

文章编号:1007-6735(2013)05-0443-06

一类重调和方程边值问题解的奇点可去性

刘 淼, 魏公明

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 给出了一类重调和方程边值问题解的表示式, 研究了其解的奇点可去性, 利用判断反常积分收敛性的方法对解的表示式作了敛散性分析, 给出了该类方程在限定条件下的具体表达式, 研究了相应的解的积分表达式. 将函数项幂次的取值范围在实数域上分为3段, 分别讨论了每种情形下相应积分式的敛散性, 得出了其在不同参数范围下解的奇点可去性.

关键词: 重调和方程; 反常积分敛散性; 边值问题; 奇点可去性

中图分类号: O 175.2

文献标志码: A

Removability of Singularities of Solutions of Polyharmonic Equations Boundary Value Problem

LIU Miao, WEI Gong-ming

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Methods for discriminating convergence and divergence of an improper integral was utilized to analysis the convergence and divergence of the representation formula of solutions of polyharmonic equations boundary value problem. The concrete formula of the equation was given in certain restricted conditions. The corresponding integral expressions were studied. Furthermore, the power of functions was divided into three parts in real number field and the convergence and divergence of corresponding integral expressions were analyzed separately in each section. Based on the above discussion, the study shows that the integral expressions of solutions are convergent if the power is greater than a certain critical value and the singularity is removable, while they are divergent if the power is less than the critical value and the singularity is nonremovable.

Key words: polyharmonic equation; convergence and divergence of improper integral; boundary value problem; singularity removability

1 问题的提出

近年来有许多学者致力于重调和方程的研究^[1-2], 对于这类问题, 重调和方程解的奇点可去性

研究是至关重要的内容. 1997年, Soranzo^[3]研究了一类超线性双重调和方程

$$\begin{cases} \Delta^2 u = |x|^{\sigma} u^p & x \in \Omega \setminus \{0\} \\ u \geq 0, -\Delta u \geq 0 & x \in \Omega \setminus \{0\} \end{cases}$$

正解的孤立奇点, 围绕双重调和方程奇异解的局部

收稿日期: 2012-12-20

第一作者: 刘 淼(1988-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: 329165650@qq.com

行为,给出了奇点及其存在性的完整描述,此外还建立了方程的径向对称解的一个先验估计.

2009年,Hsu^[4]研究了重调和方程 $\Delta^m u = 0$ 的可去奇点,证明了多重调和方程 $\Delta^m u = 0$ 在 $\Omega \setminus \{x_0\}$ 上的一个解 u 在 x_0 有一个可去奇点的充要条件.

2010年,Ghergu等^[5]研究了多重调和不等式 $-\Delta^m u \geq 0$ 在 $B_1(0) - \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ 上的非负古典解 u ,给出在整数 $n \geq 2, m \geq 1$ 情形下,解 u 满足一个点点先验界(当 $x \rightarrow 0$ 时)的充分必要条件,该情形下,当 $x \rightarrow 0, u$ 的最佳估计为 $u(x) = O(\Gamma(x))$. 其中, Γ 是 $-\Delta$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的基本解.

近几年来在偏微分方程这一数学领域中对解的奇点可去性的研究引起普遍重视. 本文在借鉴以上研究成果的同时,参阅了相关文献[6-8],利用判断反常积分收敛性的方法对双调和方程边值问题

$$\begin{cases} (-\Delta)^2 u = |x|^\beta & x \in B \\ D^\alpha u|_{\partial B} = 0 & |\alpha| \leq 1 \end{cases}$$

进行解的奇点可去性分析.

2 预备知识

给定多重调和方程边值问题

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = f & x \in \Omega \\ D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0 & |\alpha| \leq m-1 \end{cases} \quad (1)$$

式中, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界光滑区域; f 是在适当函数空间内的已知函数; u 表示未知的解.

假设 f 属于适当的函数空间,在表达式有意义及问题(1)有解的情况下,可以在形式上将问题(1)的解 u 写成用格林函数表示的公式

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy \quad (2)$$

显然,格林函数 $G(x, y)$ 的具体表达式不容易给出,但是,若积分区域在 n 维单位球上,即 $\Omega = B \subset \mathbb{R}^n$,在有界光滑区域上,问题(1)存在格林函数 $G_{(-\Delta)^m, \Omega}$,从而解 u 的表达式可写为

$$u(x) = \int_{\Omega} G_{(-\Delta)^m, \Omega}(x, y) f(y) dy \quad x \in \Omega \quad (3)$$

现介绍 Ω 为 n 维单位球时,狄利克雷问题(1)的格林函数表达式.

