

文章编号:1007-6735(2013)03-0261-04

一类具有常数移民和分布时滞的 SIRS 传染病模型分析

朱春娟

(广东韶关学院 数学与信息科学学院, 韶关 512005)

摘要: 通过恰当的 Liapunov 函数, 研究了一类在易感者类和移出者类具有常数移民、通过媒介传播和含分布时滞的 SIRS 传染病模型. 在不存在染病者移民时, 得到了地方平衡点存在的阈值 R_0 . 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点是全局渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, 无病平衡点不稳定, 地方平衡点全局渐近稳定. 在染病者存在常数输入时, 模型不存在无病平衡点, 地方平衡点全局渐近稳定.

关键词: 传染病模型; 分布时滞; 平衡点; 稳定性

中图分类号: O 175.1 **文献标志码:** A

Epidemic Models of SIRS Type with Constant Immigration and Distribution Delay

ZHU Chun-juan

(College of Mathematics and Information Science, Shaoguan University, Shaoguan 512005, China)

Abstract: An epidemic model of SIRS type with constant immigration of each class and distribution delay was dealt with by means of suitable Liapunov functions. In the absence of infectious individuals, the threshold of existence of endemic equilibrium was found. Below the threshold, the disease-free equilibrium is globally asymptotically stable; above the threshold, the disease-free equilibrium is unstable and the endemic equilibrium is globally asymptotically stable. In the existence of input of infectious individuals, the models have no disease-free equilibrium and the SIRS model is globally stable in the corresponding region.

Key words: *infectious disease model; distribution delay; equilibrium; stability*

一般讨论的传染病模型, 染病者类都没有常数移民, 但对某些疾病, 除易感者具有常数移民率外, 染病者及移出者也有常数移民, 如爱滋病、非典等, 尽管各国海关进行控制, 但仍然有少量的带病者进入某一地区, 使疾病在这一地区流行. 关于传染者也

具有常数移民率的传染病模型, 目前所见的文章还很少, 主要有陈军杰、李建全等^[1-2].

在现实生活中, 有些传染病是通过大众媒体来传播给人体的^[3]. 有些媒介的个体数量非常大, 以至于每个人体被传染的机会均等. 文献[4-6]分别研

收稿日期: 2012-04-17

第一作者: 朱春娟(1982-), 女, 讲师, 研究方向: 生物数学. E-mail: zhuchunjuan0079@sina.com.cn

究了具有一般接触率、饱和传染率和双线性传染率的传染病模型,在传播媒介种类或数量比较多时不现实.文献[7]研究了具分布时滞、未考虑移民影响的SIS传染病模型.本文采用传染率为 $\beta S \int_0^\infty f(\tau) \cdot I(t-\tau) d\tau$,即 t 时刻的传染率既与该时刻的易感者数量有关,又与该时刻以前的染病者的数量有关,更适用于当传染的媒介种类或数量比较多的情况,建立具有常数移民的SIR和SIRS传染病模型.其中, $f(t)$ 为非负的权函数,在 $R_{+0} = [0, \infty)$ 上平方可积,且满足

$$\int_0^\infty f(\tau) d\tau = 1, \quad \int_0^\infty \tau f(\tau) d\tau < +\infty$$

1 模型的建立

研究系统

$$\left. \begin{aligned} S' &= aA - \beta S \int_0^\infty f(u) I(t-u) du - \mu S + \delta R \\ I' &= bA + \beta S \int_0^\infty f(u) I(t-u) du - (\mu + \gamma + \alpha) I \\ R' &= cA + \gamma I - (\mu + \delta) R \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

总人口方程为

$$N' = A - \mu N - \alpha I \quad (2)$$

式中, $N = N(t)$ 表示 t 时刻总人口; A 为单位时间从外界迁入的总人口; $a > 0, b \geq 0, c \geq 0, a + b + c = 1, a, b, c$ 分别为输入人群中易感者 S 、染病者 I 和移出者 R 所占的比例; $\gamma, \delta, \mu, \alpha$ 分别为染病者成为移出类的恢复率、免疫失去率、出生(死亡率)、因病死亡率.其中, $\beta, \gamma, \mu, \alpha$ 均为正常数, δ 为非负常数.假设新生儿均为易感者.

由于 $N = S + I + R$,并结合式(2),系统(1)等价于系统

$$\left. \begin{aligned} I' &= bA + \beta(N - I - R) \int_0^\infty f(u) I(t-u) du - (\mu + \gamma + \alpha) I \\ R' &= cA + \gamma I - (\mu + \delta) R \\ N' &= A - \mu N - \alpha I \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

当 $b = 0$ 时,系统(3)有无病平衡点;当 $b > 0$ 时,没有无病平衡点.分 $b = 0$ 和 $b > 0$ 两种情形进行研究.

