

文章编号: 1007-6735(2013)06-0523-08

具有多个参数扰动的随机恒化器模型研究

李 姣, 孟琳琳, 原三领

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 考虑了一类营养的输入浓度和稀释率同时受到白噪声干扰的随机恒化器模型. 首先证明了模型正解的全局存在唯一性; 其次通过构造 Lyapunov 函数的方法研究了在不同条件下随机模型的解围绕其相应确定性系统的正平衡点和绝灭平衡点的振荡行为; 最后通过数值仿真验证了所得结论的正确性.

关键词: 随机恒化器模型; 布朗运动; 伊藤公式; 渐近行为

中图分类号: O 175 **文献标志码:** A

Chemostat Model with Stochastic Perturbation on Multiple Parameters

LI Jiao, MENG Lin-lin, YUAN San-ling

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: A stochastic chemostat model was considered, in which both the input concentration of nutrient and the dilution rate are simultaneously influenced by white noises. The uniqueness and global existence of the positive solution of the model were proved, and it was investigated how the solution is oscillating around the positive equilibrium and the extinction equilibrium of the corresponding deterministic model under different conditions. Numerical simulations were carried out to illustrate the conclusions.

Key words: stochastic chemostat model; Brownian motion; Itô formula; asymptotic behavior

1 问题的提出

恒化器是一种设法使培养液流速保持不变, 且微生物始终在低于其最高生长速率条件下生长繁殖的一种连续培养装置, 最初由莫诺(Monod)创制. 恒

化器一般采用的方法是: 实验操作人员通过适当的装置以限制培养基营养物质的浓度或者根据加入的速度来调节微生物的增殖速度. 在恒化器中可以用糖、有机酸等碳源或蛋白质、氨基酸等含氮代谢物作为限制性营养物质. 恒化器在发酵工程中起着重要作用, 如研制生物产品(蛋白质、疫苗等). 由于恒化

收稿日期: 2012-10-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11271260); 上海市重点学科建设资助项目(XTKX2012); 上海市教委科研创新重点资助项目(13ZZ116)

第一作者: 李 姣(1988-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 生物数学. E-mail: lijiao_1219@126.com

通讯作者: 原三领(1966-), 男, 教授. 研究方向: 生物数学. E-mail: math-ysling@163.com

器中相关参数可以通过实验测得,并且通过数学模型分析能得到与实验结果相符的结论,因此,恒化器成为实验室微生物培养研究中应用较为广泛的一种理想的实验装置.基于其在理论、实际应用上的重要价值,恒化器动力学模型的研究引起了国内外大量实验技术人员、生物学者和数学工作者的关注.文献[1]考虑了一类在污染的环境下的 Monod-Haldane 恒化器模型,获得了微生物灭绝周期解全局吸引的充分条件,并证明了系统在适当的条件下是持久的.文献[2]研究了恒化器中一类具有非常数消耗率的微生物培养模型,得到了两种微生物共存与微生物本身参数、环境参数之间的关系.文献[3]研究了确定性系统

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (S^0 - S)D - \frac{mS}{\gamma(a + S)}x \\ \frac{dx}{dt} &= x\left(\frac{mS}{a + S} - D\right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, $S(t)$, $x(t)$ 分别为 t 时刻营养物和微生物的浓度,且所有参数均为正常数; S^0 为输入营养物的浓度; D 为恒化器的稀释率; m 为微生物对营养的最大摄取率; a 为半饱和常数; γ 为营养转化率.

在系统(1)中,如果进一步考虑恒化器中微生物的死亡,则得到系统

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (S^0 - S)D - \frac{mS}{\gamma(a + S)}x \\ \frac{dx}{dt} &= x\left(\frac{mS}{a + S} - D - D_1\right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中, D_1 为恒化器中微生物的死亡率.

系统(2)的动力学行为非常简单,系统(2)总存在绝灭平衡点 $E^0 = (S^0, 0)$, 且当 $\frac{mS^0}{a + S^0} \leq D + D_1$ 时, E^0 全局渐近稳定; 当 $\frac{mS^0}{a + S^0} > D + D_1$ 时 E^0 失稳, 此时系统存在一个全局渐近稳定的正平衡点 $E^* = (S^*, x^*)$, 其中

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{a(D + D_1)}{m - (D + D_1)} \\ x^* &= \frac{\gamma D}{D + D_1} \left(S^0 - \frac{a(D + D_1)}{m - (D + D_1)} \right) \end{aligned}$$

在系统(2)的基础上,可以进一步建立更接近现实的恒化器模型,如考虑微生物增长或营养循环过程中所存在的时间滞后、假设恒化器非搅拌均匀等.

值得注意的是,以往的恒化器模型很少考虑到微生物培养过程中可能遭受到的各种随机噪声的干扰,如实验条件控制不够严格、信息传递过程中存在的随机干扰及数据测量的误差等.这些随机因素必

然会对微生物培养过程产生一定的影响.

