

文章编号:1007-6735(2013)06-0516-07

一类耦合的 KdV 型方程的周期解

丁丽娟, 魏公明

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 讨论了一类耦合的 KdV 方程在一定条件下周期解的存在性. 利用 Sobolev 不等式, 给出了此方程解的估计以及它们的一二三阶导数的估计, 然后根据 Galerkin 近似解及其先验估计, 得到了耦合 KdV 方程弱解的局部存在性.

关键词: KdV 方程; 周期解; Galerkin 近似解; 先验估计

中图分类号: O 175.2 **文献标志码:** A

Periodic Solution of a Class of Coupled KdV Equation

DING Li-juan, WEI Gong-ming

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The existence of periodic solution of a class of coupled KdV equation was discussed. By using Sobolev inequality, the estimates of solutions and the estimates of first-order, second-order and third-order derivatives were obtained. Then by using Galerkin approximate solution and its prior estimate, the local existence of weak solution of KdV equation was testified.

Key words: KdV equation; periodic solution; Galerkin approximate solution; prior estimate

水平底部的最简单经典浅水波耦合方程是

$$\begin{cases} u_t + uu_x + gv_x = 0 \\ v_t + (uv)_x = 0 \end{cases}$$

最早出现于文献[1]中, 其中 x 表示平面坐标, t 为时间, $u = u(x, t)$ 为 (x, t) 处的水平方面的运动速度, $v = v(x, t)$ 为时间 t 时 x 处的自由表面的高度. 之后出现了很多变形, 如 Hirota^[2] 提出耦合方程

$$\begin{cases} u_t - 6\alpha uu_x - 2\beta vv_x - \alpha u_{xxx} = 0 \\ v_t + 3uv_x + v_{xxx} = 0 \end{cases}$$

Ito^[3] 提出耦合非线性方程

$$\begin{cases} u_t - buu_x - 2vv_x - u_{xxx} = 0 \\ v_t + 2(uv)_x = 0 \end{cases}$$

Guo 等^[4] 讨论了具有耗散项的非线性耦合 KdV 方程

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x - \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + \\ 2vv_x = G_1(u, v) + h_1(x) \\ v_t - ru_{xx} + (2uv)_x = G_2(u, v) + h_2(x) \end{cases}$$

并且指出方程周期解全局吸引子的存在性, 利用一致先验估计得到全局吸引子的 Hausdorff 和 fractal 维数的上界估计; 在此基础上, Fang 和房少梅等^[5-7] 讨论了此具有耗散项的非线性 KdV 方程的全局吸引子和整体周期解、整体边值解的存在性; Kuznetsov^[8] 利用 weierstrass 椭圆函数求出它的周期解与孤波解.

收稿日期: 2013-02-27

第一作者: 丁丽娟(1988-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: dinglijuan0212@163.com

通讯作者: 魏公明(1974-), 男, 副教授. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: gmweixy@163.com

本文研究一类耦合 KdV 型方程

$$u_t + G_1(v)_x + F_1(u)_x + \beta u_{xxx} = k_1 u_{xx} \quad (1)$$

$$v_t + \delta(uv)_x + G_2(v)_x + F_2(u)_x = k_2 v_{xx} \quad (2)$$

记号说明

$$G_1(v) = \frac{\alpha}{2} v^2 + g_1 v, g_1 = \alpha D$$

$$G_2(v) = \frac{\varepsilon}{2} v^2 + g_2 v, g_2 = \varepsilon D$$

$$F_1(u) = \frac{\beta_1}{2} u^2 + \frac{\beta_2}{3} u^3, F_2(u) = f_2 u, f_2 = \delta D$$

周期初始条件

$$\left. \begin{aligned} u|_{t=0} &= u_0(x), v|_{t=0} = v_0(x), 0 \leq x \leq 1 \\ u(x+1, t) &= u(x, t), v(x+1, t) = \\ v(x, t), \forall x, t \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中, $\alpha, \varepsilon, D, \beta_1, \beta_2$ 为实常数; k_1, k_2 为耗散系数且 $k_1 > 0, k_2 > 0$.

刘小华^[9]研究了此类方程的柯西问题, 笔者将从周期问题着手研究方程, 此课题的研究方法来源于文献^[10].

区间说明: $I = [0, 1], R = (-\infty, +\infty)$

本文的主要结论:

定理 1 若 $u_0(x), v_0(x) \in W^{3,2}(I)$, 对于任意的正数 T , 那么周期初值问题存在以 $u_0(x), v_0(x)$ 为初值的弱解, 且满足 $u(x, t), v(x, t) \in W^{3,2}(I)$ ($t \in [0, T], x \in [0, 1]$).

1 积分估计

周期初值问题的解 $u = u(x, t), v = v(x, t)$ 满足式(1)和式(2), $u(x, t) \in C^2, v(x, t) \in C^2, u_{xxx} \in L^2, v_{xxx} \in L^2$ 满足周期初始条件式(3). (由周期条件 $u(x, t) = u(x+1, t), v(x, t) = v(x+1, t)$ 可知, $\forall x, t$, 初始函数 $u_0(x), v_0(x)$ 应要求为在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有周期 1 的函数). 下面引理都是假设 $u(x, t), v(x, t)$ 是以 $u_0(x), v_0(x)$ 为初值的光滑的整体周期解.

定义

$$\|u(t)\|_{L_\infty} = \sup_x |u(x, t)|$$

$$(f, g) = \int_0^1 f(x, t)g(x, t)dx$$

$$\|u(t)\|_{L_2}^2 = \int_0^1 u^2(x, t)dx$$

下面区间若没有特别说明, $x \in I[0, 1], t \in [0, T]$.