2 平衡点的稳定性

现分两种情形进行研究.

情形1 $b = 0$.

则系统(3)等价于

$$\left. \begin{aligned} I' &= \beta(N - I - R) \int_0^\infty f(u) I(t-u) du - (\mu + \gamma + \alpha) I \\ R' &= cA + \gamma I - (\mu + \delta) R \\ N' &= A - \mu N - \alpha I \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

令 $D = \{(I, R, N) \mid I \geq 0, R \geq 0, I + R \leq N \leq A/\mu\}$.显然, D 是系统(4)的正向不变集.

容易算出系统(4)存在无病平衡点

$$p^0(I, R, N) = \left(0, \frac{cA}{\mu + \delta}, \frac{A}{\mu}\right)$$

记

$$R_0 = \frac{\beta \left(\frac{A}{\mu} - \frac{cA}{\mu + \delta} \right)}{\mu + \gamma + \alpha}$$

由系统(4)的后两个方程解出

$$I = \frac{A - \mu N}{\alpha}, \quad R = \frac{\alpha cA + \gamma(A - \mu N)}{\alpha(\mu + \delta)}$$

将 I 和 R 代入系统(4)的第一个方程,得

$$g_1(N) = \beta \left[-\frac{\mu + \delta + \alpha c + \gamma A}{\alpha(\mu + \delta)} + \frac{(\alpha + \mu)(\mu + \delta) + \mu \gamma N}{\alpha(\mu + \delta)} \right] - (\mu + \gamma + \alpha)$$

显然, $g_1(0) < 0$,

$$g_1\left(\frac{A}{\mu}\right) = \beta \left(\frac{A}{\mu} - \frac{cA}{\mu + \delta} \right) - (\mu + \gamma + \alpha)$$

当 $R_0 > 1$ 时,即 $\beta \left(\frac{A}{\mu} - \frac{cA}{\mu + \delta} \right) > \mu + \gamma + \alpha$ 时,

$g_1\left(\frac{A}{\mu}\right) > 0$.由 $g_1(N)$ 的单调性和连续函数的介值定理可知,在区间 $\left(0, \frac{A}{\mu}\right)$ 上 $g_1(N) = 0$ 存在唯一解 N^* .

定理1 记

$$R_0 = \frac{\beta \left(\frac{A}{\mu} - \frac{cA}{\mu + \delta} \right)}{\mu + \gamma + \alpha}, \quad c = 1 - a$$

系统(4)始终存在无病平衡点

$$p^0(I, R, N) = \left(0, \frac{cA}{\mu + \delta}, \frac{A}{\mu}\right)$$

当 $R_0 > 1$ 时,系统(4)存在唯一地方病平衡点 $p^*(I^*, R^*, N^*)$.

2.1 无病平衡点 p^0 的全局渐近稳定性

定理2 对于系统(4),当 $R_0 < 1$ 时,无病平衡点 p^0 是全局渐近稳定的;当 $R_0 > 1$ 时, p^0 是不稳定的.

证明 容易得到系统(4)对应于平衡点 p^0 的线性化系统为

$$\left. \begin{aligned} x' &= \beta \left(\frac{A}{\mu} - \frac{cA}{\mu + \delta} \right) \int_0^\infty f(u) x(t-u) du - \\ &\quad (\mu + \gamma + \alpha) x \\ y' &= \gamma x - (\mu + \delta) y \\ z' &= -\mu z - \alpha x \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

将 $x = c_1 e^{\lambda t}$, $y = c_2 e^{\lambda t}$, $z = c_3 e^{\lambda t}$ 代入式(5), 得到对应于平衡点 p^0 的特征方程为

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \mu + \delta) \left[\lambda + \mu + \gamma + \alpha - \beta \left(\frac{A}{\mu} - \frac{cA}{\mu + \delta} \right) \int_0^\infty f(u) e^{-\lambda u} du \right] = 0 \quad (6)$$

方程(6)除有根 $\lambda = -\mu$, $\lambda = -(\mu + \delta)$ 外, 其余的根由方程

$$\lambda + \mu + \gamma + \alpha - \beta \left(\frac{A}{\mu} - \frac{cA}{\mu + \delta} \right) \int_0^\infty f(u) e^{-\lambda u} du = 0 \quad (7)$$

来决定.

