$$u(x, t) = \frac{1920 [\cosh(-x + 96t) + \sinh(-x + 96t)]}{2\cosh(-3x + 288t) + 6\cosh(-x + 96t)} \quad (22)$$

此时所得解的结构如图 1 所示.

将解 b 所得的系数代入式(19), 并取 $k = 2, \gamma = 1$, 得

$$u(x, t) = -\frac{7680 \exp(2x - 2t)}{\exp(-6x + 6t) + \exp(6x - 6t) + 3\exp(2x - 2t) + 3\exp(-2x + 2t)} \quad (23)$$

$-48k^4\gamma$.

e. $a_1 = a_3 = a_{-1} = 0, a_{-3} = -960k^3\gamma, k = k, \alpha = 188k^3\gamma, \beta = 24k^2\gamma, \omega = 480k^4\gamma$.

f. $a_1 = 0, a_3 = 960k^3\gamma, a_{-1} = a_{-3} = 0, k = k, \alpha = 188k^2\gamma, \beta = -24k^2\gamma, \omega = -480k^4\gamma$.

g. $a_1 = 2880k^3\gamma, a_3 = 960k^3\gamma, a_{-1} = 2880k^3\gamma, a_{-3} = 0, k = k, \alpha = 188k^2\gamma, \beta = 24k^2\gamma, \omega = -480k^4\gamma$.

h. $a_1 = -2880k^3\gamma, a_3 = 0, a_{-1} = -2880k^3\gamma, a_{-3} = -960k^3\gamma, k = k, \alpha = 188k^2\gamma, \beta = -24k^2\gamma, \omega = 480k^4\gamma$.

i. $a_1 = a_3 = 0, a_{-1} = 1440k^3\gamma, a_{-3} = 480k^3\gamma, k = k, \alpha = -76k^2\gamma, \beta = 0, \omega = -240k^4\gamma$.

j. $a_1 = -1440k^3\gamma, a_3 = -480k^3\gamma, a_{-1} = a_{-3} = 0, k = k, \alpha = -76k^2\gamma, \beta = 0, \omega = 240k^4\gamma$.

k. $a_1 = \frac{9}{8}a_{-1}, a_3 = \frac{3}{8}a_{-1}, a_{-3} = 0, \alpha = \frac{73}{960} \frac{a_{-1}}{k}, \beta = \frac{a_{-1}}{120k}, \omega = -\frac{3}{16}ka_{-1}, k = \sqrt[3]{\frac{a_{-1}}{3840\gamma}}$.

l. $a_1 = \frac{1}{3}a_3, a_{-1} = a_{-3} = 0, \alpha = \frac{73a_3}{360k}, \beta = -\frac{a_3}{45k}, \omega = -\frac{1}{2}ka_3, k = \sqrt[3]{\frac{a_3}{1440\gamma}}$.

m. $a_1 = -\frac{3}{4}a_{-1}, a_3 = \frac{a_{-1}}{12}, a_{-3} = 0, \alpha = \frac{19a_{-1}}{1440k}, \beta = 0, \omega = -\frac{a_{-1}}{24}k, k = \sqrt[3]{\frac{11a_{-1}}{5760\gamma}}$.

4 解的讨论

将解 a 所得的系数代入式(19), 并取 $k = 1, \gamma = 2$, 得

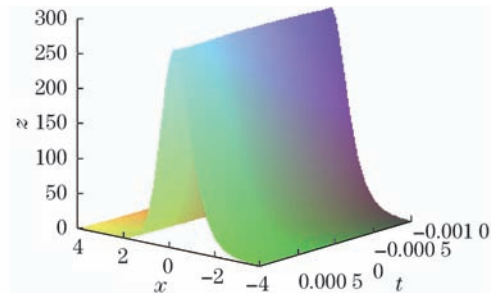


图 1 当 $k=1, \gamma=2$ 时方程的解结构

Fig.1 When $k=1, \gamma=2$, the solution structure of equation

同样,通过变换式(21),式(23)可化为

$$u(x, t) = -\frac{7680[\cosh(-2x+2t)-\sinh(-2x+2t)]}{2\cosh(-6x+6t)+6\cosh(-2x+2t)} \quad (24)$$

式(24)相应解的结构如图2所示.

类似地,可以按照系数的不同分类来构造 KdV-Burgers-Kuramoto 方程各种形式的行波解或者孤波解.另外,解 i, j, m 所得的系数中的 $\beta = 0$, 那么, 方程(1)就变成 KS 方程.