引理 1 (Sobolev 不等式) 给定 $\varepsilon > 0, n$, 存在

常数 ε_0 依赖于 ε_1 和 n , 使得

$$\left\| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right\|_{L_\infty} \leq \varepsilon_0 \|u\|_{L_2} + \varepsilon_1 \left\| \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right\|_{L_2} \quad k < n$$

$$\left\| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right\|_{L_2} \leq \varepsilon_0 \|u\|_{L_2} + \varepsilon_1 \left\| \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right\|_{L_2} \quad k \leq n$$

引理 2 对于任意 $T > 0, u_0(x), v_0(x) \in L^2, \alpha, \delta$ 同号, 则存在与 k_1, k_2 无关的常数 C , 使得

$$\|u\|_{L_2}^2 + \|v\|_{L_2}^2 \leq C$$

其中, C 仅与 $\|u_0\|_{L_2}, \|v_0\|_{L_2}, \alpha, \delta, T$ 有关.

证明 对方程(1)在区间 $[0, 1]$ 与 u 积分, 有

$$(u, u_t + G_1(v)_x + F_1(u)_x + \beta u_{xxx} - k_1 u_{xx}) = 0$$

$$\text{且 } (u, u_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L_2}^2$$

$$(u, F_1(u)_x) = 0, (u, \beta u_{xxx}) = 0$$

$$(u, u_{xx}) = -\|u_x\|_{L_2}^2, (u, G_1(v)_x) = -(u_x, G_1(v))$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L_2}^2 + k_1 \|u_x\|_{L_2}^2 +$$

$$\alpha(u, vv_x) - \alpha D(u_x, v) = 0 \quad (4)$$

由于

$$(v, v_t + \delta(uv)_x + G_2(v)_x + F_2(u)_x - k_2 v_{xx}) = 0 \quad (5)$$

且

$$(v, v_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{L_2}^2, (v, G_2(v)_x) = 0$$

$$(v, v_{xx}) = -\|v_x\|_{L_2}^2, (v, F_2(u)_x) = -(v_x, F_2(u))$$

$$\text{所以, } \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{L_2}^2 + k_2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{L_2}^2 +$$

$$\delta((uv)_x, v) - \delta D(v_x, u) = 0.$$

利用式(4)和式(5)以及 $((uv)_x, v) = -(u, vv_x), (v_x, u) = -(v, u_x)$, 不难得到

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|u\|_{L_2}^2 + \frac{\alpha}{\delta} \|v\|_{L_2}^2 \right] +$$

$$k_1 \|u_x\|_{L_2}^2 + \frac{\alpha k_2}{\delta} \|v_x\|_{L_2}^2 = 0$$

对于任意 $T > 0$, 将上式从 0 到 T 积分有

$$\|u\|_{L_2}^2 + \frac{\alpha}{\delta} \|v\|_{L_2}^2 +$$

$$2 \int_0^T \left[k_1 \|u_x\|_{L_2}^2 + \frac{\alpha k_2}{\delta} \|v_x\|_{L_2}^2 \right] dt =$$

$$\|u_0\|_{L_2}^2 + \frac{\alpha}{\delta} \|v_0\|_{L_2}^2 < \infty$$

$$\text{所以, } \|u\|_{L_2}^2 + \frac{\alpha}{\delta} \|v\|_{L_2}^2 \leq \|u_0\|_{L_2}^2 +$$

$$\frac{\alpha}{\delta} \|v_0\|_{L_2}^2 < \infty.$$

即结论成立, 且 C 仅与 $\|u_0\|_{L_2}, \|v_0\|_{L_2}, \alpha, \delta, T$ 有关.

引理3 若满足引理2的条件,且对于任意的 $T>0, u_{0x}, v_{0x} \in L_2$, 则存在与 k_1, k_2 无关的常数 C , 使得

$$\|u_x\|_{L_2}^2 + \|v_x\|_{L_2}^2 \leq C$$

其中, C 与 $\|u_{0x}\|_{L_2}, \|v_{0x}\|_{L_2}, \|u\|_{L_2}, \|v\|_{L_2}, \alpha, \delta, T, \beta, \beta_1, \beta_2, \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_0, D$ 有关, $\varepsilon_1, \varepsilon_0$ 为引理1中的常数.

证明 $(u_{xx}, u_t + G_1(v)_x + F_1(u)_x + \beta u_{xxx} - k_1 u_{xx}) = 0$

且

$$(u_{xx}, u_t) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{L_2}^2$$

$$(u_{xx}, G_1(v)_x) = (u_{xx}, \alpha v v_x) + (u_{xx}, \alpha D v_x)$$

又

$$\begin{aligned} |(u_{xx}, \alpha v v_x)| &\leq |\alpha| \|v_x\|_{L_\infty} \|u_{xx}\|_{L_2} \|v\|_{L_2} \leq \\ &C |\alpha| \|u_{xx}\|_{L_2} (\varepsilon_0 \|v\|_{L_2} + \varepsilon_1 \|v_{xx}\|_{L_2}) \leq \\ &\varepsilon_0 C |\alpha| \|u_{xx}\|_{L_2} + \varepsilon_1 C |\alpha| \|u_{xx}\|_{L_2}^2 + \\ &\varepsilon_1 C |\alpha| \|v_{xx}\|_{L_2}^2 \leq C(\varepsilon_1, \|v\|_{L_2}^2, \varepsilon_0) \\ &(\|u_{xx}\|_{L_2}^2 + \|v_{xx}\|_{L_2}^2) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(u_{xx}, \alpha D v_x)| &\leq |\alpha| |D| \|v_x\|_{L_2} \|u_{xx}\|_{L_2} \leq \\ &C(\alpha, D, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \|u\|_{L_2}^2, \|v\|_{L_2}^2) (\|u_{xx}\|_{L_2}^2 + \\ &\|v_{xx}\|_{L_2}^2) + \frac{1}{2} (u_{xx}, F_1(u)_x) = (u_{xx}, \beta_1 u u_x) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u_{xx}, \beta_2 u^2 u_x) &\leq C(\|u\|_{L_2}, \beta_1, \beta_2, \\ &\varepsilon_0, \varepsilon_1) \|u_{xx}\|_{L_2}^2 + 1 \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} |(u_{xx}, \beta_1 u u_x)| &\leq |\beta_1| \|u_x\|_{L_\infty} \|u\|_{L_2} \|u_{xx}\|_{L_2} \leq \\ &C |\beta_1| \|u_{xx}\|_{L_2} (\varepsilon_0 \|u\|_{L_2} + \varepsilon_1 \|u_{xx}\|_{L_2}) \leq \\ &C(\varepsilon_1, \|u\|_{L_2}) \|u_{xx}\|_{L_2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(u_{xx}, \beta_2 u u_x)| &\leq |\beta_2| \|u_x\|_{L_\infty} \|u\|_{L_2}^2 \|u_{xx}\|_{L_2} \leq \\ &C |\beta_2| \|u_{xx}\|_{L_2} (\varepsilon_0 \|u\|_{L_2} + \varepsilon_1 \|u_{xx}\|_{L_2}) \leq \\ &C(\varepsilon_1, \|u\|_{L_2}) \|u_{xx}\|_{L_2} \end{aligned}$$

