

文章编号:1007-6735(2013)06-0511-05

分数阶脉冲微分方程反周期边值问题解的存在性

刘锡平, 方海琴, 林乐刚

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了一类具有 Caputo 分数导数的分数阶脉冲微分方程反周期边值问题解的存在性与唯一性. 首先, 运用分析的方法计算出边值问题的 Green 函数, 并讨论了 Green 函数的性质; 其次, 将微分方程边值问题转化为积分算子方程, 利用不动点理论及压缩映射原理, 得到了关于反周期边值问题解的存在性及唯一性的多个新结论. 特别地, 研究的边值问题在脉冲条件和边界条件中都涉及状态变量的分数阶导数.

关键词: 分数阶微分方程; 反周期边值问题; 不动点定理

中图分类号: O 175.8 **文献标志码:** A

Existence of Solution for Impulsive Anti-periodic Boundary Value Problem of Fractional Differential Equation

LIU Xi-ping, FANG Hai-qin, LIN Le-gang

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The existence and uniqueness of solutions were studied for anti-periodic boundary value problem of impulsive fractional differential equation with Caputo fractional derivative. The Green's function of the boundary value problem was calculated by means of the analysis method and the properties of the Green's function were also discussed. The boundary value problem of fractional differential equation was then transformed into an integral operator equation, and by using fixed point theorem and contraction mapping principle, some new results for the existence and uniqueness of the anti-periodic solution for boundary value problem were obtained. In particular, it can be seen the fractional derivative of state variables is involved in both the impulse and boundary conditions of the boundary value problem discussed.

Key words: *fractional differential equation; anti-periodic boundary value problem; fixed point theorem*

1 问题的提出

近年来, 脉冲微分方程边值问题在不同学科、不

同领域都有广泛的应用, 其理论研究取得了许多有意义的结果(见文献[1-5]及其参考文献). 随着科学技术的不断发展, 在现代科学中提出了大量的分数阶微分方程模型, 分数阶微分方程理论研究与应用

收稿日期: 2013-03-10

基金项目: 上海市教委科研创新基金重点资助项目(10ZZ93); 国家自然科学基金资助项目(11171220)

第一作者: 刘锡平(1962-), 男, 教授. 研究方向: 常微分方程理论及应用. E-mail: xipingliu@usst.edu.cn

用研究越来越受到人们的高度重视(见文献[6-14]及其参考文献).文献[5]讨论了一阶脉冲微分方程反周期边值问题解的存在性,文献[9-10]分别讨论了分数阶脉冲微分方程反周期边值问题解的存在性,其边界条件和脉冲点均不涉及未知函数的分数阶导数.

现研究一类边界条件和脉冲点都涉及状态变量的分数阶导数的分数阶微分方程反周期边值问题

$$\left. \begin{aligned} {}^c D_{0+}^\alpha u(t) &= f(t, u(t)), t \in J' \\ \Delta u|_{t=t_k} &= I_k(u(t_k)), \\ \Delta {}^c D_{0+}^\beta u|_{t=t_k} &= Q_k(u(t_k)), k=1, 2, \dots, p \\ u(0) &= -u(T), {}^c D_{0+}^\beta u(0) = -{}^c D_{0+}^\beta u(T) \end{aligned} \right\} (1)$$

解的存在性.其中, $1 < \alpha < 2, 0 < \beta < \alpha - 1, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = T, J_0 = [0, t_1], J_1 = (t_1, t_2], \dots, J_p = (t_p, T], J = [0, T], J' = J \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_p\}$, ${}^c D_{0+}^\alpha$ 为 Caputo 分数导数, $f \in C(J \times R, R)$, $I_k, Q_k \in C(R, R)$, $\Delta u|_{t=t_k} = u(t_k^+) - u(t_k^-)$, $\Delta {}^c D_{0+}^\beta u|_{t=t_k} = {}^c D_{0+}^\beta u(t_k^+) - {}^c D_{0+}^\beta u(t_k^-)$, $u(t_k^+)$ 和 $u(t_k^-)$ 分别为 $u(t)$ 在 $t = t_k$ 处的右极限和左极限.

