

文章编号: 1007-6735(2013)05-0449-03

带非线性边界的 p -Laplacian 问题的多重解

刘向平, 章国庆

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了外域空间上一类带非线性边界的 p -Laplacian 问题多重解的存在性. 利用极值原理和山路引理, 证明了带非线性边界的 p -Laplacian 问题至少存在 2 个非平凡解.

关键词: 多重解; 非线性边界; 山路引理

中图分类号: O 175.25 **文献标志码:** A

Multiplicity Solutions for p -Laplacian Problems with Nonlinear Boundary Conditions

LIU Xiang-ping, ZHANG Guo-qing

(College of Sciences, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The existence of multiple solutions for a class of p -Laplacian problems with nonlinear boundary conditions on exterior domain was investigated. Using extremum principle and mountain pass lemma, the existence of at least two nontrivial solutions for p -Laplacian equations with nonlinear boundary conditions was proved.

Key words: multiplicity solutions; nonlinear boundary conditions; Mountain Pass Lemma

1 问题的提出

几何学中的一些问题都与带非线性边界的 p -Laplacian 方程相关, 如微分几何中的标量曲率问题和 Yamabe 问题^[1-2]可导出类似的如下带非线性边界条件的 p -Laplacian 问题

$$\left. \begin{aligned} & -\operatorname{div}(a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \\ & = \lambda m(x)|u|^{p-2}u, \quad x \in \Omega \\ & a(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial n} + b(x)|u|^{p-2}u \\ & = g(x, u), \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, Ω 为 R^N 上的光滑外域; $1 < p < N$; $0 < a_0 \leq$

$a(x) \in L^\infty(\overline{\Omega}) \cap C^\delta(\overline{\Omega})$; $b(x)$ 为连续函数, 且满足

$$\frac{c}{(1+|x|)^{p-1}} \leq b(x) \leq \frac{C}{(1+|x|)^{p-1}}, \quad 0 < c \leq C;$$

$$g(x, u) = g_1(x, u) + g_2(x, u), \quad g_1(x, u) = f(x)|u|^{\alpha-1}u, \quad g_2(x, u) = h(x)|u|^{\beta-1}u; \quad 0 \leq$$

$$\alpha < p-1 < \beta < p^*-1, \quad p^* = \frac{(N-1)p}{N-p}.$$

1992 年, Yu^[3] 研究了在外域上带 Dirichlet 边界的 p -Laplacian 问题. 分别对超线性、次线性、超线性加次线性这 3 种情况进行了讨论, 得到了非平凡解的存在性和正则性. 2001 年, Montefusco 和 Radulescu^[4] 利用山路引理证明了在无界区域上的带非线性边界的 p -Laplacian 问题至少存在 1 个非平凡解. 2008

收稿日期: 2012-07-18

基金项目: 上海市自然科学基金资助项目(11ZR1424500); 上海市一流学科建设资助项目(XTKX2012)

第一作者: 刘向平(1987-), 男, 硕士研究生, 研究方向: 偏微分方程. E-mail: liuxp83355650@yeah.net

通讯作者: 章国庆(1973-), 男, 副教授, 研究方向: 偏微分方程. E-mail: shzhangguoqing@126.com

年, Filippucci 和 Pucci^[5] 证明了外域上带非线性边界的 p -Laplacian 问题至少存在 1 个非平凡解, 并给出了解的正则性. 但对于此类问题多重解的研究并不多见, 本文利用山路引理和在局部区域找极小值点的方法, 证明了问题(1)至少有 2 个非平凡解, 得到了多重解的存在性.

2 预备知识

定义 $C_0^\infty(\Omega)$ 为在 Ω 上 $C_0^\infty(R)$ 函数全体所构成的空间, 加权 Sobolev 空间 E 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数

$$\|u\|_E = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{(1+|x|)^p} |u|^p d\sigma \right)^{1/p}$$

下的完备化空间, 加权 Lebesgue 空间 $L^p(\Omega, \omega_1)$, $L^{\alpha+1}(\partial\Omega, \omega_2)$ 和 $L^{\beta+1}(\partial\Omega, \omega_3)$ 分别对应如下相应的范数:

$$\|u\|_{p, \omega_1}^p = \int_{\Omega} \omega_1 |u(x)|^p dx$$

$$\|u\|_{\alpha+1, \omega_2}^{\alpha+1} = \int_{\partial\Omega} \omega_2 |u(x)|^{\alpha+1} dx$$

$$\|u\|_{\beta+1, \omega_3}^{\beta+1} = \int_{\partial\Omega} \omega_3 |u(x)|^{\beta+1} dx$$

式中, $\omega_i = \frac{1}{(1+|x|)^{a_i}}$, $i = 1, 2, 3$; $p < \alpha_1 < N$; $(\alpha+1)\frac{N-p}{p} - N + 1 < \alpha_2 < N$; $(\beta+1)\frac{N-p}{p} - N + 1 < \alpha_3 < N$.