$$(u_{xx}, \beta u_{xxx}) = 0, (u_{xx}, -k_1 u_{xx}) = -k_1 \|u_{xx}\|_{L_2}^2$$

可以得到

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{L_2}^2 + k_1 \|u_{xx}\|_{L_2}^2 \leq$$

$$C(\varepsilon_1) (\|u_{xx}\|_{L_2}^2 + \|v_{xx}\|_{L_2}^2) + \frac{7}{2} \quad (6)$$

因为 $(v_{xx}, v_t + \delta(uv)_x + \varepsilon v v_x + \varepsilon D v_x + \delta D u_x - k_2 v_{xx}) = 0$, 且

$$(v_{xx}, v_t) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_x\|_{L_2}^2$$

$$|(v_{xx}, \delta(uv)_x)| = |-\delta(v_{xxx}, uv)| \leq$$

$$\begin{aligned} &|\delta| \|v\|_{L_\infty} |(v_{xx}, u_x)| \leq \\ &C(\delta, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \|v\|_{L_2}, \|u\|_{L_2}) (\|u_{xx}\|_{L_2}^2 + \\ &\|v_{xx}\|_{L_2}^2) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$|(v_{xx}, \varepsilon v v_x)| \leq C(\varepsilon, D, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \|u\|_{L_2}, \|v\|_{L_2})$$

$$\|v_{xx}\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2} |(v_{xx}, \delta D u_x)| \leq$$

$$\begin{aligned} &|\delta| |D| \|u_x\|_{L_2} \|v_{xx}\|_{L_2} \leq \\ &C(\delta, D, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \|u\|_{L_2}, \|v\|_{L_2}) \end{aligned}$$

$$(\|u_{xx}\|_{L_2}^2 + \|v_{xx}\|_{L_2}^2) + \frac{1}{2}$$

又因为 $(v_{xx}, -k_2 v_{xx}) = -k_2 \|v_{xx}\|_{L_2}^2$, 可以得到

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_x\|_{L_2}^2 + k_2 \|v_{xx}\|_{L_2}^2 \leq$$

$$C(\varepsilon_1) (\|u_{xx}\|_{L_2}^2 + \|v_{xx}\|_{L_2}^2) + \frac{3}{2} \quad (7)$$

式(6)加式(7), 有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_x\|_{L_2}^2 + k_1 \|u_{xx}\|_{L_2}^2 + \\ &k_2 \|v_{xx}\|_{L_2}^2 \leq C(\varepsilon_1) (\|u_{xx}\|_{L_2}^2 + \|v_{xx}\|_{L_2}^2) + 5 \end{aligned}$$

使 $k_1 > C(\varepsilon_1), k_2 > C(\varepsilon_1)$, 有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u_x\|_{L_2}^2 + \|v_x\|_{L_2}^2) \leq 5 \quad (8)$$

所以, 对任意的 $T>0$, 对式(8)从0到 T 积分有

$$\|u_x\|_{L_2}^2 + \|v_x\|_{L_2}^2 \leq \|u_{0x}\|_{L_2}^2 + \|v_{0x}\|_{L_2}^2 + 5T$$

知存在与 k_1, k_2 无关的常数 C , 使得

$$\|u_x\|_{L_2}^2 + \|v_x\|_{L_2}^2 \leq C$$

其中, C 仅与 $\|u_{0x}\|_{L_2}, \|v_{0x}\|_{L_2}, \|u\|_{L_2}, \|v\|_{L_2}, \alpha, \delta, T, \beta, \beta_1, \beta_2, \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_0, D$ 有关, 与 k_1, k_2 无关.

引理4 若满足引理3的条件, 且对于任意的 $T>0, u_{0xxx}, v_{0xxx} \in L_2$, 则存在与 k_1, k_2 无关的常数 C , 使得

$$\|u_{xxx}\|_{L_2}^2 + \|v_{xxx}\|_{L_2}^2 \leq C$$

其中, C 仅与 $\|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^2}, \|u\|_{H^1}, \|v\|_{H^1}, \alpha, \delta, T, \beta_1, \beta_2, \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_0, D$ 有关, 其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_0$ 为引理1中的常数.