在此之前,先介绍一些记号.

a. 假设 $f, g \geq 0$ 为定义在同一集合 D 上的两个函数.

记 $f \leq g$, 若对任意的 $x \in D$, 都存在 $c > 0$, 使得 $f(x) \leq cg(x)$.

记 $f \simeq g$, 若同时满足 $f \leq g$ 和 $g \leq f$.

b. 在有界光滑区域 Ω 上,点到区域边界的距离定义为

$$d(x) := \text{dist}(x, \partial\Omega) = \min_{y \in \partial\Omega} |x - y| \quad x \in \Omega$$

将其写成单位球内相应的坐标形式,便有下面的表达式:

对 $x, y \in \bar{B}$, 有

$$[XY] := \sqrt{|x|^2 |y|^2 - 2xy + 1} = \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right| = \left| |y|x - \frac{y}{|y|} \right|$$

式中, $[XY]$ 是从 $|y|x$ 到 y 在单位球上的投影的距离,事实上, $[XY]$ 比 $|x - y|$ 大. 对任意的 $x, y \in B$, 有 $[XY]^2 - |x - y|^2 = (1 - |x|^2)(1 - |y|^2) > 0$.

引理1 在单位球上,即 $\Omega = B$,狄利克雷问题(1)的格林函数是正的,并且可表示为

$$G_{m,n}(x, y) = k_{m,n} |x - y|^{2m-n} \cdot \int_1^{[XY]/|x-y|} (v^2 - 1)^{m-1} v^{1-n} dv$$

其中, $k_{m,n}$ 为正常数,且

$$k_{m,n} = \frac{1}{ne_n 4^{m-1} ((m-1)!)^2} \quad e_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$$

为了方便分析本文所要解决的问题,给出 $G_{m,n}$ 的估计式.

$$G_{m,n}(x, y) \simeq \begin{cases} |x - y|^{2m-n} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^m d(y)^m}{|x - y|^{2m}} \right\} & n > 2m \\ \ln \left(1 + \frac{d(x)^m d(y)^m}{|x - y|^{2m}} \right) & n = 2m \\ d(x)^{m-\frac{n}{2}} d(y)^{m-\frac{n}{2}} \cdot \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x - y|^n} \right\} & n < 2m \end{cases} \quad (4)$$

对于一般的区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 不知道 $|G_{(-\Delta)^m, \Omega}|$ 是否仍然适用这个估计式,这个问题在文献[1]中有所阐述. 为了避免太多的技术问题,这里只讨论双调和的情形. 下述估计适用于任何有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 其中, $\partial\Omega \in C^{4,\gamma}$.

$$|G_{\Delta^2, \Omega}(x, y)| \leq \begin{cases} |x - y|^{4-n} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x - y|^4} \right\} & n > 4 \\ \ln \left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x - y|^4} \right) & n = 4 \\ d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}} \cdot \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x - y|^n} \right\} & n < 4 \end{cases} \quad (5)$$

3 主要结果

定理 1 在 $m=2, f=|x|^\beta, \Omega=B$ 情形下, 重调和方程边值问题(1), 即双调和方程边值问题

$$\begin{cases} (-\Delta)^2 u = |x|^\beta & x \in B \\ D^\alpha u|_{\partial B} = 0 & |\alpha| \leq 1 \end{cases} \quad (6)$$

在 $\beta \geq 0$ 及 $-n < \beta < 0$ 情形下奇点可去, 在 $\beta \leq -n$ 情形下奇点不可去.

证明 考虑四阶情形下, 双调和方程边值问题

$$\begin{cases} (-\Delta)^2 u = |x|^\beta & x \in B \\ D^\alpha u|_{\partial B} = 0 & |\alpha| \leq 1 \end{cases}$$

也就是在重调和方程边值问题(1)中令 $m=2, f=|x|^\beta, \Omega=B$ 所得到的问题, 那么, 从上述预备知识可得, 此情形下单位球上的格林函数的估计式可表示为

$$|G_{\Delta^2, B}(x, y)| \leq \begin{cases} |x-y|^{4-n} \min\left\{1, \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right\} & n > 4 \\ \ln\left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right) & n = 4 \\ d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}} \cdot \min\left\{1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x-y|^n}\right\} & n < 4 \end{cases} \quad (7)$$

而且解的表达式可写为

$$u(x) = \int_B G_{(-\Delta)^2, B}(x, y) |y|^\beta dy \quad x \in B \quad (8)$$

为了方便解决问题, 使分析过程更有条理, 将 β 在整个实数域上分为 $\beta \geq 0, -n < \beta < 0, \beta \leq -n$ 这 3 段来讨论.