近年来,对随机生态(或流行病)动力学模型的研究引起了国内外许多研究者的关注,成为目前生物数学研究领域非常重要的热点之一^[4-7]. 常见的考虑随机因素影响的方法主要有两种:一种是假设随机因素对系统的影响表现在对其某些参数的影响上^[4]; 另一种是假设随机因素的影响表现在与其相应的确定性系统平衡态的偏差成比例上^[5]. 如果假设在系统(2)中随机因素的影响表现在对输入营养的浓度和恒化器中微生物的死亡率影响上,即

$$S^0 \rightarrow S^0 + \alpha \dot{B}_1(t), \quad D_1 \rightarrow D_1 + \beta \dot{B}_2(t)$$

则得到随机系统

$$\left. \begin{aligned} dS &= \left[(S^0 - S)D - \frac{mS}{\gamma(a + S)}x \right] dt + \alpha d\dot{B}_1(t) \\ dx &= \left[x \left(\frac{mS}{a + S} - D - D_1 \right) \right] dt - \beta x d\dot{B}_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中, $B_1(t)$, $B_2(t)$ 为相互独立的标准布朗运动; α, β 为噪声强度.

现通过对系统(3)的研究来揭示随机噪声对微生物恒化培养动力学行为的影响,

在本文中,除非另有说明,总假设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$ 是一个完备的概率空间,且 $\{F_t\}_{t \geq 0}$ 满足通常条件(即右连续且 F_0 包含所有的零测集). $B_i(t)$ 是定义在此概率空间上的标准布朗运动, $i = 1, 2$. 另外,记 $R_+^n = \{x \in R^n, x_i > 0, 1 \leq i \leq n\}$.

2 系统(3)非负解的全局存在唯一性和有界性

现证明随机系统(3)解的非负性和全局存在唯一性.

定理 1 对任意给定的初值 $S(0) > 0, x(0) > 0$, 系统(3)有唯一的正解, 且对几乎所有的 $t \geq 0$ 存在函数 $\varphi(t), \Phi(t), \underline{x}(t)$ 和 $\bar{x}(t)$, 使得 $\varphi(t) \leq S(t) \leq \Phi(t), \underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t)$.

证明 因为系统(3)的系数局部 Lipschitz 连续, 所以, 对于任意给定的初值 $(S(0), x(0)) \in R_+^2$, 在 $t \in [0, \tau_e)$ 上系统(3)存在唯一的局部解 $(S(t), x(t))$, 其中, τ_e 是爆炸时间. 为了证明这个解是全局的, 只需证明 $\tau_e = \infty$ a. s.

由于系统(3)的解是非负的, 所以, 有

$$dx \leq [x(m - D - D_1)] dt - \beta x d\dot{B}_2(t)$$

而方程

$$\begin{cases} d\bar{x}(t) = [\bar{x}(t)(m-D-D_1)]dt - \beta\bar{x}(t)dB_2(t) \\ \bar{x}(0) = x(0) \end{cases}$$

的解为

$$\bar{x}(t) = x(0)\exp\left\{\left(m-D-D_1-\frac{\beta^2}{2}\right)t - \beta B_2(t)\right\}$$

由比较定理可得

$$x(t) \leq \bar{x}(t) \text{ a.s. } t \in [0, \tau_e)$$

又因

$$dx \geq -(D+D_1)xdt - \beta x dB_2(t)$$

而方程

$$\begin{cases} d\underline{x}(t) = -(D+D_1)\underline{x}(t)dt - \beta\underline{x}(t)dB_2(t) \\ \underline{x}(0) = x(0) \end{cases}$$

的解为

$$\underline{x}(t) = x(0)\exp\left\{\left(-D-D_1-\frac{\beta^2}{2}\right)t - \beta B_2(t)\right\}$$

由比较定理可得

$$x(t) \geq \underline{x}(t) \text{ a.s. } t \in [0, \tau_e)$$

因此

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t) \text{ a.s. } t \in [0, \tau_e)$$

同理,考虑 $S(t)$,有

$$dS \leq (S^0 - S)Ddt + \alpha DdB_1(t)$$

方程

$$\begin{cases} d\Phi(t) = (S^0 - \Phi(t))Ddt + \alpha DdB_1(t) \\ \Phi(0) = S(0) = S^0 \end{cases}$$

的解为

$$\Phi(t) = S^0 + S^0 \exp\{-Dt\} +$$

$$\alpha D \int_0^t \exp\{D(s-t)\} dB_1(s) \text{ a.s. } t \in [0, \tau_e)$$

由比较定理可得

$$S(t) \leq \Phi(t) \text{ a.s. } t \in [0, \tau_e)$$

而

$$dS \geq \left[(S^0 - S)D - \frac{m}{\gamma}x(t)\right]dt + \alpha DdB_1(t) \geq$$

$$\left[(S^0 - S)D - \frac{m}{\gamma}\bar{x}(t)\right]dt + \alpha DdB_1(t)$$

方程

$$\begin{cases} d\varphi(t) = \left[-D\varphi(t) - \frac{m}{\gamma}\bar{x}(t) + S^0D\right]dt + \alpha DdB_1(t) \\ \varphi(0) = S(0) = S^0 \end{cases}$$