由文献[6]中的定理 2 和推论 6 可得, E 紧嵌入到 $L^p(\Omega, \omega_1)$, $L^{\alpha+1}(\partial\Omega, \omega_2)$, $L^{\beta+1}(\partial\Omega, \omega_3)$.

引理 1^[7] 范数

$$\|u\|_b^p = \int_{\Omega} a(x) |\nabla u|^p dx + \int_{\partial\Omega} b(x) |u|^p d\sigma$$

定义了加权 Sobolev 空间 E 的一个等价范数.

假设:

a. $m(x)$, $f(x)$ 和 $h(x)$ 是非平凡可测函数且满足

$$0 \leq m(x) \leq \frac{c_0}{(1+|x|)^{a_1}}, 0 \leq f(x) \leq \frac{c_1}{(1+|x|)^{a_2}},$$

$$0 \leq h(x) \leq \frac{c_2}{(1+|x|)^{a_3}}, c_0, c_1, c_2 > 0$$

b. $f(x) \in L^\infty(\partial\Omega) \cap L^{p_0}(\partial\Omega)$, $h(x) \in L^\infty(\partial\Omega) \cap L^{q_0}(\partial\Omega)$, 其中

$$p_0 = \frac{(N-1)p}{(N-1)p - (\alpha+1)(n-p)}$$

$$q_0 = \frac{(N-1)p}{(N-1)p - (\beta+1)(n-p)}$$

c. 存在一个 $\mu \in (0, \alpha+1]$ 使得对于任意的 $x \in \partial\Omega$ 和 $t \in R$, 有

$$\mu G_1(x, t) \leq tg_1(x, t)$$

其中, $G_1(x, t) = \int_0^t g_1(x, s) ds$

记

$$\tilde{\lambda} = \inf_{u \in E, u \neq 0} \left[\frac{\int_{\Omega} a(x) |\nabla u|^p dx + \int_{\partial\Omega} b(x) |u|^p d\sigma}{\int_{\Omega} m(x) |u|^p dx} \right]$$

则对于任意的 $v \in E$ 和 $\lambda < \tilde{\lambda}$, 存在一个 $C_0 > 0$, 使得

$$\|v\|_b^p - \lambda \int_{\Omega} m(x) |v|^p dx \geq C_0 \|v\|_b^p$$

本文的主要结论如下:

定理 1 假设条件 a—c 都成立, $\lambda < \tilde{\lambda}$, 且

$$\frac{p}{C_0} A^p \|f\|_{\frac{\beta+1-p}{\beta-a}, p_0}^{\frac{\beta+1-p}{\beta-a}} \|h\|_{\frac{p-\alpha-1}{\beta-a}, q_0}^{\frac{p-\alpha-1}{\beta-a}} \cdot \left[\frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{(\beta+1)(p-\alpha-1)}{(\alpha+1)(\beta+1-p)} \right)^{\frac{\alpha+1-p}{\beta-a}} + \frac{1}{\beta+1} \left(\frac{(\beta+1)(p-\alpha-1)}{(\alpha+1)(\beta+1-p)} \right)^{\frac{\beta+1-p}{\beta-a}} \right] < 1$$

其中

$$\|f\|_{p_0} = \left(\int_{\partial\Omega} |f|^{p_0} d\sigma \right)^{\frac{1}{p_0}}$$

$$\|h\|_{q_0} = \left(\int_{\partial\Omega} |h|^{q_0} d\sigma \right)^{\frac{1}{q_0}}, \|u\|_{p^*} \leq A \|u\|_b$$

则问题(1)至少存在 2 个非平凡解.

3 主要定理的证明

利用山路引理和在局部区域找极小值点的方法证明定理 1.