利用不动点定理和压缩映射原理得到了反周期边值问题(1)解的存在性与唯一性定理.与现有文献所不同的是,在本文所研究的系统中,脉冲点与边界条件都涉及到状态变量的分数阶导数.

2 预备知识

引理 1^[15] (Schaefer 不动点定理) 设 S 为线性赋范空间, 算子 $\Phi: S \rightarrow S$ 为紧算子, 若集合 $H(\Phi) = \{x \in S | x = \mu\Phi(x), 0 < \mu < 1\}$ 有界, 则 Φ 在 S 中有唯一不动点.

引理 2^[15] (Krasnoselskii's 不动点定理) M 是 Banach 空间 E 上的一个非空有界闭凸集, 如果算子 A, B 满足:

- 任意 $x, y \in M, Ax + By \in M$;
- A 是一个压缩映射, B 是紧且连续的.

则存在 $z \in M$, 使得 $z = Az + Bz$.

引理 3^[15] 设 E 为 Banach 空间, Ω 是 E 中的一个开子集, $\theta \in \Omega, F: \bar{\Omega} \rightarrow E$ 为紧算子, 若对任意 $u \in \partial\Omega$, 有 $\|Fu\| \leq \|u\|$, 则 F 在 Ω 中有不动点.

引理 4^[14] 设 $1 < \alpha < 2, h \in C([0, 1])$, 则 u 是

$$\begin{cases} {}^c D_{0+}^\alpha u(t) = h(t), & t \in [0, 1] \\ u(t_0) = u_0, & 0 < t_0 < 1 \end{cases}$$

的解, 当且仅当 u 是积分方程

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t_0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_0} (t_0 - s)^{\alpha-1} h(s) ds + \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} h(s) ds + c(t - t_0), \\ c &\in R \end{aligned}$$

的解.

运用分析方法, 结合引理 4 不难得到引理 5.

引理 5 设 $y \in C[0, T], 1 < \alpha < 2$, 则线性微分方程的反周期边值问题

$$\left. \begin{aligned} {}^c D_{0+}^\alpha u(t) &= y(t), t \in J' \\ \Delta u|_{t=t_k} &= I_k(u(t_k)), \\ \Delta {}^c D_{0+}^\beta u|_{t=t_k} &= Q_k(u(t_k)), k=1, 2, \dots, p \\ u(0) &= -u(T), {}^c D_{0+}^\beta u(0) = -{}^c D_{0+}^\beta u(T) \end{aligned} \right\} (2)$$

存在唯一解 $u(t)$, 并且 $u(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^T G(t, s) y(s) ds + \frac{T^{\beta-1}(T-2t)\Gamma(2-\beta)}{2\Gamma(\alpha-\beta)} \cdot \\ &\quad \int_0^T (T-s)^{\alpha-\beta-1} y(s) ds + \\ &\quad \frac{1}{2} \left(\sum_{0 < t_k < t} I_k(u(t_k)) - \sum_{t \leq t_k < T} I_k(u(t_k)) \right) + \\ &\quad \frac{\Gamma(2-\beta)}{2} \left(\sum_{t \leq t_k < T} t_k^\beta Q_k(u(t_k)) - \sum_{0 < t_k < t} t_k^\beta Q_k(u(t_k)) - \right. \\ &\quad \left. 2t \sum_{t \leq t_k < T} t_k^{\beta-1} Q_k(u(t_k)) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$G(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} - \frac{1}{2}(T-s)^{\alpha-1}, & 0 \leq s \leq t \leq T \\ -\frac{1}{2}(T-s)^{\alpha-1}, & 0 \leq t < s \leq T \end{cases}$$

由 G 的表达式, 结合分析的方法, 易得引理 6.