的解为

$$\varphi(t) = S^0 \exp\{-Dt\} + \int_0^t \exp\{D(s-t)\} \cdot$$

$$\left[\left(-\frac{m}{\gamma}\bar{x}(t) + S^0D\right)ds + \alpha DdB_1(s)\right]$$

同样,由比较定理可得

$$S(t) \geq \varphi(t) \text{ a.s. } t \in [0, \tau_e)$$

综上所述

$$\varphi(t) \leq S(t) \leq \Phi(t), \underline{x}(t) \leq x(t) \leq$$

$$\bar{x}(t) \text{ a.s. } t \in [0, \tau_e)$$

由 $\varphi(t), \Phi(t), \underline{x}(t), \bar{x}(t)$ 的表达式可知,对任意的 $t \in [0, \infty)$, 它们都是存在的,故 $\tau = \infty$. 定理1得证.

3 系统(3)的解围绕 E^0 的振荡行为

当 $\frac{mS^0}{a+S^0} \leq D+D_1$ 时,确定性系统(2)有一个全局稳定的绝灭平衡点 $E^0 = (S^0, 0)$, 显然, E^0 不是随机系统(3)的平衡点,关于系统(3)的解在 E^0 附近的渐近行为有定理2.

定理2 对任意的初值 $S(0) > 0, x(0) > 0$, 设系统(3)的解为 $(S(t), x(t))$, 如果 $\frac{mS^0}{a+S^0} \leq D +$

$D_1, D > c_1 + \frac{1}{2}$, 且 $(a+S^0)^2 < 2a^2$, 则

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t \left[(S(r) - S^0)^2 + \frac{x(r)^2}{\gamma^2} \right] dr \leq \frac{2c_1(S^0)^2 + \alpha^2 D^2}{M}$$

其中

$$M = \min \left\{ 2 \left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right), 2 \left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(2 - \frac{(a+S^0)^2}{a^2} \right) \right\}$$

$$c_1 = \max\{\alpha^2, D_1^2 + \beta^2\}$$

证明 令

$$V(S, x) = \left(S - S^0 + \frac{x}{\gamma} \right)^2 + \frac{4 \left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right) (a+S^0)^2}{\gamma m a} x \quad (4)$$

由伊藤公式有

$$\begin{aligned} dV &= 2 \left(S - S^0 + \frac{x}{\gamma} \right) \left(dS + \frac{1}{\gamma} dx \right) + \left(dS + \frac{1}{\gamma} dx \right)^2 + \\ &\quad \frac{4 \left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right) (a+S^0)^2}{\gamma m a} dx = \\ &= LVdt + 2 \left(S - S^0 + \frac{x}{\gamma} \right) \alpha DdB_1(t) - \\ &\quad 2 \left(S - S^0 + \frac{x}{\gamma} \right) \frac{\beta}{\gamma} x dB_2(t) - \end{aligned}$$

$$\frac{4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)(a + S^0)^2}{\gamma ma} dB_2(t) \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} LV = & -2D\left(S - S^0 + \frac{x}{\gamma}\right)^2 - 2\left(S - S^0 + \frac{x}{\gamma}\right)D_1 \frac{x}{\gamma} + \\ & \alpha^2 D^2 + \frac{\beta^2}{\gamma^2} x^2 + \frac{4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)(a + S^0)^2}{m\alpha\gamma} \cdot \\ & \left(\frac{mS}{a + S} - D\right)x \leq -2\left(D - \frac{1}{2}\right)\left(S - S^0 + \frac{x}{\gamma}\right)^2 + \\ & \alpha^2 D^2 + \frac{\beta^2 + D_1^2}{\gamma^2} x^2 + \frac{4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)(a + S^0)^2}{m\alpha\gamma} \cdot \\ & \left(\frac{mS}{a + S} - D\right)x \end{aligned} \quad (6)$$

注意到

$$\begin{aligned} \frac{\beta^2 + D_1^2}{\gamma^2} x^2 & \leq \alpha^2 S^2 + \frac{\beta^2 + D_1^2}{\gamma^2} x^2 \leq \\ & \max\{\alpha^2, \beta^2 + D_1^2\} \left(S + \frac{x}{\gamma}\right)^2 \leq \\ & 2\max\{\alpha^2, \beta^2 + D_1^2\} \cdot \\ & \left[\left(S - S^0 + \frac{x}{\gamma}\right)^2 + (S^0)^2\right] = \\ & 2c_1 \left[\left(S - S^0 + \frac{x}{\gamma}\right)^2 + (S^0)^2\right] \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $c_1 = \max\{\alpha^2, D_1^2 + \beta^2\}$.