3.1 $\beta \geq 0$

将 n 分为 3 种情形 ($n > 4, n = 4, n < 4$) 分别来讨论.

a. 考虑 $n > 4$ 的情形.

$$u(x) \leq \int_B |x-y|^{4-n} \min\left\{1, \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right\} |y|^\beta dy \quad x \in B \quad (9)$$

由 $\min\left\{1, \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right\} \leq 1$ 可得

$$u(x) \leq \int_B |x-y|^{4-n} |y|^\beta dy \quad x \in B \quad (10)$$

由式(10), 积分 $\int_B |x-y|^{4-n} |y|^\beta dy$ 在单位球上是收敛的, 因此

$$\int_B |x-y|^{4-n} \min\left\{1, \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right\} |y|^\beta dy < \infty, \quad u(x) < \infty$$

从而这种情形下奇点可去.

b. 考虑 $n = 4$ 的情形.

$$u(x) \leq \int_B \ln\left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right) |y|^\beta dy, \quad x \in B \quad (11)$$

已知积分 $\int_B \frac{y^\beta}{|x-y|^3} dy$ 是收敛的, 而且有

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{\ln\left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right) |y|^\beta}{\frac{y^\beta}{|x-y|^3}} = 0$$

那么, 积分 $\int_B \ln\left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right) |y|^\beta dy$ 是收敛的, 从而积分

$$\int_B \ln\left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right) |y|^\beta dy < \infty, \quad u(x) < \infty$$

这种情形下奇点也是可去的.

c. 考虑 $n < 4$ 的情形.

$$u(x) \leq \int_B d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}} \cdot \min\left\{1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x-y|^n}\right\} |y|^\beta dy, \quad x \in B \quad (12)$$

因为 $\min\left\{1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x-y|^n}\right\} \leq 1$, 所以

$$u(x) \leq \int_B d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}} |y|^\beta dy, \quad x \in B \quad (13)$$

明显地, 积分 $\int_B d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}} |y|^\beta dy$ 在单位球上没有奇点, 因此,

$$\int_B d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}} |y|^\beta dy < \infty$$

有界, 奇点可去.

3.2 $-n < \beta < 0$

将单位球分为两部分 B_ϵ 和 $B \setminus B_\epsilon$ 来考虑. B_ϵ 表示以原点为心的小邻域, $B \setminus B_\epsilon$ 表示单位球其余部分.

同样地, 分为 $n > 4, n = 4, n < 4$ 这 3 种情形来讨论.

a. 考虑 $n > 4$ 的情形.

由式(9)和式(10)可得

$$\begin{aligned}
u(x) &\leq \int_B |x-y|^{4-n} \min\left\{1, \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right\} \\
&\quad |y|^\beta dy = \int_B |x-y|^{4-n} |y|^\beta dy = \\
&\quad \int_B \frac{1}{|x-y|^{n-4} |y|^{-\beta}} dy = \\
&\quad \int_{B \setminus B_\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{n-4} |y|^{-\beta}} dy + \\
&\quad \int_{B_\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{n-4} |y|^{-\beta}} dy \quad (14)
\end{aligned}$$

对于 $\int_{B \setminus B_\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{n-4} |y|^{-\beta}} dy$, 0 不是奇点;
 对于 $\int_{B \setminus B_\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{n-4}} dy$, x 是一个奇点. 明显地, n
 $-4 < n$, 所以, $\int_{B \setminus B_\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{n-4}} dy$ 是收敛的, 从而
 $\int_{B \setminus B_\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{n-4} |y|^{-\beta}} dy$ 是收敛的, 对于积分
 $\int_{B_\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{n-4} |y|^{-\beta}} dy$, x 不是奇点; 对于
 $\int_{B_\epsilon} \frac{1}{|y|^{-\beta}} dy$, 0 是奇点. 积分 $\int_{B_\epsilon} \frac{1}{|y|^{-\beta}} dy$ 当
 $-\beta < n$, 即 $\beta > -n$ 时收敛, 因此, 当 $-n < \beta <$
 0 时, $\int_{B_\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{n-4} |y|^{-\beta}} dy$ 收敛, 从而
 $\int_{B \setminus B_\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{n-4} |y|^{-\beta}} dy + \int_{B_\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{n-4} |y|^{-\beta}} dy$
 $< \infty$, $u(x) < \infty$ 奇点可去.

b. 考虑 $n=4$ 的情形.