设方程(7)有根 $\lambda = m + ni$, 其中, $m \geq 0$, 则将 $\lambda = m + ni$ 代入式(7), 比较两端实部, 得

$$m + \mu + \gamma + \alpha - \beta \left(\frac{A}{\mu} - \frac{cA}{\mu + \delta} \right) \int_0^\infty f(u) e^{-mu} \cos(nu) du = 0 \quad (8)$$

由于当 $m \geq 0$ 时, 在 $[0, \infty)$ 上, $0 < e^{-mu} \leq 1$, $|\cos(nu)| \leq 1$, 所以, 方程(8)的左端大于等于 $m + \mu + \gamma + \alpha - \beta \left(\frac{A}{\mu} - \frac{cA}{\mu + \delta} \right)$. 当 $R_0 < 1$ 时, 即 $\mu + \gamma + \alpha > \beta \left(\frac{A}{\mu} - \frac{cA}{\mu + \delta} \right)$, 则方程(8)左端大于 0, 方程(8)不成立. 所以, 当 $R_0 < 1$ 时, 方程(7)无非负实部的根, 无病平衡点 p^0 是局部渐近稳定的.

设

$$F(\lambda) = \lambda + \mu + \gamma + \alpha - \beta \left(\frac{A}{\mu} - \frac{cA}{\mu + \delta} \right) \int_0^\infty f(u) e^{-\lambda u} du$$

当 $R_0 > 1$ 时, 即

$$\mu + \gamma + \alpha < \beta \left(\frac{A}{\mu} - \frac{cA}{\mu + \delta} \right)$$

所以, $F(0) = \mu + \gamma + \alpha - \beta \left(\frac{A}{\mu} - \frac{cA}{\mu + \delta} \right) < 0$, 又因为 $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) = +\infty$, 故由连续函数的介值定理可知, $F(\lambda) = 0$ 至少存在 1 个正根, 故当 $R_0 > 1$ 时, 无病平衡点 p^0 是不稳定的.

考虑 Liapunov 函数

$$V = I + \beta \left(\frac{A}{\mu} - \frac{cA}{\mu + \delta} \right) \int_0^\infty f(u) \int_{t-u}^t I(v) dv du$$

则

$$\begin{aligned} V' |_{(4)} &= \beta(N - I - R) \int_0^\infty f(u) I(t-u) du - \\ &\quad (\mu + \gamma + \alpha) I + \beta \left(\frac{A}{\mu} - \frac{cA}{\mu + \delta} \right) \int_0^\infty f(u) [I(t) - I(t-u)] du = \\ &\quad -(\mu + \gamma + \alpha)(1 - R_0) I + \beta(N - I - R - \frac{A}{\mu} + \frac{cA}{\mu + \delta}) \int_0^\infty f(u) I(t-u) du \end{aligned}$$

因为, $0 \leq N \leq \frac{A}{\mu}$, $I \geq 0$, 则 $N - I - \frac{A}{\mu} \leq 0$, 又由系统(4)的后 2 个方程解出

$$R = \frac{\alpha cA + \gamma(A - \mu N)}{\alpha(\mu + \delta)}$$

所以, 存在 $T > 0$, 当 $t > T$ 时, $R \geq \frac{cA}{\mu + \delta}$, 则 $-R + \frac{cA}{\mu + \delta} \leq 0$. 故当 $R_0 < 1$ 时, $V' |_{(4)} < 0$, 即当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 p^0 是全局渐近稳定的.

2.2 地方平衡点 p^* 的全局渐近稳定性

定理 3 对系统(4), 当 $R_0 > 1$ 时, 定义区域

$$D = \left\{ (N, I, R) \mid N - I - R < \frac{\beta I^* + \mu + \gamma + \alpha}{\beta} \right\}$$

则在区域 D 内地方平衡点 p^* 是全局渐近稳定的

证明 系统(4)在 p^* 处的线性化系统为

$$\left. \begin{aligned} x' &= (\mu + \gamma + \alpha) \int_0^\infty f(u) x(t-u) du - \\ &\quad (\beta I^* + \mu + \gamma + \alpha) x + \beta I^* z - \beta I^* y \\ y' &= \gamma x - (\mu + \delta) y \\ z' &= -\mu z - \alpha x \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

类似于前面的推导, 地方平衡点 p^* 是局部渐近稳定的.

对系统(4)作变换

$$x = I - I^*, \quad y = R - R^*, \quad z = N - N^*$$

则式(4)变为

$$\left. \begin{aligned} x' &= \beta(z - y - x + S_e) \int_0^\infty f(u) x(t-u) du - \\ &\quad (\beta I^* + \mu + \gamma + \alpha) x + \beta I^* z - \beta I^* y \\ y' &= \gamma x - (\mu + \delta) y \\ z' &= -\mu z - \alpha x \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中, $S_e = N^* - I^* - R^*$.