将式(7)代入式(6),有

$$\begin{aligned} LV \leq & -2\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)\left(S - S^0 + \frac{x}{\gamma}\right)^2 + \\ & \frac{4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)(a + S^0)^2}{m\alpha\gamma} \cdot \\ & \left(\frac{mS}{a + S} - D - D_1\right)x + \alpha^2 D^2 + 2c_1 (S^0)^2 = \\ & -2\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)\left[(S - S^0)^2 + \frac{x^2}{\gamma^2}\right] - \\ & 4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)(S - S^0) \frac{x}{\gamma} + \\ & \frac{4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)(a + S^0)^2}{m\alpha\gamma} \cdot \\ & \left(\frac{mS}{a + S} - D - D_1\right)x + \alpha^2 D^2 + 2c_1 (S^0)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

a. 当 $S \leq S^0$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{mS}{a + S} - D - D_1 & \leq \frac{mS}{a + S} - \frac{mS^0}{a + S^0} \leq \\ & -\frac{ma}{(a + S^0)^2} (S^0 - S) \end{aligned}$$

此时

$$\begin{aligned} \frac{4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)(a + S^0)^2}{m\alpha\gamma} \left(\frac{mS}{a + S} - D - D_1\right)x \leq \\ -4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)(S^0 - S) \frac{x}{\gamma} \end{aligned} \quad (9)$$

将式(9)代入式(8),有

$$\begin{aligned} LV \leq & -2\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)\left[(S - S^0)^2 + \frac{x^2}{\gamma^2}\right] + \\ & \alpha^2 D^2 + 2c_1 (S^0)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

b. 当 $S > S^0$ 时,

$$\frac{mS}{a + S} - D - D_1 \leq \frac{mS}{a + S} - \frac{mS^0}{a + S^0} \leq \frac{m}{a} (S - S^0)$$

此时

$$\begin{aligned} \frac{4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)(a + S^0)^2}{m\alpha\gamma} \left(\frac{mS}{a + S} - D - D_1\right)x - \\ 4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)(S - S^0) \frac{x}{\gamma} \leq 4\left(\frac{(a + S^0)^2}{a^2} - 1\right) \cdot \\ \left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)(S - S^0) \frac{x}{\gamma} \leq 2\left(\frac{(a + S^0)^2}{a^2} - 1\right) \cdot \\ \left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)\left[(S - S^0)^2 + \frac{x^2}{\gamma^2}\right] \end{aligned} \quad (11)$$

将式(11)代入式(8),有

$$\begin{aligned} LV \leq & -2\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)\left[2 - \frac{(a + S^0)^2}{a^2}\right] \cdot \\ & \left[(S - S^0)^2 + \frac{x^2}{\gamma^2}\right] + \alpha^2 D^2 + 2c_1 (S^0)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

若令

$$\begin{aligned} M = \min\left\{2\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right), \right. \\ \left. 2\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)\left(2 - \frac{(a + S^0)^2}{a^2}\right)\right\} \end{aligned}$$

则式(10)和式(12)为

$$LV \leq -M\left[(S - S^0)^2 + \frac{x^2}{\gamma^2}\right] + \alpha^2 D^2 + 2c_1 (S^0)^2$$

综上所述,将 LV 代入式(5),得

$$\begin{aligned} dV \leq & \left\{-M\left[(S - S^0)^2 + \frac{x^2}{\gamma^2}\right] + \alpha^2 D^2 + \right. \\ & 2c_1 (S^0)^2\left\} dt + 2\left(S - S^0 + \frac{x}{\gamma}\right) \alpha dB_1(t) - \\ & 2\left(S - S^0 + \frac{x}{\gamma}\right) \frac{\beta}{\gamma} x dB_2(t) - \\ & \frac{4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)(a + S^0)^2}{\gamma ma} dB_2(t) \end{aligned}$$

对上式两边从 0 到 t 积分,再取期望,得

$$E[V(t)] - V(0) = E\left[\int_0^t LV(r) dr\right] \leq$$

$$- \mathbb{E} \int_0^t M \left[(S(r) - S^0)^2 + \frac{x(r)^2}{\gamma^2} \right] dr + \alpha^2 D^2 t + 2c_1 (S^0)^2 t$$

所以

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} \int_0^t \left[(S(r) - S^0)^2 + \frac{x(r)^2}{\gamma^2} \right] dr \leq \frac{2c_1 (S^0)^2 + \alpha^2 D^2}{M}$$

定理2表明,当噪声强度充分小时, E^0 随机渐近稳定.

4 正平衡点 E^* 的渐近行为

当 $\frac{mS^0}{a+S^0} > D + D_1$ 时,点 $E^* = (S^*, x^*)$ 是确定性系统(2)的全局稳定的正平衡点,而不是随机系统(3)的平衡点.关于随机系统(3)的解在 E^* 附近的长期渐近行为有定理3.

定理3 对任意的初值 $S(0) > 0, x(0) > 0$,设系统(3)的解为 $(S(t), x(t))$,若 $\frac{mS^0}{a+S^0} > D + D_1$, $D > c_1 + \frac{1}{2}$,则系统(3)的解满足式(13).