证明 定义对应于问题(1)的能量泛函: $J: E \rightarrow R$

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{p} \|u\|_b^p - \frac{\lambda}{p} \int_{\Omega} m(x) |u|^p dx - \\ &\quad \int_{\partial\Omega} G_1(x, u) d\sigma - \int_{\partial\Omega} G_2(x, u) d\sigma = \\ &\quad \frac{1}{p} \|u\|_b^p - \frac{\lambda}{p} \int_{\Omega} m(x) |u|^p dx - \\ &\quad \frac{1}{\alpha+1} \int_{\partial\Omega} f(x) |u|^{\alpha+1} d\sigma - \\ &\quad \frac{1}{\beta+1} \int_{\partial\Omega} h(x) |u|^{\beta+1} d\sigma \end{aligned}$$

首先, 证明 $J(u)$ 在 E 上 Frechet 可微. 记

$$F(u) = \frac{1}{p} \|u\|_b^p, F_m(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} m(x) |u|^p dx$$

$$\begin{aligned} F_f(u) &= \frac{1}{\alpha+1} \int_{\partial\Omega} f(x) |u|^{\alpha+1} d\sigma, F_h(u) = \\ &\quad \frac{1}{\beta+1} \int_{\partial\Omega} h(x) |u|^{\beta+1} d\sigma \end{aligned}$$

从而可得, 对于任意的 $v \in E$,

$$\begin{aligned} \langle J'(u), v \rangle &= \langle F'(u), v \rangle - \lambda \langle F'_m(u), v \rangle - \\ &\quad \langle F'_f(u), v \rangle - \langle F'_h(u), v \rangle \end{aligned}$$

利用文献[4]中的引理 2 和引理 3, 可得

$$F'_m, F'_f \text{ 和 } F'_h \text{ 的紧性}$$

且存在 $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subseteq E$ 为(PS)序列,即对于任意的 $n \in N^+$,

$$|J(u_n)| \leq C, \text{ 且当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } \|J'(u_n)\|_{E^*} \rightarrow 0 \quad (2)$$

其次,证明(PS)序列 $\{u_n\}$ 的有界性.由式(2)可得,对于充分大的 n ,有

$$|\langle J'(u_n), u_n \rangle| \leq \mu \|u_n\|_b$$

从而可知

$$\begin{aligned} C + \|u_n\|_b &\geq J(u_n) - \frac{1}{\mu} \langle J'(u_n), u_n \rangle = \\ &\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right) \left(\|u_n\|_b^p - \lambda \int_{\Omega} m(x) |u_n|^p dx\right) + \\ &\left(\frac{1}{\mu} \int_{\partial\Omega} g_1(x, u_n) u_n d\sigma - \int_{\partial\Omega} G_1(x, u_n) d\sigma\right) + \\ &\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\beta+1}\right) \int_{\partial\Omega} h(x) |u_n|^{\beta+1} d\sigma \geq \\ &\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right) C_0 \|u_n\|_b^p \end{aligned}$$

因此,可得序列 $\{u_n\}$ 是有界的.

然后,证明 $J(u)$ 满足(PS)条件.利用2个重要不等式,见文献[8]中的引理4.10,取 $\xi, \zeta \in R$

$$\begin{cases} |\xi - \zeta|^p \leq C_1 (|\xi|^{p-2} \xi - |\zeta|^{p-2} \zeta) (\xi - \zeta), \\ \quad p \geq 2 \\ |\xi - \zeta|^2 \leq C_1 (|\xi|^{p-2} \xi - |\zeta|^{p-2} \zeta) (\xi - \zeta) \cdot \\ \quad (|\xi| + |\zeta|), \quad 1 < p < 2 \end{cases}$$

因此,当 $p \geq 2$ 时,有

$$\begin{aligned} \|u_m - u_k\|_b^p &= \int_{\Omega} a(x) |\nabla u_m - \nabla u_k|^p dx + \\ &\int_{\partial\Omega} b(x) |u_m - u_k|^p d\sigma \leq \\ &C_1 (\langle I'(u_m), u_m - u_k \rangle - \langle I'(u_k), u_m - u_k \rangle) \leq \\ &C_1 (\|F'(u_m)\|_{E^*} + \|F'(u_k)\|_{E^*} + \\ &|\lambda| \|F'_m(u_m) - F'_m(u_k)\|_{E^*} + \\ &\|F'_f(u_m) - F'_f(u_k)\|_{E^*} + \|F'_h(u_m) - \\ &F'_h(u_k)\|_{E^*}) (\|u_m - u_k\|_b) \end{aligned}$$

当 $1 < p < 2$ 时,由文献[5]中的引理3可得

$$\|u_m - u_k\|_b^2 \leq C' |\langle F'(u_m), u_m - u_k \rangle - \langle F'(u_k), u_m - u_k \rangle|$$

利用 F'_m, F'_f, F'_h 的紧性和 $J'(u_n) \rightarrow 0$, 显然可得 $\{u_n\}$ 存在1个柯西序列.则 $J(u)$ 满足(PS)条件.