证明 因为 $(u_{4x}, u_t + G_1(v)_x + F_1(u)_x + \beta u_{xxx} - k_1 u_{xx}) = 0$

$$\begin{aligned} &\text{其中, } u_{4x} = u_{xxxx}, \text{ 由于 } (u_{4x}, u_t) = \\ &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xxx}\|_{L_2}^2 \end{aligned}$$

$$(u_{4x}, G_1(v)_x) = (u_{4x}, \alpha v v_x) + (u_{4x}, \alpha D v_x) \cdot$$

$$|(u_{4x}, \alpha v v_x)| = |\alpha (v_x^2 + v v_{xx}, u_{xxx})| \leq$$

$$|\alpha| |(v_x^2, u_{xxx})| + |\alpha| |(v v_{xx}, u_{xxx})| \leq$$

$$|\alpha| \|u_{xxx}\|_{L_2} \|v_x\|_{L_2}^2 + |\alpha| \|u_{xxx}\|_{L_2} \|v\|_{L_\infty} \cdot$$

$$\|v_{xx}\|_{L_2} \leq C(\epsilon_1)(\|u_{xxx}\|_{L_2}^2 + \|v_{xxx}\|_{L_2}^2) + \frac{1}{2}|(u_{4x}, \alpha Dv_x)| = |-\alpha D(u_{xxx}, v_{xx})| \leq$$

$$|\alpha| \|D\| \|u_{xxx}\|_{L_2} \|v_{xx}\|_{L_2} \leq C(\epsilon_1)(\|u_{xxx}\|_{L_2}^2 + \|v_{xxx}\|_{L_2}^2) +$$

$$\frac{1}{2}|(u_{4x}, F_1(u)_x)| = |(u_{xxx}, F_1(u) +$$

$$F_1(u)u_{xx})| \leq \|F_1(u)\|_{L_\infty} \|u_{xxx}\|_{L_2} \|u_x\|_{L_2}^2 + \|F_1(u)\|_{L_\infty} \|u_x\|_{L_\infty} \|u_{xx}\|_{L_2}^2 \leq C(\epsilon_1) \|u_{xxx}\|_{L_2}^2$$

$$\text{又因为 } \beta(u_{4x}, u_{xxx}) = 0, -k_1(u_{4x}, u_{xxx}) = k_1 \|u_{xxx}\|_{L_2}^2$$

所以

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xx}\|_{L_2}^2 + k_1 \|u_{xxx}\|_{L_2}^2 \leq C(\epsilon_1)(\|u_{xxx}\|_{L_2}^2 + \|v_{xxx}\|_{L_2}^2) + 1 \quad (9)$$

$$\text{因为 } (v_{4x}, v_t + \delta(uv)_x + G_2(v)_x + F_2(u)_x - k_2 v_{xx}) = 0$$

由于

$$(v_{4x}, v_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_{xx}\|_{L_2}^2, (v_{4x}, \epsilon Dv_x) = 0$$

$$(v_{4x}, G_2(v)_x) = (v_{4x}, \epsilon vv_x) + (v_{4x}, \epsilon Dv_x)$$

$$(v_{4x}, \epsilon vv_x) \leq C(\epsilon_1) \|v_{xxx}\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2}$$

$$(v_{4x}, F_2(u)_x) = (v_{4x}, \delta Du_x) = (v_{xxx}, \delta Du_{xxx}) \leq$$

$$C(\epsilon_1)(\|u_{xxx}\|_{L_2}^2 + \|v_{xxx}\|_{L_2}^2) + \frac{1}{2}$$

$$|(v_{4x}, \delta(uv)_x)| \leq |\delta| |(u_{xxx}v + 2u_x v_x + uv_{xx}, v_{xxx})|$$

$$\leq C(\epsilon_1)(\|u_{xxx}\|_{L_2}^2 + \|v_{xxx}\|_{L_2}^2) + 1$$

$$\text{又因为 } -k_2(v_{4x}, v_{xx}) = k_2 \|v_{xxx}\|_{L_2}^2$$

故

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_{xx}\|_{L_2}^2 + k_2 \|v_{xxx}\|_{L_2}^2 \leq$$

$$C(\epsilon_1)(\|u_{xxx}\|_{L_2}^2 + \|v_{xxx}\|_{L_2}^2) + 2 \quad (10)$$

式(9)加式(10),有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|v_{xx}\|_{L_2}^2 + \|u_{xx}\|_{L_2}^2] + k_1 \|u_{xxx}\|_{L_2}^2 +$$

$$k_2 \|v_{xxx}\|_{L_2}^2 \leq C(\epsilon_1)(\|u_{xxx}\|_{L_2}^2 + \|v_{xxx}\|_{L_2}^2) + 3$$

使 $k_1 > C(\epsilon_1), k_2 > C(\epsilon_1)$, 有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u_{xx}\|_{L_2}^2 + \|v_{xx}\|_{L_2}^2) \leq 3$$

对于任意的 $T > 0$, 对上式从 0 到 T 积分后, 使得

$$\|u_{xx}\|_{L_2}^2 + \|v_{xx}\|_{L_2}^2 \leq C$$

其中, C 仅与 $\|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^2}, \|u\|_{H^1},$

$\|v\|_{H^1}, \alpha, \delta, T, \beta_1, \beta_2, \epsilon, \epsilon_1, \epsilon_0, D$ 有关.

引理 5 若满足引理 4 的条件, 则存在与 k_1, k_2 无关的常数 C , 使得

$$\|u\|_{L_\infty} \leq C, \|v\|_{L_\infty} \leq C$$

$$\|u_x\|_{L_\infty} \leq C, \|v_x\|_{L_\infty} \leq C$$

证明 由引理 1、引理 2、引理 3 及引理 4 易得.

引理 6 若满足引理 5 的条件, 且对于任意的 $T > 0, u_{0,xxx}, v_{0,xxx} \in L_2$ 则存在与 k_1, k_2 无关的常数, C 使得

$$\|u_{xxx}\|_{L_2}^2 + \|v_{xxx}\|_{L_2}^2 \leq C$$

其中, C 仅与 $\|u_0\|_{H^3}, \|v_0\|_{H^3}, \|u\|_{H^2}, \|v\|_{H^2}, \alpha, \delta, T, \beta_1, \beta_2, \epsilon, \epsilon_1, \epsilon_0, D$ 有关, ϵ_0, ϵ_1 为引理 1 中的常数.