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} \int_0^t \left[(S(r) - S^*)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left(x(r) - \frac{D + D_1}{D} x^* \right)^2 \right] dr \leq \frac{c_2 \left(a + S^* + \frac{4(D + D_1)x^*}{\gamma D} \right)^2}{\left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right) \alpha^2} \quad (13)$$

其中

$$c_1 = \max \{ \alpha^2, D_1^2 + \beta^2 \}$$

$$c_2 = \alpha^2 D^2 + \frac{2a \left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right) (D + D_1)}{\gamma m D} \beta^2 x^* + 2c_1 (S^0)^2$$

(S^*, x^*) 是确定性系统(2)的平衡点.

证明 令

$$V(S, x) = \left(S - S^0 + \frac{x}{\gamma} \right)^2 + \frac{4 \left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right) a}{\gamma m} \cdot \left[x - \frac{D + D_1}{D} x^* - \frac{D + D_1}{D} x^* \ln \frac{x}{\frac{D + D_1}{D} x^*} \right]$$

显然, V 是正定函数.由伊藤公式得

$$dV = 2 \left(S - S^0 + \frac{x}{\gamma} \right) \left(dS + \frac{1}{\gamma} dx \right) + \left(dS + \frac{1}{\gamma} dx \right)^2 +$$

$$\frac{4 \left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right) a}{\gamma m} \left(1 - \frac{D + D_1}{D} \frac{x^*}{x} \right) dx +$$

$$\frac{2a \left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right) (D + D_1)}{\gamma m D} \frac{x^*}{x^2} (dx)^2 =$$

$$LV dt + 2 \left(S - S^0 + \frac{x}{\gamma} \right) \alpha D dB_1(t) -$$

$$2 \left(S - S^0 + \frac{x}{\gamma} \right) \frac{\beta}{\gamma} x dB_2(t) - \frac{4a \left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right)}{\gamma m} \cdot$$

$$\left(1 - \frac{D + D_1}{D} \frac{x^*}{x} \right) \beta x dB_2(t) \quad (14)$$

$$LV = 2 \left(S - S^0 + \frac{x}{\gamma} \right) \left[(S^0 - S) D - \frac{mS}{\gamma(a+S)} x \right] +$$

$$2 \frac{x}{\gamma} \left(S - S^0 + \frac{x}{\gamma} \right) \left(\frac{mS}{a+S} - D - D_1 \right) +$$

$$\alpha^2 D^2 + \frac{\beta^2}{\gamma^2} x^2 + \frac{4a \left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right)}{\gamma m} \left(x - \frac{D + D_1}{D} x^* \right) +$$

$$\frac{2a \left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right) (D + D_1) \beta^2}{\gamma m D} x^* \leq -2 \left(D - \frac{1}{2} \right) \cdot$$

$$\left(S - S^0 + \frac{x}{\gamma} \right)^2 + \alpha^2 D^2 + \frac{\beta^2 + D_1}{\gamma^2} x^2 +$$

$$\frac{4a \left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right)}{\gamma m} \left(x - \frac{D + D_1}{D} x^* \right) +$$

$$\frac{2a \left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right) (D + D_1) \beta^2}{\gamma m D} x^* \quad (15)$$

注意到 $S^* + \frac{D + D_1}{D} \frac{x^*}{\gamma} = S^0$,由式(7)和式

(15)可知

$$LV \leq -2 \left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right) \left(S - S^0 + \frac{x}{\gamma} \right)^2 +$$

$$\frac{4a \left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right)}{\gamma m} \left(x - \frac{D + D_1}{D} x^* \right) + \alpha^2 D^2 +$$

$$2c_1 (S^0)^2 + \frac{2a \left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right) (D + D_1) \beta^2}{\gamma m D} x^* =$$

$$-2 \left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right) \left[S - S^* + \frac{1}{\gamma} \left(x - \frac{D + D_1}{D} x^* \right) \right]^2 +$$

$$\frac{4a \left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right)}{\gamma m} \left(x - \frac{D + D_1}{D} x^* \right) + c_2 \quad (16)$$

其中

$$c_2 = \alpha^2 D^2 + \frac{2a \left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right) (D + D_1)}{\gamma m D} \cdot$$

$$\beta^2 x^* + 2c_1 (S^0)^2$$

a. 当 $(S - S^*) \left(x - \frac{D+D_1}{D}x^*\right) \geq 0$ ($\Leftrightarrow$
 $\left(\frac{mS}{a+S} - D - D_1\right) \left(x - \frac{D+D_1}{D}x^*\right) \geq 0$) 时, 式
 (16)为

$$LV \leq -2\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right) \left(S - S^* + \frac{1}{\gamma} \left(x - \frac{D+D_1}{D}x^*\right)\right)^2 + \frac{4a\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)}{\gamma m} \cdot$$

$$\left| \frac{mS}{a+S} - D - D_1 \right| \left| x - \frac{D+D_1}{D}x^* \right| + c_2 \leq$$

$$-2\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right) \left(S - S^* + \frac{1}{\gamma} \left(x - \frac{D+D_1}{D}x^*\right)\right)^2 +$$

$$\frac{4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)}{\gamma} |S - S^*| \left| x - \frac{D+D_1}{D}x^* \right| + c_2 =$$

$$-2\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right) \left((S - S^*)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left(x - \frac{D+D_1}{D}x^*\right)^2\right) + c_2$$

b. 当 $(S - S^*) \left(x - \frac{D+D_1}{D}x^*\right) < 0$ ($\Leftrightarrow$
 $\left(\frac{mS}{a+S} - D - D_1\right) \left(x - \frac{D+D_1}{D}x^*\right) < 0$) 时,