最后,证明问题(1)存在2个非平凡解.先验证 J 满足山路引理的2个几何条件:

a. 取 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 和 $t \in R^+$, 有

$$\begin{aligned} J(t\varphi) &= \frac{1}{p} t^p \|\varphi\|_b^p - \frac{\lambda t^p}{p} \int_{\Omega} m(x) |\varphi|^p dx - \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \\ &\int_{\partial\Omega} f(x) |\varphi|^{\alpha+1} d\sigma - \frac{t^{\beta+1}}{\beta+1} \int_{\partial\Omega} h(x) |\varphi|^{\beta+1} d\sigma \quad (3) \end{aligned}$$

显然,当 t 充分大时, $J(t\varphi) < 0$.

b. 假定存在一个 $r > 0$, 使得对于所有的 $u \in$

$\partial B_r(0)$, 有 $J(u) > 0$. 事实上

$$\begin{aligned} J(u) |_{\|u\|_b=r} &\geq \frac{C_0}{p} \|u\|_b^p - \frac{1}{\alpha+1} A^{\alpha+1} \|f\|_{p_0} \cdot \\ &\|u\|_b^{\alpha+1} - \frac{1}{\beta+1} A^{\beta+1} \|h\|_{q_0} \|u\|_b^{\beta+1} = \\ &\frac{C_0}{p} r^p \left(1 - \frac{p}{C_0(\alpha+1)} A^{\alpha+1} \|f\|_{p_0} r^{\alpha+1-p} - \right. \\ &\left. \frac{p}{C_0(\beta+1)} A^{\beta+1} \|h\|_{q_0} r^{\beta+1-p}\right) := \frac{C_0}{p} r^p G(r) \end{aligned}$$

显然, $G(r)$ 在

$$r_0 = \frac{1}{A} \left[\frac{(\beta+1)(p-\alpha-1) \|f\|_{p_0}}{(\alpha+1)(\beta+1-p) \|h\|_{q_0}} \right]^{\frac{1}{p-\alpha}}$$

处取得极大值,且 $G(r_0) > 0$, 从而可得 $J(u) |_{\|u\|_b=r} > 0$, 故假设成立.

因此,可得山路引理的所有条件满足,则 $J(\cdot)$ 存在临界点,且为 u_1 , 则 $J(u_1) > 0$. 又由式(3)可知,当 $t > 0$ 充分小时, $J(t\varphi) < 0$, 因此, $J(\cdot)$ 可以在某些点处取得局部极小值,记为 $u_2, u_2 \in B_r(0) \cap \Omega$, 即 $J(u_2) = \inf_{v \in B_r(0) \cap \Omega} J(v) < 0$.

综上所述,问题(1)至少存在2个非平凡解.

参考文献:

- [1] Rossi J D. Elliptic problems with nonlinear boundary conditions and the Sobolev trace theorem[M]. New York: Elsevier, 2005.
- [2] Druet O, Hebey E. Elliptic equations of Yamabe type [J]. International Mathematics Research Surveys, 2005, 1(1): 1-113.
- [3] Yu L S. Nonlinear p -Laplacian problems on unbounded domains[J]. Proc American Mathematical Soc, 1992, 115(4): 1037-1045.
- [4] Momtufusco E, Radulescu V. Nonlinear eigenvalue problems for quasilinear operators on unbounded domains[J]. Nonlinear Differ Equ Appl, 2001, 8(2): 481-497.
- [5] Filippucci R, Pucci P, Radulescu V. Existence and non-existence results for quasilinear elliptic exterior problems with nonlinear boundary conditions [J]. Comm Partial Differ Equations, 2008, 33(3): 706-717.
- [6] Pfluger K. Compact traces in weighted Sobolev spaces [J]. Analysis, 1998, 18(1): 65-83.
- [7] Pfluger K. Existence and multiplicity of solutions to a p -Laplacian equation with nonlinear boundary conditions [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 1998(10): 1-13.
- [8] Diaz J I. Nonlinear partial differential equations and free boundaries[M]// Research Notes in Mathematics. Boston: Prentice Hall, 1986.

(编辑:石 瑛)