证明 因为 $(u_{6x}, u_t + G_1(v)_x + F_1(u)_x + \beta u_{xxx} - k_1 u_{xx}) = 0$. 其中, $u_{6x} = u_{xxxxxx}$. 由于

$$(u_{6x}, u_t) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xxx}\|_{L_2}^2,$$

$$(u_{6x}, G_1(v)_x) = (u_{6x}, \alpha vv_x) + (u_{6x}, \alpha Dv_x)$$

$$|\alpha(u_{6x}, vv_x)| = |\alpha(u_{4x}, (vv_x)_{xx})| \leq$$

$$C(\epsilon_1)(\|u_{4x}\|_{L_2}^2 + \|v_{4x}\|_{L_2}^2) + \frac{1}{2}$$

$$|(u_{6x}, \alpha Dv_x)| = |(u_{xxx}, \alpha Dv_{4x})| \leq$$

$$C(\epsilon_1)(\|u_{4x}\|_{L_2}^2 + \|v_{4x}\|_{L_2}^2) + \frac{1}{2}$$

$$|(u_{6x}, F_1(u)_x)| = |(u_{4x}, F_1(u)_{xxx})| \leq$$

$$C(\epsilon_1) \|u_{4x}\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2}$$

$$\text{又由于 } |(u_{6x}, \beta u_{xxx})| = 0, -k_1(u_{6x}, u_{xx}) = -k_1(u_{4x}, u_{4x}) = -k_1 \|u_{4x}\|_{L_2}^2$$

所以得到

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xxx}\|_{L_2}^2 + k_1 \|u_{4x}\|_{L_2}^2 \leq$$

$$C(\epsilon_1)(\|u_{4x}\|_{L_2}^2 + \|v_{4x}\|_{L_2}^2) + \frac{3}{2} \quad (11)$$

$$(v_{6x}, v_t + \delta(uv)_x + G_2(v)_x + F_2(u)_x - k_2 v_{xx}) = 0$$

$$(v_{6x}, v_t) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_{xxx}\|_{L_2}^2$$

$$(v_{6x}, \delta(uv)_x) \leq |\delta| |(u_{xxx}v + 3u_{xx}v_x + 3uv_{xx} + uu_{xxx}, v_{4x})| \leq C(\epsilon_1)(\|u_{4x}\|_{L_2}^2 + \|v_{4x}\|_{L_2}^2) + 2$$

$$(v_{6x}, G_2(v)_x) = (v_{6x}, \epsilon vv_x) + (v_{6x}, \epsilon Dv_x)$$

$$|(v_{6x}, \epsilon vv_x)| \leq C(\epsilon_1)(\|u_{4x}\|_{L_2}^2 + \|v_{4x}\|_{L_2}^2) + \frac{1}{2},$$

$$(v_{6x}, \epsilon Dv_x) = 0, |(v_{6x}, F_2(u)_x)| = |(v_{6x}, \delta Du_x)| \leq$$

$$C(\epsilon_1)(\|u_{4x}\|_{L_2}^2 + \|v_{4x}\|_{L_2}^2) + 3$$

$$(v_{6x}, -k_2 v_{xx}) = -k_2 \|v_{4x}\|_{L_2}^2, \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_{xxx}\|_{L_2}^2 +$$

$$k_2 \|v_{4x}\|_{L_2}^2 \leq C(\epsilon_1)(\|u_{4x}\|_{L_2}^2 + \|v_{4x}\|_{L_2}^2) \quad (12)$$

式(11)加式(12), 有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u_{xxx}\|_{L_2}^2 + \|v_{xxx}\|_{L_2}^2) + k_1 \|u_{4x}\|_{L_2}^2 + k_2 \|v_{4x}\|_{L_2}^2 \leq C(\epsilon_1) (\|u_{4x}\|_{L_2}^2 + \|v_{4x}\|_{L_2}^2) + \frac{9}{2}$$

对于任意的 $T > 0$, 对上式从 0 到 T 积分后, 知存在与 k_1, k_2 无关的常数 C , 使得

$$\|u_{xxx}\|_{L_2}^2 + \|v_{xxx}\|_{L_2}^2 \leq C$$

引理 7 若满足引理 6 的条件, 存在与 k_1, k_2 无关的常数 C , 使得 $\|u_{xxx}\|_{L_\infty} \leq C, \|v_{xxx}\|_{L_\infty} \leq C$

证明 由引理 1、引理 2 和引理 6 易得.

2 局部解的存在性

采用 Galerkin 有限元法来证明局部解的存在性. 设微分方程

$$\left. \begin{aligned} u_t + G_1(v)_x + F_1(u)_x + \beta u_{xxx} &= k_1 u_{xx} \\ v_t + \delta(uv)_x + G_2(v)_x + F_2(u)_x &= k_2 v_{xx} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

周期条件

$$\left. \begin{aligned} u|_{t=0} &= u_0(x), v|_{t=0} = v_0(x) \\ u(x+1, t) &= u(x, t), v(x+1, t) = v(x, t) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

考虑式(13)和式(14)的广义解.