引理 6 如果 $s \in [0, T]$, 那么

$$\max_{t \in [0, T]} |G(t, s)| \leq \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} (T-s)^{\alpha-1}$$

定义 $PC(J, R) = \{u: J \rightarrow R | u \in C(J_k), u(t_k^+) \text{ 存在}, k=0, 1, 2, \dots, p\}$, 其范数 $\|u\| = \sup_{t \in J} |u(t)|$,

则 $PC(J, R)$ 为 Banach 空间. 定义算子 $F: PC(J, R) \rightarrow PC(J, R)$, 对任意 $u \in PC(J, R)$, 令

$$\begin{aligned}
(Fu)(t) = & \int_0^T G(t,s)f(s,u(s))ds + \\
& \frac{T^{\beta-1}(T-2t)\Gamma(2-\beta)}{2\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\beta-1} \cdot \\
& f(s,u(s))ds + \frac{\Gamma(2-\beta)}{2} \left(\sum_{t_k \leq t_k < T} t_k^\beta Q_k(u(t_k)) - \right. \\
& \left. \sum_{0 < t_k < t} t_k^\beta Q_k(u(t_k)) - 2t \sum_{t_k \leq t_k < T} t_k^{\beta-1} Q_k(u(t_k)) \right) + \\
& \frac{1}{2} \left(\sum_{0 < t_k < t} I_k(u(t_k)) - \sum_{t_k \leq t_k < T} I_k(u(t_k)) \right) \quad (4)
\end{aligned}$$

引理7 F 是全连续算子.

证明 设 $D \subset PC(J, R)$ 是有界集, 则根据 f, I_k, Q_k 的连续性可得, 存在常数 $M_i > 0, i = 1, 2, 3$, 使得对任意的 $u \in D$, 有 $|f(t, u)| \leq M_1, |I_k(u)| \leq M_2, |Q_k(u)| \leq M_3$, 其中, $k = 1, 2, \dots, p$. 显然, $\max_{t \in [0, T]} |T-2t| = T$. 容易证明, 对任意 $t \in J$, 由式(4)有

$$\begin{aligned}
|(Fu)(t)| \leq & \frac{T^\alpha M_1}{2} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \right) + \\
& \frac{pM_2}{2} + \frac{3pM_3 T^\beta \Gamma(2-\beta)}{2}
\end{aligned}$$

从而 $F(D)$ 是一致有界的.

注意到 $G(t, s)$ 在 $[0, T] \times [0, T]$ 上是一致连续的, $F(D)$ 在每个 J_k 上等度连续, $k = 1, 2, \dots, p$. 根据 Arzela-Ascoli 定理可得 $F(D)$ 是紧的.

根据 $f, I_k, Q_k (k = 1, 2, \dots, p)$ 的连续性, 易得 F 是连续的.

综上所述, 可得 F 是全连续的.

3 解的唯一性

定理1 如果 $f(t, u)$ 在 $J \times R$ 上有界, $I_k(u), Q_k(u) (k = 1, 2, \dots, p)$ 在 R 上有界, 则反周期边值问题(1)存在唯一解.

证明 由已知, 记

$$\begin{aligned}
N_1 &= \sup_{t \in J, u \in R} |f(t, u)| \\
N_2 &= \max \left\{ \sup_{u \in R} |I_1(u)|, \right. \\
&\quad \left. \sup_{u \in R} |I_2(u)|, \dots, \sup_{u \in R} |I_p(u)| \right\} \\
N_3 &= \max \left\{ \sup_{u \in R} |Q_1(u)|, \right. \\
&\quad \left. \sup_{u \in R} |Q_2(u)|, \dots, \sup_{u \in R} |Q_p(u)| \right\}
\end{aligned}$$

由引理7可知, $F: PC(J, R) \rightarrow PC(J, R)$ 是全

连续的, 故 F 为紧算子. 所以, 只需证

$H(F) = \{u \in PC(J, R) \mid u = \mu Fu, 0 < \mu < 1\}$ 是有界的, 那么, 反周期边值问题(1)存在唯一解. 如果 $u \in H(F)$, 则

$$\begin{aligned}
|u(t)| &= \mu |Fu(t)| \leq \\
& \frac{T^\alpha N_1}{2} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \right) + \\
& \frac{pN_2}{2} + \frac{3pN_3 T^\beta \Gamma(2-\beta)}{2}, t \in J \\
\|u\| &\leq \frac{T^\alpha N_1}{2} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \right) + \\
& \frac{pN_2}{2} + \frac{3pN_3 T^\beta \Gamma(2-\beta)}{2}
\end{aligned}$$

所以, $H(F)$ 是有界的, 由引理1可知, 反周期边值问题(1)存在唯一解.