考虑 Liapunov 函数

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} x^2 + \frac{\beta I^*}{2\gamma} y^2 + \frac{\beta I^*}{2\alpha} z^2 + \\ &\quad \frac{(\beta I^* + \mu + \alpha + \gamma)}{2} \int_0^\infty f(u) \int_{t-u}^t x^2(v) dv du \end{aligned}$$

则

$$V'|_{(10)} = -\frac{(\beta I^* + \mu + \alpha + \gamma)}{2}x^2 + \beta(z - x - y + S_e) \int_0^\infty f(u)x(t)x(t-u)du - \frac{(\beta I^* + \mu + \alpha + \gamma)}{2} \int_0^\infty f(u)x^2(t-u)du - \frac{\beta I^*(\mu + \delta)y^2}{\gamma} - \frac{\beta I^*\mu z^2}{\alpha}$$

记

$$W_1 = -(\beta I^* + \mu + \alpha + \gamma)x^2 + 2\beta(z - x - y + S_e)x(t)x(t-u) - (\beta I^* + \mu + \alpha + \gamma)x^2(t-u)$$

则

$$V'|_{(10)} = -\frac{1}{2} \int_0^\infty f(u)W_1 du - \frac{\beta I^*(\mu + \delta)y^2}{\gamma} - \frac{\beta I^*\mu z^2}{\alpha}$$

当 $|\beta(z - x - y + S_e)| < \beta I^* + \mu + \alpha + \gamma$ 时,

即 $N - I - R < \frac{\beta I^* + \mu + \gamma + \alpha}{\beta}$ 时, W_1 是正定的. 同

样,由文献[5]可知, $V'|_{(10)} < 0$, 地方平衡点 p^* 是全局渐近稳定的.

情形 2 $b > 0$.

当 $b > 0$ 时, 系统(3)不存在无病平衡点. 同样, 由系统(3)的后两个方程可解出

$$I = \frac{A - \mu N}{\alpha}, R = \frac{\alpha c A + \gamma(A - \mu N)}{\alpha(\mu + \delta)}$$

将 I 和 R 代入系统(3)的第一个方程, 得

$$g_2(N) = bA + \beta \left[-\frac{\mu + \delta + \alpha c + \gamma}{\alpha(\mu + \delta)} A + \frac{(\alpha + \mu)(\mu + \delta) + \mu\gamma}{\alpha(\mu + \delta)} N \right] \frac{A - \mu N}{\alpha} - (\mu + \gamma + \alpha) \frac{A - \mu N}{\alpha}$$

$$g_2(0) = (b-1)A - \beta \frac{\mu + \delta + \alpha c + \gamma}{\alpha^2(\mu + \delta)} A^2 - (\mu + \gamma) \frac{A}{\alpha}$$

因为, $b < 1$, 所以, $g_2(0) < 0$.

因为, $g_2\left(\frac{A}{\mu}\right) = bA > 0$, 所以, 由连续函数的介

值定理可知, 在区间 $\left(0, \frac{A}{\mu}\right)$ 上, 存在解 $\bar{N}^*$. 又因为

$g'_2(N) > 0$, 所以, 该解唯一. 所以, 有引理 1.

引理 1 当 $b > 0$ 时, 系统(3)不存在无病平衡点, 只存在唯一的地方平衡点 $\bar{p}^*(I^*, R^*, N^*)$.

系统(3)在 $\bar{p}^*$ 处的线性系统为系统(9), 系统(3)在 $\bar{p}^*$ 处作变换 $x = I - I^*, y = R - R^*, z = N - N^*$ 后为系统(10). 同样, 采用定理 3 的证明方法得定理 4.

定理 4 对于系统(3), 在区域 D 内, 地方平衡点 $\bar{p}^*$ 是全局渐近稳定的.

3 结束语

考虑了常数移民中具有染病者和无染病者的两种情况, 利用恰当的 Liapunov 函数讨论了地方病平衡点全局渐近稳定的情况.

参考文献:

- [1] 陈军杰. 一类具有常数迁入的且总人口变化的 SIRS 传染病模型的稳定性[J]. 生物数学学报, 2004, 19(3): 310-313.
- [2] 李建全, 张娟, 马知恩. 一类一般接触率和常数输入的流行病模型的全局分析[J]. 应用数学与力学, 2004, 18(4): 359-367.
- [3] Cooke K L. Stability analysis for a vector disease[J]. Rocky Mount J Math, 1979, 7(2): 253-263.
- [4] Li Jianquan, Zhang Juan, Ma Zhien. Global analysis of some epidemic models with general contact rate and constant immigration. [J] Applied Mathematics and Mechanics, 2004, 25(4): 396-404.
- [5] 徐金瑞, 王美娟, 张拥军. 连续接种的具有饱和传染率和垂直传染的 SIRS 传染病模型[J]. 上海理工大学学报, 2010, 32(4): 311-314.
- [6] 王贺桥, 周艳丽, 王美娟. 具有连续预防接种的双线性传染率 SIQR 流行病[J]. 上海理工大学学报, 2007, 29(2): 578-584.
- [7] 王拉娣, 李建全. 一类带有分布时滞的传染病模型的分析[J]. 上海大学学报, 2003, 9(4): 354-357.

(编辑: 石 瑛)