广义解: 寻求未知函数 $u(x, t) \in W^{1,2}(I)$, $v(x, t) \in W^{1,2}(I)$, $u_t \in L_2$, $v_t \in L_2$ 满足积分恒等式

$$\left. \begin{aligned} (u_t, \mu) - (G_1(v), D\mu) - (F_1(u), D\mu) + \beta(Du, D^2\mu) + k_1(Du, D\mu) &= 0 \\ (v_t, \mu) - \delta(uv, D\mu) - (G_2(v)_x, D\mu) - (F_2(u), D\mu) + k_2(Dv, D\mu) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\forall \mu \in W^{2,2}(I)$$

$$u(x+1, t) = u(x, t),$$

$$v(x+1, t) = v(x, t) \quad \forall x, t \quad (16)$$

$$u(x, t) \rightarrow u_0(x) (t \rightarrow 0),$$

$$v(x, t) \rightarrow v_0(x) (t \rightarrow 0) \quad (17)$$

于此 $I = [0, 1]$, $(u, v) = \int_0^1 u(x, t) v(x, t) dx$,

$$\|u\|_{L_2}^2 = (u, u)$$

$W^{L,p}$ 表示一切具有 L 阶广义导数 $\in L_p$ 的函数所组成的 Sobolev 空间. 选取 $\{w_j^h\}$ 为 N 维子空间 $S^4 \subset W^{4,2}(R)$ 的基函数, 这里 S^4 为 $\{x(x), x \in I; x(x)$ 周期扩张 $C^3(R)$, $x(x)$ 在区间 $[ih, (i+1)h]$ 为 5 次多项式 $i = 0, 1, \dots, N, Nh = 1, R$ 为实轴,

$$u^h = \sum_{j=1}^N a_j(t) w_j^h(x), v^h = \sum_{j=1}^N b_j(t) w_j^h(x).$$

Galerkin 有限元解: 寻求 $u^h = \sum_{j=1}^N a_j(t)$

$w_j^h(x), v^h = \sum_{j=1}^N b_j(t) w_j^h(x)$, 使之满足

$$\left(\frac{\partial u^h}{\partial t}, \mu_j \right) + (DG_1(v), \mu_j) + (DF_1(u), \mu_j) + (\beta u_{xxx}, \mu_j) - (k_1 u_{xx}, \mu_j) = 0 \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial v^h}{\partial t}, \mu_j \right) + (\delta(uv)_x, \mu_j) + (DG_2(v), \mu_j) + (DF_2(u), \mu_j) - (k_2 v_{xx}, \mu_j) = 0 \quad (19)$$

式中, $\mu_j = w_j^h - D^2 w_j^h \in W^{2,2}$, 由 $\{w_j^h\}$ 线性无关性, 导致 $\{\mu_j\}$ 的线性无关性, 由于 $w_j^h \in W^{4,2}(R)$ 在 $W^{1,2}(R)$ 中稠密, 故存在实常数 c_j, d_j , 使得

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^N c_j w_j^h &\rightarrow u_0(x) \\ \sum_{j=1}^N d_j w_j^h &\rightarrow v_0(x) \quad (\text{依 } W^{1,2}(R) \text{ 模}) \\ a_j(0) &= c_j \\ b_j(0) &= d_j \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

若 $u^h(a_j(t)), v^h(b_j(t))$ 满足式(18)~式(20), 则称 u^h, v^h 为定解问题式(13)和式(14)的有限元解.

非线性常微分方程组柯西问题式(18)~式(20)的解 $a_j(t), b_j(t)$ 是存在的, 因为

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u^h}{\partial t}, \mu_j \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^N a_j w_j^h, w_j^h - D^2 w_j^h \right) = \sum_{j=1}^N a'_j(t) [(w_j^h, w_j^h) + (Dw_j^h, Dw_j^h)] \\ \left(\frac{\partial v^h}{\partial t}, \mu_j \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^N b_j w_j^h, w_j^h - D^2 w_j^h \right) = \sum_{j=1}^N b'_j(t) [(w_j^h, w_j^h) + (Dw_j^h, Dw_j^h)] \end{aligned}$$

由于 $\{w_j^h\}$ 的线性无关性, 故 $\det[(w_j^h, w_j^h) + (Dw_j^h, Dw_j^h)] \neq 0$, 再由以下引理对 u^h, v^h 的先验估计, 可知存在式(18)~式(20)的解 $a_j(t), b_j(t)$.

引理 8 对任意的 $T > 0, u_0^h(x), v_0^h(x) \in L_2$, 则存在常数 C , 使得

$$\|u^h\|_{L_2}^2 + \|v^h\|_{L_2}^2 \leq C$$

证明 用 $a_j(t)$ 乘以 $(u_t^h + G_1(v^h)_x + F_1(u^h)_x + \beta u_{xxx}^h - k_1 u_{xx}^h, w_j^h) = 0$, 然后对 j 从 1 到 n 相加有 $(u_t^h + G_1(v^h)_x + F_1(u^h)_x + \beta u_{xxx}^h - k_1 u_{xx}^h, u^h) = 0$, 用 $b_j(t)$ 乘以 $(v_t^h + \delta(u^h v^h)_x + G_2(v^h)_x + F_2(u^h)_x - k_2 v_{xx}^h, w_j^h) = 0$, 然后对 j 从 1 到 n 相加有 $(v_t^h + \delta(u^h v^h)_x + G_2(v^h)_x + F_2(u^h)_x - k_2 v_{xx}^h, v^h) = 0$

类似于引理 2, 容易得到结论成立.

引理 9 对于任意的 $T > 0$, $u_0^h(x), v_0^h(x) \in W^{1,2}$, 则存在常数 C , 使得

$$\|u_x^h\|^2 + \|v_x^h\|^2 \leq C$$

证明 用 $\alpha_{jn}(t)$ 乘以 $(u_t^h + G_1(v^h)_x + F_1(u^h)_x + \beta u_{xxx}^h - k_1 u_{xx}^h, \omega_j^{\sim}(x)) = 0$, 然后对 j 从 1 到 n 相加, 有

$$(u_t^h + G_1(v^h)_x + F_1(u^h)_x + \beta u_{xxx}^h - k_1 u_{xx}^h, u_{xx}^h) = 0$$

用 $\beta_{jn}(t)$ 乘以 $(v_t^h + \delta(u^h v^h)_x + G_2(v^h)_x + F_2(u^h)_x - k_2 v_x^h, \omega_j^{\sim}(x)) = 0$, 然后对 j 从 1 到 n 相加, 有

$$(v_t^h + \delta(u^h v^h)_x + G_2(v^h)_x + F_2(u^h)_x - k_2 v_x^h, v_{xx}^h) = 0$$

类似于引理 3, 容易得到结论成立.