由式(11)可得

$$\begin{aligned}
u(x) &\leq \int_B \ln\left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right) |y|^\beta dy = \\
&\quad \int_B \frac{\ln\left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right)}{|y|^{-\beta}} dy = \\
&\quad \int_{B \setminus B_\epsilon} \frac{\ln\left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right)}{|y|^{-\beta}} dy + \\
&\quad \int_{B_\epsilon} \frac{\ln\left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right)}{|y|^{-\beta}} dy \quad (15)
\end{aligned}$$

对于积分 $\int_{B \setminus B_\epsilon} \frac{\ln\left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right)}{|y|^{-\beta}} dy$, 0
 $\frac{\ln\left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right)}{|y|^{-\beta}}$
 不是奇点, 已知 $\lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{|x-y|^3 |y|^{-\beta}} = 0$, 且
 对积分 $\int_{B \setminus B_\epsilon} \frac{1}{|x-y|^3 |y|^{-\beta}} dy$, 0 不是奇点, 很明

显它收敛, 从而 $\int_{B \setminus B_\epsilon} \frac{\ln\left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right)}{|y|^{-\beta}} dy$ 是
 收敛的, 对于积分 $\int_{B_\epsilon} \frac{\ln\left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right)}{|y|^{-\beta}} dy$, x
 不是奇点, 因此, 积分 $\int_{B_\epsilon} \frac{\ln\left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right)}{|y|^{-\beta}} dy$
 是收敛的, 因此, 这两个积分的和

$$\begin{aligned}
&\int_{B \setminus B_\epsilon} \frac{\ln\left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right)}{|y|^{-\beta}} dy + \\
&\quad \int_{B_\epsilon} \frac{\ln\left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right)}{|y|^{-\beta}} dy < \infty, u(x) < \infty
\end{aligned}$$

从而奇点可去.

c. 考虑 $n < 4$ 的情形.

由式(12)和式(13)可得

$$\begin{aligned}
u(x) &\leq \int_B d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}} \cdot \\
&\quad \min\left\{1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x-y|^n}\right\} |y|^\beta dy = \\
&\quad \int_B d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}} |y|^\beta dy = \\
&\quad \int_B \frac{d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}}}{|y|^{-\beta}} dy \quad (16)
\end{aligned}$$

对积分 $\int_B \frac{d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}}}{|y|^{-\beta}} dy$, 当 $-\beta < n$, 即
 $\beta > -n$ 时, 它是收敛的, 因此, 当 $-n < \beta < 0$ 时,
 有 $\int_B d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}} |y|^\beta dy < \infty$, $u(x) < \infty$, 从
 而奇点可去.

3.3 $\beta \leq -n$

当 $\beta \leq -n$ 时, $u(x) = \int_B G_{(-\Delta)^2, B}(x, y) |y|^\beta dy$
 是发散的.

由式(4), 令 $m=2, \Omega=B$, 得到

$$\begin{aligned}
G_{\Delta^2, B}(x, y) &\simeq \\
&\begin{cases} |x-y|^{4-n} \min\left\{1, \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right\} & n > 4 \\ \ln\left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}\right) & n = 4 \\ d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}} \cdot \\ \min\left\{1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x-y|^n}\right\} & n < 4 \end{cases} \quad (17)
\end{aligned}$$

**a. 考虑 $n > 4, \beta \leq -n$, 即 $n > 4, -\beta \geq n$ 的
 情形.**

由式(8)可得

$$u(x) \simeq \int_B |x-y|^{4-n} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4} \right\} |y|^\beta dy \quad (18)$$

当 $1 < \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4}$ 时,有

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_B G_{(-\Delta)^2, B}(x, y) |y|^\beta dy \simeq \\ &\int_B |x-y|^{4-n} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4} \right\} |y|^\beta dy = \\ &\int_B |x-y|^{4-n} |y|^\beta dy = \\ &\int_B \frac{1}{|x-y|^{n-4} |y|^{-\beta}} dy \end{aligned} \quad (19)$$