(a) 若 $S > S^* + \frac{4(D+D_1)}{\gamma D}x^*$, 式(16)为

$$LV \leq -2\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right) \left[(S - S^*)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left(x - \frac{D+D_1}{D}x^*\right)^2\right] - \frac{4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)}{\gamma} (S - S^*) \cdot$$

$$\left(x - \frac{D+D_1}{D}x^*\right) + \frac{4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)a}{\gamma m} \left(\frac{mS}{a+S} - D - D_1\right) \cdot$$

$$\left(x - \frac{D+D_1}{D}x^*\right) + c_2 \leq -2\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right) \cdot$$

$$\left[(S - S^*)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left(x - \frac{D+D_1}{D}x^*\right)^2\right] +$$

$$\frac{4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)}{\gamma} (S - S^*) \left(\frac{D+D_1}{D}x^* - x\right) + c_2 \leq$$

$$-2\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right) \left[(S - S^*)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left(x - \frac{D+D_1}{D}x^*\right)^2\right] +$$

$$\frac{4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)}{\gamma} (S - S^*) \frac{D+D_1}{D}x^* + c_2$$

由 $\frac{4x^*(D+D_1)}{\gamma D} < S - S^*$, 得到

$$\frac{4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)}{\gamma} (S - S^*) \frac{D+D_1}{D}x^* <$$

$$\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right) (S - S^*)^2$$

因此

$$LV \leq -\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right) (S - S^*)^2 - \frac{2\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)}{\gamma^2} \cdot$$

$$\left(x - \frac{D+D_1}{D}x^*\right)^2 + c_2 \leq -\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right) \cdot$$

$$\left[(S - S^*)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left(x - \frac{D+D_1}{D}x^*\right)^2\right] + c_2$$

(b) 若 $S \leq S^* + \frac{4x^*(D+D_1)}{\gamma D}$, 式(16)为

$$LV \leq -2\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right) \left[(S - S^*)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left(x - \frac{D+D_1}{D}x^*\right)^2\right] - \frac{4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)}{\gamma} \cdot$$

$$(S - S^*) \left(x - \frac{D+D_1}{D}x^*\right) - \frac{4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)a}{\gamma m} \cdot$$

$$\left| \frac{mS}{a+S} - D - D_1 \right| \left| x - \frac{D+D_1}{D}x^* \right| + c_2 =$$

$$-2\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right) \left[(S - S^*)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \cdot$$

$$\left(x - \frac{D+D_1}{D}x^*\right)^2\right] + \frac{4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)}{\gamma} |S - S^*| \cdot$$

$$\left| x - \frac{D+D_1}{D}x^* \right| - \frac{4\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)a}{\gamma m} \cdot$$

$$\left| \frac{mS}{a+S} - D - D_1 \right| \left| x - \frac{D+D_1}{D}x^* \right| + c_2 \leq$$

$$\left[-2\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right) + 2\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right) \cdot$$

$$\left[1 - \frac{a^2}{\left(a + S^* + \frac{4(D+D_1)x^*}{D\gamma}\right)^2}\right]\right] \cdot$$

$$\left[(S - S^*)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left(x - \frac{D+D_1}{D}x^*\right)^2\right] + c_2 =$$

$$- \frac{2a^2\left(D - c_1 - \frac{1}{2}\right)}{\left(a + S^* + \frac{4(D+D_1)x^*}{D\gamma}\right)^2} \cdot$$

$$\left[(S - S^*)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left(x - \frac{D+D_1}{D}x^*\right)^2\right] + c_2$$

综上所述

$$LV \leq - \frac{a^2 \left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right)}{\left(a + S^* + \frac{4(D + D_1)x^*}{D\gamma} \right)^2} \cdot \left[(S - S^*)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left(x - \frac{D + D_1}{D} x^* \right)^2 \right] + c_2 \quad (17)$$

将式(17)代入式(14),并对式子两边从0到 t 积分,再取期望,得

$$\mathbb{E} \int_0^t dV = \mathbb{E} \int_0^t LV dt$$

因此

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \mathbb{E} \int_0^t \left[(S(r) - S^*)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left(x(r) - \frac{D + D_1}{D} x^* \right)^2 \right] dr \leq \frac{c_2 \left(a + S^* + \frac{4(D + D_1)x^*}{\gamma D} \right)^2}{\left(D - c_1 - \frac{1}{2} \right) a^2}$$