引理 10 对于任意的 $T > 0$, $u_0^h(x), v_0^h(x) \in W^{2,2}$, 则存在常数 C 使得

$$\|u_{xx}^h\|^2 + \|v_{xx}^h\|^2 \leq C$$

证明 用 $\alpha_{jn}(t)$ 乘以 $(u_t^h + G_1(v^h)_x + F_1(u^h)_x + \beta u_{xxx}^h - k_1 u_{xx}^h, \omega_j^{(4)}(x)) = 0$, 然后对 j 从 1 到 n 相加, 有

$$(u_t^h + G_1(v^h)_x + F_1(u^h)_x + \beta u_{xxx}^h - k_1 u_{xx}^h, u_{4x}^h) = 0$$

用 $\beta_{jn}(t)$ 乘以 $(v_t^h + \delta(u^h v^h)_x + G_2(v^h)_x + F_2(u^h)_x - k_2 v_x^h, \omega_j^{(4)}(x)) = 0$, 然后对 j 从 1 到 n 相加, 有

$$(v_t^h + \delta(u^h v^h)_x + G_2(v^h)_x + F_2(u^h)_x - k_2 v_x^h, v_{4x}^h) = 0$$

类似于引理 4, 容易得到结论成立.

引理 11 对于任意的 $T > 0$, $u_0^h(x), v_0^h(x) \in W^{3,2}$, 则存在常数 C , 使得

$$\|u_{xxx}^h\|^2 + \|v_{xxx}^h\|^2 \leq C$$

证明 用 $\alpha_{jn}(t)$ 乘以 $(u_t^h + G_1(v^h)_x + F_1(u^h)_x + \beta u_{xxx}^h - k_1 u_{xx}^h, \omega_j^{(6)}(x)) = 0$, 然后对 j 从 1 到 n 相加, 有

$$(u_t^h + G_1(v^h)_x + F_1(u^h)_x + \beta u_{xxx}^h - k_1 u_{xx}^h, u_{6x}^h) = 0$$

用 $\beta_{jn}(t)$ 乘以 $(v_t^h + \delta(u^h v^h)_x + G_2(v^h)_x + F_2(u^h)_x - k_2 v_x^h, \omega_j^{(6)}(x)) = 0$, 然后对 j 从 1 到 n 相加, 有

$$(v_t^h + \delta(u^h v^h)_x + G_2(v^h)_x + F_2(u^h)_x - k_2 v_x^h, v_{6x}^h) = 0$$

类似于引理 5, 容易得到结论成立.

引理 12 对于任意 $T > 0$, $u_0^h(x), v_0^h(x) \in L_2$, 则存在常数 C , 使得

$$\|u_t^h\|_{L_2}^2 + \|v_t^h\|_{L_2}^2 \leq C$$

证明 $(u_t^h + G_1(v^h)_x + F_1(u^h)_x + \beta u_{xxx}^h - k_1 u_{xx}^h, w_j^h) = 0$ 式两边对 t 微分一次, $u_t^h = E, v_t^h = F$, 得到

$$(E_t + \beta_1 E u_x^h + \beta_1 E_x u^h + 2\beta_2 E u^h u_x^h + \beta_2 E_x (u^h)^2 + \alpha D F_x + \beta E_{xxx} + \alpha F v_x^h + \alpha F v^h - k_1 E_{xx}, w_j(x)) = 0$$

用 $a_j^{\sim}(t)$ 乘上式, 然后对 j 从 1 到 n 相加, 有

$$(E_t + \beta_1 E u_x^h + \beta_1 E_x u^h + 2\beta_2 E u^h u_x^h + \beta_2 E_x (u^h)^2 + \alpha D F_x + \beta E_{xxx} + \alpha F v_x^h + \alpha F v^h - k_1 E_{xx}, E) = 0$$

因为

$$\begin{aligned} (E_t, E) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|E\|_{L_2}^2, \\ |(E, E u_x^h)| &\leq \|u_x^h\|_{L_\infty} \|E\|_{L_2}^2, |(E, E_x u^h)| = \\ &= \frac{1}{2} |(E^2, u_x^h)| \leq \|u_x^h\|_{L_\infty} \\ &\|E\|_{L_2}^2 |(E, E u^h u_x^h)| \leq \|u_x^h\|_{L_\infty} \|u^h\|_{L_\infty} \\ &\|E\|_{L_2}^2, |(E, E_x (u^h)^2)| = |(E^2, u^h u_x^h)| \leq \\ &\|u_x^h\|_{L_\infty} \|u^h\|_{L_\infty} \|E\|_{L_2}^2 (E, E_{xxx}) = 0, \\ |(E, F v_x^h)| &\leq \|v_x^h\|_{L_\infty} \|E\|_{L_2} \\ \|F\|_{L_2}, (E, E_{xx}) &= -(E_x, E_x) = -\|E_x\|_{L_2}^2 \\ |(E, F_x v^h)| &\leq \|v^h\|_{L_\infty} \|E\|_{L_2} \|F_x\|_{L_2} \leq \\ &C(\epsilon_1) \|F_x\|_{L_2}^2 + C \|E\|_{L_2}^2, \\ (F_x, E) &\leq \frac{1}{2} (\|F_x\|_{L_2}^2 + \|E\|_{L_2}^2) \end{aligned}$$

故有引理 1, 得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|E\|_{L_2}^2 + k_1 \|E_x\|_{L_2}^2 \leq C(\|E\|_{L_2}^2 + \|E\|_{L_2} \|F\|_{L_2}) + C(\epsilon_1) \|F_x\|_{L_2}^2 \quad (21)$$