而当 $\frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4} < 1$ 时,有

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_B G_{(-\Delta)^2, B}(x, y) |y|^\beta dy \simeq \\ &\int_B |x-y|^{4-n} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4} \right\} |y|^\beta dy = \\ &\int_B |x-y|^{4-n} \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4} |y|^\beta dy = \\ &\int_B \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^n |y|^{-\beta}} dy \end{aligned} \quad (20)$$

因为,积分 $\int_B \frac{1}{|x-y|^{n-4} |y|^{-\beta}} dy$ 和积分 $\int_B \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^n |y|^{-\beta}} dy$ 当 $-\beta \geq n$ 时都是发散的,所以,在 $n > 4, \beta \leq -n$ 情形下, $\int_B G_{(-\Delta)^2, B}(x, y) |y|^\beta dy$ 发散,从而 $u(x) \rightarrow \infty$.

b. 考虑 $n = 4, -\beta \geq n$ 的情形,

积分 $\int_B \frac{\ln \left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4} \right)}{|y|^{-\beta}} dy$ 是发散的,

从解的积分表达式 $u(x) = \int_B G_{(-\Delta)^2, B}(x, y) |y|^\beta dy, x \in B$, 可以得到

$$\begin{aligned} u(x) &\simeq \int_B \ln \left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4} \right) |y|^\beta dy = \\ &\int_B \frac{\ln \left(1 + \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^4} \right)}{|y|^{-\beta}} dy \end{aligned} \quad (21)$$

因此, $\int_B G_{(-\Delta)^2, B}(x, y) |y|^\beta dy$ 是发散的, 而且 $u(x) \rightarrow \infty$.

c. 考虑 $n < 4, -\beta \geq n$ 的情形.

由式(8)可得

$$u(x) \simeq \int_B d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}} |y|^\beta dy$$

$$\min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x-y|^n} \right\} |y|^\beta dy \quad (22)$$

则当 $1 < \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x-y|^n}$ 时,有

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_B G_{(-\Delta)^2, B}(x, y) |y|^\beta dy \simeq \\ &\int_B d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}} |y|^\beta dy = \\ &\min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x-y|^n} \right\} |y|^\beta dy = \\ &\int_B d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}} |y|^\beta dy = \\ &\int_B \frac{d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}}}{|y|^{-\beta}} dy \end{aligned} \quad (23)$$

而当 $\frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x-y|^n} < 1$ 时,有

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_B G_{(-\Delta)^2, B}(x, y) |y|^\beta dy \simeq \\ &\int_B d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}} |y|^\beta dy = \\ &\min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x-y|^n} \right\} |y|^\beta dy = \\ &\int_B \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|x-y|^n} |y|^\beta dy = \\ &\int_B \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|y|^{-\beta}} dy \end{aligned} \quad (24)$$

因为,积分 $\int_B \frac{d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(y)^{2-\frac{n}{2}}}{|y|^{-\beta}} dy$ 和积分 $\int_B \frac{d(x)^2 d(y)^2}{|y|^{-\beta}} dy$ 当 $-\beta \geq n$ 时都发散,所以,在 $n < 4, \beta \leq -n$ 情形下, $\int_B G_{(-\Delta)^2, B}(x, y) |y|^\beta dy$ 发散,而且 $u(x) \rightarrow \infty$.

4 结论及推广

从定理的证明过程来看,以上讨论了当 $m = 2, f = |x|^\beta, \Omega = B$ 时,重调和方程边值问题(1)的解的积分表达式 $u(x) = \int_B G_{(-\Delta)^2, B}(x, y) |y|^\beta dy, x \in B$ 的收敛性,由此判断出奇点的可去性,将该问题分为 $\beta \geq 0, -n < \beta < 0, \beta \leq -n$ 这3种情形来讨论,对于情形 $\beta \geq 0$ 和 $-n < \beta < 0$,每种情况都得到 $u(x) = \int_B G_{(-\Delta)^2, B}(x, y) |y|^\beta dy < \infty, x \in B$,但是,对 $\beta \leq -n$,则有 $u(x) = \int_B G_{(-\Delta)^2, B}(x, y) |y|^\beta dy > \infty, x \in B$.综上所述,在 $m = 2, f = |x|^\beta, \Omega = B$

情形下,当 $\beta \geq 0$ 或 $-n < \beta < 0$ 时,重调和方程边值问题(1)的解的奇点可去,当 $\beta \leq -n$ 时,解的奇点不可去.