5 仿真与讨论

讨论了一类输入营养物的浓度和稀释率受到随机噪声干扰的随机恒化器模型的渐近性态.由上述分析可知,随机系统(3)正解的全局存在唯一性与噪声强度 α 和 β 无关,即说明该性质具有很强的鲁棒性.虽然随机系统(3)不存在绝灭平衡点和正平衡点,但定理2表明,当噪声强度足够小,且满足 $D >$

$c_1 + \frac{1}{2}$, $(a + S^0)^2 < 2a^2$ 时,随机系统(3)的解围绕其对应的确定性系统(2)的绝灭平衡点 E^0 作随机振荡;定理3表明,当噪声强度足够小,满足 $D > c_1 + \frac{1}{2}$ 与 $\frac{mS^0}{a + S^0} > D + D_1$ 时,随机系统(3)的解围绕其对应的确定性系统(2)的正平衡点 E^* 作随机振荡,也说明了噪声强度较小时不能改变微生物的持续生存.

为说明本文结论的正确性,现给出3个数值例子.为了便于比较随机系统(3)与其相应的确定性系统(2)解的关系,将其解曲线画在同一个图里,如图1~3所示(图2和图3见下页).其中,蓝虚线和绿虚线分别表示确定性系统(2)的 $S(t)$ 和 $x(t)$ 的轨线,红实线和黑实线分别表示随机系统(3)的 $S(t)$ 和 $x(t)$ 的轨线.

例1 在随机系统(3)中取 $S^0 = 1, m = 2, a = 4, D = 1.3, \gamma = 0.8, D_1 = 0.1, \alpha = 0.016, \beta = 0.4$,易得 $\frac{mS^0}{a + S^0} = 0.4 < 1.4 = D + D_1$,此时,系统(2)有唯一的绝灭平衡点 E^0 .又因 $(a + S^0)^2 = 25 < 32 = 2a^2, 1.3 = D > \max\{\alpha^2 = 0.016^2, \beta^2 + D_1^2 = 0.4^2 + 0.1^2\}$,定理2的条件满足.数值结果显示,系统(3)的解在其相应确定性系统(2)的平衡点 $E^0 = (S^0, 0) = (1, 0)$ 附近振荡(如图1(a)所示).初值取 $(S(0) = 0.11, x(0) = 0.89)$,与定理2的结论一致,同时还可看到,若其它参数不变而噪声强度取得小一些,如取 $\alpha = 0.011, \beta = 0.027$,则振荡幅度变小,如图1(b)所示.

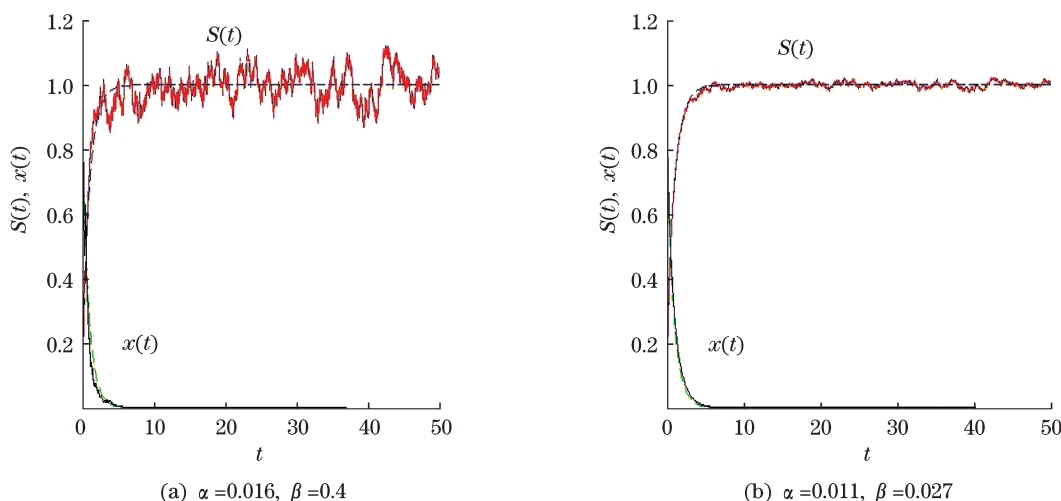
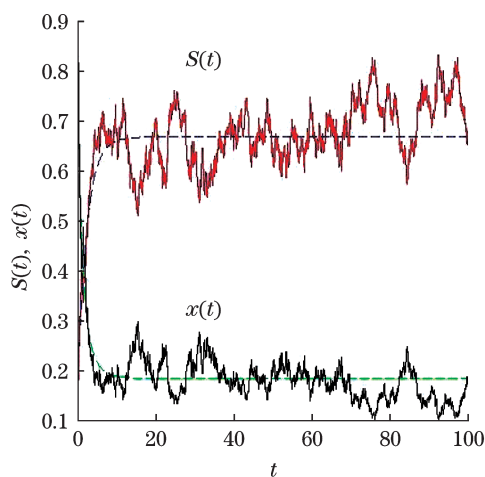