对 $(v_t^h + \delta(u^h v^h)_x + G_2(v^h)_x + F_2(u^h)_x - k_2 v_x^h, w_j(x)) = 0$, 式两边微分一次, 可以得到

$$(F_t + \delta(E_x v^h + F u_x^h + E v_x^h + u^h F_x) + \epsilon(F v_x^h + F_x v^h) - k_2 F_{xx}, F) = 0$$

因为

$$\begin{aligned} (F, F_t) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|F\|_{L_2}^2, |(F, E_x v^h)| \leq \\ &\|v^h\|_{L_\infty} \|E_x\|_{L_2} \|F\|_{L_2} \leq \\ &C(\epsilon_1) \|E_x\|_{L_2}^2 + C \|F\|_{L_2}^2 \\ |(F, F u_x^h)| &\leq \|u_x^h\|_{L_\infty} \|F\|_{L_2}^2, |(F, E v_x^h)| \leq \\ &\|v_x^h\|_{L_\infty} \|F\|_{L_2} \|E\|_{L_2}, \\ |(F, F_x u^h)| &\leq \|u_x^h\|_{L_\infty} \|F\|_{L_2}^2 \\ |(F, F v_x^h)| &\leq \|v_x^h\|_{L_\infty} \|F\|_{L_2}^2, |(F, F_x v^h)| \leq \end{aligned}$$

$\|v_x^h\|_{L_\infty} \|F\|_{L_2}^2,$
 $(F, F_{xx}) = -(F_x, F_x) = -\|F_x\|_{L_2}^2$
 $(E_x, F) = -(E, F_x), (F_x, F) = 0$, 故由引理 1, 得
 $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|F\|_{L_2}^2 + k_2 \|F_x\|_{L_2}^2 \leq C(\|F\|_{L_2}^2 + \|E\|_{L_2} \|F\|_{L_2}) + C(\epsilon_1) \|E_x\|_{L_2}^2$ (22)
 式(21)加式(22), 有
 $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|E\|_{L_2}^2 + \|F\|_{L_2}^2) + |k_2 - C(\epsilon_1)| \cdot \|F_x\|_{L_2}^2 + |k_1 - C(\epsilon_1)| \|E_x\|_{L_2}^2 \leq C(\|F\|_{L_2}^2 + \|E\|_{L_2}^2)$
 有 $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|E\|_{L_2}^2 + \|F\|_{L_2}^2) \leq C(\|E\|_{L_2}^2 + \|F\|_{L_2}^2)$
 所以, 有

$$\|E\|_{L_2}^2 + \|F\|_{L_2}^2 \leq C$$

从上面的计算可以看出常数 C 满足条件.

定理 1 若 $u_0(x), v_0(x) \in W^{3,2}(I)$, 对于任意的正数 T , 那么周期初值问题存在以 $u_0(x), v_0(x)$ 为初值的弱解, 且满足 $u(x, t), v(x, t) \in W^{3,2}(I) (t \in [0, T], x \in [0, 1])$

证明 由引理 8—引理 12 可知, $\forall t \geq 0$, $\{u^h\}, \{v^h\}$ 在 $W^{3,2}$ 中一致有界, 且上界连续依赖于初值, 因此可选取子列 (仍记为) $\{u^h\}, \{v^h\}$, 在 L^2 中, 有 $u_t^h \xrightarrow{\text{弱}} u_t, v_t^h \xrightarrow{\text{弱}} v_t, u_{xx}^h \xrightarrow{\text{弱}} u_{xx}, u_{xxx}^h \xrightarrow{\text{弱}} u_{xxx}, v_{xxx}^h \xrightarrow{\text{弱}} v_{xxx}$. 特别地, 在 L^2 中, $F_i(u^h)_x \xrightarrow{\text{弱}^*} F_i(u)_x, (u^h v^h)_x \xrightarrow{\text{弱}^*} (uv)_x, G_i(v^h)_x \xrightarrow{\text{弱}^*} G_i(v)_x, i=1, 2$. 那么在式(15)中令 $h \rightarrow \infty$ 有

$$(u_t + G_1(v)_x + F_1(u)_x + \beta u_{xxx} - k_1 u_{xx}, \omega_j) = 0$$

$$(v_t + \delta(uv)_x + G_2(v)_x + F_2(u)_x - k_2 v_{xx}, \omega_j) = 0$$

满足广义解的定义, 故结论成立.

参考文献:

- [1] Whitham G B. Linear and nonlinear waves [M]. New York: Wiley, 1974.
- [2] Hirota S J. Soliton solutions of a coupled Korteweg-de Vries equation[J]. Physics Letters, 1981, A85(2): 407 - 408.
- [3] Ito M. Symmetries and conservation laws of coupled nonlinear wave equation[J]. Physics Letter, 1982, A92(9): 335 - 338.
- [4] Guo B L, Yang L G. The global attractors for the periodic initial value problem for a coupled Non-linear wave equation [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1996(19): 131 - 144.
- [5] Fang S M. The global attractors for a damped generalized coupled Nonlinear wave equations[J]. J Partial Diff Eqa, 2002, 15(1): 13 - 27.
- [6] Fang S M, Guo B L. Long time behavior for damped generalized coupled nonlinear wave equations II. Unbounded domain[J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2001(6): 107 - 110.
- [7] 房少梅, 郭柏灵. 一类广义耦合的非线性波动方程组在无界区域上的整体吸引子[J]. 数学物理学报, 2003, 23A(4): 464 - 473.
- [8] Kuznetsov E A. On the Ito-type coupled nonlinear wave equation[J]. J Phys Soc Jpn, 1986, 55(4): 3753 - 3755.
- [9] 刘小华. 一类耦合 KdV 型方程的孤波解及其稳定性研究系统分析与集成 [D]. 上海: 上海理工大学, 2012.
- [10] 郭柏灵. 一类更广泛的 KDV 方程的整体解[J]. 数学学报, 1982, 6(25): 641 - 655.

(编辑: 金虹)