定理2 设对任意 $t \in J, u, v \in R$, 存在常数 $L_1 \geq 0, L_{2k} \geq 0, L_{3k} \geq 0$, 使得

$$\begin{aligned}
\text{a. } & |f(t, u) - f(t, v)| \leq L_1 |u - v|; \\
\text{b. } & |I_k(u) - I_k(v)| \leq L_{2k} |u - v|, |Q_k(u) - Q_k(v)| \leq L_{3k} |u - v|, k = 1, 2, \dots, p.
\end{aligned}$$

如果

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{T^\alpha L_1}{2} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \right) + \\
& \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p L_{2k} + \frac{\Gamma(2-\beta)}{2} \sum_{k=1}^p t_k^{\beta-1} (t_k + 2T) L_{3k} < 1
\end{aligned}$$

那么, 反周期边值问题(1)存在唯一解.

证明 因为, 对任意 $t \in J$,

$$\begin{aligned}
|(Fu)(t) - (Fv)(t)| &\leq \int_0^T \left(|G(t, s)| + \right. \\
& \quad \left. \frac{T^{\beta-1} |T-2t| \Gamma(2-\beta)^{(T-s)\alpha-\beta-1}}{2\Gamma(\alpha-\beta)} \right) \cdot \\
& \quad |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds + \\
& \quad \frac{1}{2} \left(\sum_{0 < t_k < t} |I_k(u(t_k)) - I_k(v(t_k))| + \right. \\
& \quad \left. \sum_{t_k \leq t_k < T} |I_k(u(t_k)) - I_k(v(t_k))| \right) + \\
& \quad T\Gamma(2-\beta) \sum_{t_k \leq t_k < T} t_k^{\beta-1} |Q_k(u(t_k)) - Q_k(v(t_k))| + \\
& \quad \frac{\Gamma(2-\beta)}{2} \left(\sum_{t_k \leq t_k < T} t_k^\beta |Q_k(u(t_k)) - Q_k(v(t_k))| + \right. \\
& \quad \left. \sum_{0 < t_k < t} t_k^\beta |Q_k(u(t_k)) - Q_k(v(t_k))| \right) \leq \\
& \quad \left[\frac{T^\alpha L_1}{2} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p L_{2k} + \right. \\
& \quad \left. \frac{\Gamma(2-\beta)}{2} \sum_{k=1}^p t_k^{\beta-1} (t_k + 2T) L_{3k} \right] \|u - v\| =
\end{aligned}$$

$$\gamma \|u - v\|$$

所以, $\|Fu - Fv\| \leq \gamma \|u - v\|$.

由于 $0 \leq \gamma < 1$, 所以, F 是压缩的. 根据压缩映像原理可得, 反周期边值问题(1)存在唯一解.

4 解的存在性

定理 3 设对任意 $t \in J, u, v \in R$, 存在常数 $\xi_1 \geq 0, \xi_{2k} \geq 0, \xi_{3k} \geq 0$, 使得

$$\text{a. } |f(t, u) - f(t, v)| \leq \xi_1 |u - v|;$$

$$\text{b. } |I_k(u)| \leq \xi_{2k} |u|, |Q_k(u)| \leq \xi_{3k} |u|, \\ k = 1, 2, \dots, p.$$

如果

$$\xi_0 = \frac{T^\alpha \xi_1}{2} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(2 - \beta)}{\Gamma(\alpha - \beta + 1)} \right) + \\ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \xi_{2k} + \frac{\Gamma(2 - \beta)}{2} \sum_{k=1}^p t_k^{\beta-1} (t_k + 2T) \xi_{3k} < 1$$

则反周期边值问题(1)至少存在一个解.