图1 随机系统(3)的解围绕系统(2)的绝灭平衡点 $E^0 = (1, 0)$ 的振荡行为

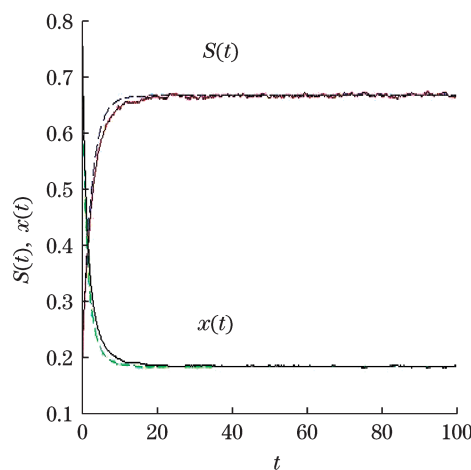
Fig.1 Oscillation behavior of the solutions of stochastic system (3) around the washout equilibrium $E^0 = (1, 0)$ of system (2)

例2 在随机系统(3)中取 $S^0 = 1, m = 3, a = 1, D = 1.1, \gamma = 0.8, D_1 = 0.1, \alpha = 0.043, \beta = 0.155$, 易得 $\frac{mS^0}{a+S^0} = 1.5 > 1.2 = D + D_1$, 此时, 系统(2)有正平衡点 E^* . 又因当 $1.1 = D > \max\{\alpha^2 = 0.043^2, \beta^2 + D_1^2 = 0.155^2 + 0.1^2\}$, 定理3的条件满足. 数值结

果显示, 系统(3)的解在其相应确定性系统(2)的平衡点 $E^* = (S^*, x^*) = (0.6667, 0.2444)$ 附近振荡, 如图2(a)所示, 初值取 $(S(0) = 0.11, x(0) = 0.89)$, 与定理3的结论一致. 同样, 若其它参数不变, 而噪声强度取得小一些, 如取 $\alpha = 0.001, \beta = 0.005$, 则振荡的幅度变小, 如图2(b)所示.



(a) $\alpha = 0.043, \beta = 0.155$



(b) $\alpha = 0.001, \beta = 0.005$

图2 随机系统(3)的解围绕系统(2)的正平衡点 $E^* = (0.6667, 0.2444)$ 的振荡行为

Fig.2 Oscillation behavior of the solutions of stochastic system (3) around the positive equilibrium $E^* = (0.6667, 0.2444)$ of system (2)

在例2的基础上, 为了进一步了解噪声强度对系统(3)解的动力学行为的影响, 给出例3.

例3 在随机系统(3)中, 取 $\alpha = 0.5, \beta^2 + D_1^2 = 2.1^2 + 0.1^2 > D = 1.1$, 其它参数同例2. 数值结果显示, 当噪声强度足够大时, 会导致微生物在恒化器中灭绝, 如图3所示.

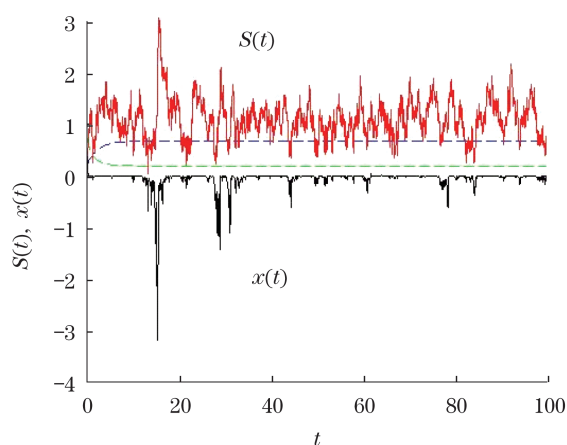


图3 噪声强度足够大时随机系统(3)解的渐近行为

Fig.3 Asymptotic behavior of the solutions of stochastic system (3) when the noise intensity is big enough

参考文献:

- [1] 唐春婷, 王美娟, 田应强. 具有时滞增长反应及脉冲输入的 Monod-Haldane 恒化器模型分析[J]. 上海理工大学学报, 2010, 32(6): 539-548.
- [2] 凌志超, 张天四. 恒化器中一类具有非常数消耗率微生物培养模型的定性分析[J]. 上海理工大学学报, 2012, 34(4): 373-376.
- [3] Smith H, Waltman P. The theory of the chemostat [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [4] Jiang D, Yu J, Ji C, et al. Asymptotic behaviour of global positive solution to a stochastic SIR model[J]. Math Comput Modelling, 2011, 54(1/2): 221-232.
- [5] Ji C, Jiang D. Dynamics of a stochastic density dependent predator-prey system with Beddington-DeAngelis functional response[J]. J Math Anal Appl, 2011, 381(1): 441-453.
- [6] Ji C, Jiang D, Shi N. A note on a predator-prey model with modified leslie-gower and holling-type II schemes with stochastic perturbation[J]. J Math Anal Appl, 2011, 377(1): 435-440.
- [7] Ji C, Jiang D, Li X. Qualitative analysis of a stochastic ratio-dependent predator-prey system[J]. J Comput Appl Math, 2011, 235(5): 1326-1341.

(编辑: 石 瑛)