本文仅考虑了当 $m = 2, f = |x|^\beta, \Omega = B$ 时,重调和方程边值问题(1)的解的奇点可去性.实际上,可以将重数、函数形式和积分区域这3个变量选择其中1个推广到更一般的形式,例如,可以推广到下列形式:

$m = 2, f = f(x, u, \nabla u), \Omega = B$; 或 $m = 3, 4, \dots, f = |x|^\beta, \Omega = B$; 或 $m = 2, f = |x|^\beta, \Omega$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的有界区域.

甚至还可以选择其中2个或3个都进行推广,除了需要更多技术及复杂的分析过程之外,思想和方法上都有共通之处.

参考文献:

- [1] Gazzola F, Grunau H C, Sweers G. Polyharmonic Boundary Value Problems[M]. Heidelberg: Springer, 2010.
- [2] Lu Guozhen, Wang Peiyong, Zhu Jiuyi. Liouville-type theorems and decay estimates for solutions to higher

order elliptic equations[J]. Ann I H Poincaré-AN, 2012, 29(5): 653 - 665.

- [3] Soranzo R. Isolated singularities of positive solutions of a superlinear biharmonic equation[J]. Potential Analysis, 1997, 6(1): 57 - 85.
- [4] Hsu S Y. Removable singularity of the polyharmonic equation[J]. Nonlinear Analysis, 2010, 72(2): 624 - 627.
- [5] Ghergu M, Moradifam A, Taliaferro S D. Isolated singularities of polyharmonic inequalities[J]. Journal of Functional Analysis, 2011, 261(3): 660 - 680.
- [6] Mamedov F I, Harmana A. On the removability of isolated singular points for degenerating nonlinear elliptic equations[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71(12): 6290 - 6298.
- [7] 褚后利, 魏公明. 一类超线性 Dirichlet 问题无穷多个径向对称解的存在性[J]. 上海理工大学学报, 2013, 35(2): 121 - 125.
- [8] 张仕玉, 魏公明. 一类半线性椭圆型方程解的可去奇点问题[J]. 上海理工大学学报, 2013, 35(1): 37 - 40.

(编辑: 石 瑛)

(上接第 442 页)

- [3] Pendry J B. Negative refraction makes a perfect lens[J]. Phys Rev Lett, 2000, 85(18): 3966 - 3969.
- [4] Shelby R A, Smith D R, Schultz S. Experimental verification of a negative index of refraction[J]. Science, 2001, 292(5514): 77 - 79.
- [5] Liu S Y, Chen W K, Du J J, et al. Manipulating negative-refractive behavior with a magnetic field[J]. Phys Rev Lett, 2008, 101(15): 157407 - 157410.
- [6] Zhao H J, Zhou J, Kang L, et al. Tunable two-dimensional left-handed material consisting of ferrite rods and metallic wires[J]. Opt Express, 2009, 17(16): 13373 - 13380.
- [7] Bai Y, Xu F, Qiao L J. The left-handed property of the composite structure of metallic wires[J]. Appl Phys Lett, 2009, 94(9): 094101 - 094103.
- [8] Pimenov A, Loidl A, Gehrke K, et al. Negative refraction observed in a metallic ferromagnet in the

gigahertz frequency range[J]. Phys Rev Lett, 2007, 98(19): 197401 - 1974014.

- [9] Dagotto E, Hoyt T, Moreo A. Colossal magnetoresistant materials: the key role of phase separation[J]. Phys Rep, 2001, 344(1/2/3): 1 - 153.
- [10] Salamon M B, Jaime M. The physics of manganites: Structure and transport[J]. Rev Mod Phys, 2001, 73(3): 583 - 628.
- [11] 方容川. 固体光谱学[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2001.
- [12] 戴道生, 钱昆明. 铁磁学(下)[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
- [13] Schiffer P, Ramirez A P, Bao W, et al. Low temperature magnetoresistance and the magnetic phase diagram of $\text{La}_{1-x}\text{Ca}_x\text{MnO}_3$ [J]. Phys Rev Lett, 1995, 75(18): 3336 - 3339.

(编辑: 石 瑛)