证明 记 $r_0 = \max_{s \in [0, T]} |f(s, 0)|$, 则 $r_0 \geq 0$. 取

$$r \geq \frac{T^\alpha r_0}{2(1 - \xi_0)} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(2 - \beta)}{\Gamma(\alpha - \beta + 1)} \right)$$

令 $\Omega = \{u \in PC(J, R) \mid \|u\| \leq r\}$, 则 Ω 为 $PC(J, R)$ 上的有界闭凸集.

定义算子 $A, B: \Omega \rightarrow PC(J, R)$ 分别为

$$(Au)(t) = \int_0^T G(t, s) f(s, u(s)) ds + \\ \frac{T^{\beta-1} (T - 2t) \Gamma(2 - \beta)}{2\Gamma(\alpha - \beta)} \cdot \\ \int_0^T (T - s)^{\alpha-\beta-1} f(s, u(s)) ds \\ (Bu)(t) = \frac{1}{2} \left(\sum_{0 < t_k < t} I_k(u(t_k)) - \sum_{t \leq t_k < T} I_k(u(t_k)) \right) + \frac{\Gamma(2 - \beta)}{2} \cdot \\ \left(\sum_{t \leq t_k < T} t_k^\beta Q_k(u(t_k)) - \sum_{0 < t_k < t} t_k^\beta Q_k(u(t_k)) - \right. \\ \left. 2t \sum_{t \leq t_k < T} t_k^{\beta-1} Q_k(u(t_k)) \right)$$

于是, 对于任意 $u, v \in \Omega, t \in J$, 有

$$|(Au)(t) - (Av)(t)| \leq \\ \int_0^T |G(t, s)| |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds + \\ \frac{T^{\beta-1} |T - 2t| \Gamma(2 - \beta)}{2\Gamma(\alpha - \beta)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-\beta-1} \cdot$$

$$|f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \leq \\ \frac{T^\alpha \xi_1}{2} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(2 - \beta)}{\Gamma(\alpha - \beta + 1)} \right) \|u - v\|$$

由于

$$\frac{T^\alpha \xi_1}{2} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(2 - \beta)}{\Gamma(\alpha - \beta + 1)} \right) < 1$$

所以, A 是一个压缩映射.

取 $u_0 = 0$, 那么

$$|(Au)(t) + (Bv)(t)| \leq \\ |(Au)(t) - (Au_0)(t)| + |(Au_0)(t)| + \\ |(Bv)(t)| \leq \frac{T^\alpha \xi_1}{2} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(2 - \beta)}{\Gamma(\alpha - \beta + 1)} \right) \cdot \\ \|u\| + \frac{T^\alpha r_0}{2} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(2 - \beta)}{\Gamma(\alpha - \beta + 1)} \right) + \\ \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \xi_{2k} + \frac{\Gamma(2 - \beta)}{2} \sum_{k=1}^p t_k^{\beta-1} (t_k + 2T) \xi_{3k} \right] \|u\| \leq \\ \xi_0 \|u\| + \frac{T^\alpha r_0}{2} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(2 - \beta)}{\Gamma(\alpha - \beta + 1)} \right) \leq r$$

则 $\|Au + Bv\| \leq r$, 因此, $Au + Bv \in \Omega$.

又因为算子 F 是全连续的, 所以, 易知 B 是紧的、连续的, 由引理 2 可知, 反周期边值问题(1)至少存在一个解.

定理 4 设存在常数 $\eta_1 > 0, \eta_{2k} > 0, \eta_{3k} > 0$, 使得

$$\limsup_{u \rightarrow 0} \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{f(t, u)}{u} \right| < \eta_1 \\ \limsup_{u \rightarrow 0} \left| \frac{I_k(u)}{u} \right| < \eta_{2k} \\ \limsup_{u \rightarrow 0} \left| \frac{Q_k(u)}{u} \right| < \eta_{3k}, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

如果

$$\eta_0 = \frac{T^\alpha \eta_1}{2} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(2 - \beta)}{\Gamma(\alpha - \beta + 1)} \right) + \\ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \eta_{2k} + \frac{\Gamma(2 - \beta)}{2} \sum_{k=1}^p t_k^{\beta-1} (t_k + 2T) \eta_{3k} \leq 1$$

则反周期边值问题(1)至少存在一个解.