将解 i 所得的系数代入式(19), 并取 $k = 1, \gamma = 1$, 得

$$u(x, t) = \frac{480[\exp(-3x + 720t) + 3\exp(-x + 240t)]}{\exp(-3x + 720t) + 3\exp(3x - 720t) + 3\exp(x - 240t) + 3\exp(-x + 240t)} \quad (25)$$

由双曲函数变换, 式(25)可化为

$$u(x, t) = \frac{240[\cosh(3x - 720t) - \sinh(3x - 720t) + 3\cosh(x - 240t) - 3\sinh(x - 240t)]}{2\cosh(3x - 720t) + \sinh(3x - 720t) + 3\cosh(x - 240t)} \quad (26)$$

式(26)相应解的结构如图3所示.

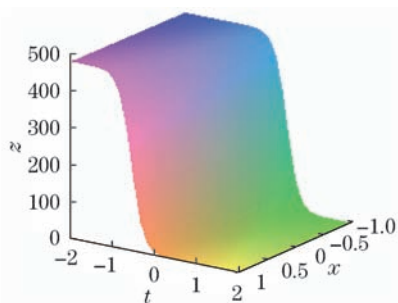


图3 当 $k=1, \gamma=1$ 时方程的解结构

Fig.3 When $k=1, \gamma=1$, the solution structure of equation

5 结束语

用指数函数方法对 KBK 方程进行了求解, 通过对指数函数形式解中的某些系数取特殊值, 得到了13种待定系数的解, 并通过指数函数和双曲函数之间的关系, 构造了 KBK 方程的双曲函数形式的精确解. 特别地, 当所得的系数解中 $\beta = 0$ 时, 就得到了 KS 方程的精确解.

参考文献:

- [1] Benney D J. Long nonlinear waves in fluid flow [J]. J Math Phys, 1966, 45(1): 52-60.
- [2] 张卫国, 东春彦. 广义组合 KdV 方程与广义组合 KdV-Burgers 方程孤波解的条件稳定性[J]. 上海理工大学学报, 2006, 28(4): 307-316.
- [3] Nozaki K. Hirota's method and the singular manifold expansion [J]. J Phys Soc Japan, 1987, 56(1): 3052-3054.

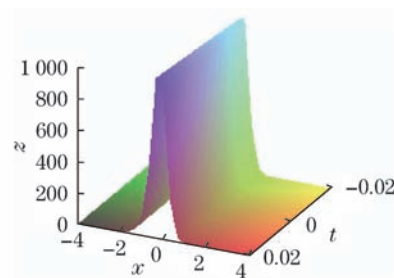


图2 当 $k=2, \gamma=1$ 时方程的解结构

Fig.2 When $k=2, \gamma=1$, the solution structure of equation

- [4] Song L. New exact solutions of the KdV-Burgers-Kuramoto equation [J]. Phys Lett A, 2006, 358(5): 5-6.
- [5] Ruan L, Gao W, Chen J. Asymptotic stability of the rarefaction wave for the generalized KdV-Burgers-Kuramoto equation [J]. Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications, 2008, 68(2): 402-411.
- [6] Ren Y J, Zhang H Q. A generalized F-expansion method to find abundant families of Jacobi elliptic function solution of the (2+1)-dimensional Nizhnik-Novikov-Veselov equation [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, 27(4): 959-977.
- [7] 兰慧彬, 汪克林. 一类非线性方程的函数级数解法[J]. 中国科学技术大学学报, 1990, 20(1): 15-26.
- [8] Malfeit W. Solitary wave solutions of nonlinear wave equations [J]. Am J Phys, 1992, 60(7): 650-654.
- [9] Soliman A. Exact solutions of KdV-Burgers equation by Exp-function method [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2009, 41(2): 1034-1452.
- [10] 张玲, 桑本文, 胡恒春. 耦合 MKdV 系统的非奇异正子解、负子解及复子解[J]. 上海理工大学学报, 2012, 34(1): 76-80.
- [11] Ebaid A. Exact solitary wave solutions for some nonlinear evolution equations via exp-function method [J]. Phys Lett A, 2007, 365(3): 213-225.
- [12] He J H, Wu X H. Exp-function method for nonlinear wave equations [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, 30(3): 700-708.
- [13] Song L, Zhang H. Application of homotopy analysis method to fractional KdV-Burgers-Kuramoto equation [J]. Phys Lett A, 2007, 367(1): 88-94.

(编辑: 石 瑛)