证明 因为 $\limsup_{u \rightarrow 0} \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{f(t, u)}{u} \right| < \eta_1$,

$$\limsup_{u \rightarrow 0} \left| \frac{I_k(u)}{u} \right| < \eta_{2k}, \quad \limsup_{u \rightarrow 0} \left| \frac{Q_k(u)}{u} \right| < \eta_{3k}, \\ k = 1, 2, \dots, p, \text{ 则存在常数 } r > 0, \text{ 使得当 } 0 \leq \|u\| \leq r \text{ 时, 有}$$

$$|f(t, u)| \leq \eta_1 |u|, |I_k(u)| \leq \eta_{2k} |u|, \\ |Q_k(u)| \leq \eta_{3k} |u|, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

定义 $\Omega = \{u \in PC(J, R) \mid \|u\| < r\}$, 则 Ω 为 $PC(J, R)$ 中的开集, 且 $\theta \in \Omega$. 对任意 $u \in \partial\Omega$, 则 $\|u\| = r$, 并且

$$\|Fu\| \leq \left[\frac{T^\alpha \eta_1}{2} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \eta_{2k} + \frac{\Gamma(2-\beta)}{2} \sum_{k=1}^p t_k^{\beta-1} (t_k + 2T) \eta_{3k} \right] \cdot \|u\| = \eta_0 \|u\| \leq \|u\|$$

由引理 7 可得 F 是紧算子, 所以, 根据引理 3 可得反周期边值问题(1)至少存在一个解.

参考文献:

- [1] 贾梅, 刘锡平. 二阶脉冲微分方程积分边值问题多个非负解的存在性[J]. 吉林大学学报(理学版), 2011, 49(4): 594-600.
- [2] 卢振花, 刘锡平, 沈立. 二阶脉冲微分方程组四点边值问题非负解的存在性[J]. 上海理工大学学报, 2011, 33(1): 179-183.
- [3] 苗春梅, 葛渭高, 张佳妮. 带有积分边界条件的一阶脉冲微分方程奇异边值问题[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(15): 182-186.
- [4] Tian Yu, Ge Weigao. Multiple solutions of impulsive Sturm-Liouville boundary value problem via lower and upper solutions and variational methods[J]. J Math Anal Appl, 2012, 387(2): 475-489.
- [5] Ahmad B, Nieto J J. Existence and approximation of solutions for a class of nonlinear impulsive functional differential equations with anti-periodic boundary conditions[J]. Nonlinear Anal, 2008, 69(10): 3291-3298.
- [6] Podlubny I. Fractional differential equations[M]. San Diego: Academic Press, 1999.
- [7] Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J. Theory and applications of fractional differential equations[M]. San Diego: Elsevier Science Ltd, 2006.
- [8] 陈文, 孙洪广, 李西成. 力学与工程问题的分数阶导数建模[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [9] Wang Guotao, Ahmad B, Zhang Lihong. Impulsive antiperiodic boundary value problem for nonlinear differential equations of fractional order[J]. Nonlinear Anal, 2011, 74(3): 792-804.
- [10] Ahmad B, Sivasundaram S. Existence results for nonlinear impulsive hybrid boundary value problems involving fractional differential equations [J]. Nonlinear Anal, Hybrid Systems, 2009, 3(3): 251-258.
- [11] Jia Mei, Liu Xiping. Three nonnegative solutions for fractional differential equations with integral boundary conditions[J]. Comput Math Appl, 2011, 62(3): 1405-1412.
- [12] Liu Xiping, Jia Mei. Multiple solutions for fractional differential equations with nonlinear boundary conditions[J]. Comput Math Appl, 2010, 59(8): 2880-2886.
- [13] 金京福, 刘锡平, 窦丽霞, 等. 分数阶微分方程积分方程边值问题正解存在性[J]. 吉林大学学报(理学版), 2011, 49(5): 823-828.
- [14] 方海琴, 刘锡平, 林乐刚. 分数阶微分方程反周期边值问题解的存在性[J]. 山东大学学报(理学版), 2012, 47(6): 5-9.
- [15] 孙经先. 非线性泛函分析及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

(编辑: 石 瑛)