

文章编号:1007-6735(2013)06-0531-05

四阶双曲型 Kac-Moody 代数的极小虚根

许成苏, 胡建华

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了双曲型 Kac-Moody 代数的特殊虚根——极小虚根的基本性质及其对应的 Dynkin 图的特性, 给出了四阶双曲型 Kac-Moody 代数的极小虚根的计算方法, 并计算出了所有四阶双曲型 Kac-Moody 代数的极小虚根.

关键词: Kac-Moody 代数; 极小虚根; 双曲型

中图分类号: O 152 **文献标志码:** A

Minimal Imaginary Roots of Kac-Moody Algebra of Hyperbolic Type of Order 4

XU Cheng-su, HU Jian-hua

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The Kac-Moody algebra of hyperbolic type was focused. The basic properties of minimal imaginary roots which are special imaginary roots and the characteristics of the corresponding Dynkin diagram were investigated. A method to calculate the minimal imaginary roots of Kac-Moody algebra of hyperbolic type of order 4 was presented and a complete list of them was given.

Key words: Kac-Moody algebra; minimal imaginary root; hyperbolic type

虚根的研究^[1-2]是 Kac-Moody 代数中极为重要的课题. 文献[3]中指出, 仿射型 Kac-Moody 代数的虚根已经完全清楚, 但不定型的 Kac-Moody 代数的虚根还没有给出完整的结构. 文献[4]中给出了所有双曲型广义 Cartan 矩阵的分类. 文献[5-7]对 Kac-Moody 代数的极小虚根的某些性质进行了研究. 文献[8]中给出了三阶广义 Cartan 矩阵所对应的双曲型李代数的全部极小虚根. 本文在此基础上, 给出了四阶广义 Cartan 矩阵所对应的双曲型 Kac-Moody

代数的全部极小虚根.

1 基本概念

定义 1^[1] 矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 称为广义 Cartan 矩阵, 如果它满足:

- $\forall i \in N^+, a_{ii} = 2;$
- $\forall i, j \in N^+, i \neq j, a_{ij} \in \mathbb{Z}^-;$
- $\forall i, j \in N^+, a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ji} = 0.$

收稿日期: 2012-09-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11126095, 11201299)

第一作者: 许成苏(1989-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 代数群及其表示论. E-mail: xuchengsu@163.com

通讯作者: 胡建华(1978-), 女, 讲师. 研究方向: 代数群及其表示论. E-mail: smilydragon2011@163.com

定义 2^[2] 三元组 $(h, \Pi, \Pi^\vee)$ 称为 A 的实现, 如果它满足:

- $\Pi, \Pi^\vee$ 都是线性无关的;
- $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = \alpha_j(\alpha_i^\vee) = a_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$;
- $\dim h = 2n - l, l = \text{rank } A$.

其中, h 是复向量空间, $\Pi = \alpha_1, \dots, \alpha_n \subset h^*, \Pi^\vee = \alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee \subset h$.

定义 3^[1] 由 $e_i, f_i, i = 1, 2, \dots, n$ 和按如下生成关系:

- $[h, h'] = 0, \forall h, h' \in h$;
- $[e_i, f_j] = \delta_{ij} \alpha_i^\vee, i, j = 1, 2, \dots, n$;
- $[h, e] = [\alpha_i, h]e_i, [h, f_i] = -[\alpha_i, h]f_i, \forall h \in h, i = 1, 2, \dots, n$;
- $[e_k, d_{ij}^\pm] = 0, [f_k, d_{ij}^\pm] = 0$.

生成的李代数称为对应于广义 Cartan 矩阵 A 的 Kac-Moody 代数, 记为 $g(A)$. 其中, $A = (a_{ij})_{n \times n}, d_{ij}^+ = (ade_i)^{1-a_{ij}}e_j, d_{ij}^- = (adf_i)^{1-a_{ij}}f_j$.

设广义 Cartan 矩阵 A 的一个实现为 $(h, \Pi, \Pi^\vee), g(A)$ 为对应于 A 的 Kac-Moody 代数, 则 h 为 $g(A)$ 的 Cartan 子代数. $g(A) = h \oplus \sum_{\alpha \in h^*} g^\alpha$ 是 $g(A)$ 关于 h 的根空间分解. $\Pi = \alpha_1, \dots, \alpha_n \subset h^*$ 和 $\Pi^\vee = \alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee \subset h^*$ 分别表示 $g(A)$ 的素根系和对偶素根系; $\Delta, \Delta^{\text{re}}, \Delta^{\text{im}}$ 分别表示根系、实根系、虚根系; $\Delta_+^{\text{im}}, \Delta_-^{\text{im}}$ 分别为正虚根集、负虚根集. $C^\vee = \lambda \in h^* \mid \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$, 为对偶基本 Weyl

房. $\mathbb{Q}_+ = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_+ \alpha_i$ 表示 $g(A)$ 的正根格.

定义 4^[3] 顶点集为 $\{1, 2, \dots, n\}$, 每一个顶点用一个小圈“ $\circ$ ”表示, 点 i 与点 j 之间用 $\max(|a_{ij}|, |a_{ji}|)$ 条边连接, 当 $|a_{ij}| > |a_{ji}|$ 时, 还要在这些边上标上一个指向 i 的箭头, 称为广义 Cartan 矩阵 A 的 Dynkin 图, 记为 $S(A)$.

1971 年, 文献[9]给出了广义 Cartan 矩阵 A 的分类, 即有限型 Fin、仿射型 Aff、不定型 Ind 这 3 类, 其相应的 Kac-Moody 代数 $g(A)$ 和 Dynkin 图 $S(A)$ 也分为有限型、仿射型和不定型.

定义 5^[3] 不可分解的不定型广义 Cartan 矩阵 A , 如果 $S(A)$ 的任一连通的真子图是有限型图或仿射型图, 则称 A 为双曲型广义 Cartan 矩阵; 如果 $S(A)$ 的任一连通的真子图是有限型图, 则称 A 为严格双曲型广义 Cartan 矩阵.

文献[4]给出了阶大于等于 3 的双曲型广义 Cartan 矩阵的所有分类, 一共有 238 个, 其中, 35 个

是严格双曲型广义 Cartan 矩阵.

定义 6^[7] 对于 λ, u, h^* , 规定 $\lambda < u$, 当且仅当 $u - \lambda \in \mathbb{Q}_+$. 在此偏序下, Δ_+^{im} 中的极小元称为极小虚根.

定义 7^[7] 对 $\delta = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i \in \Delta$, 令 $\text{supp } \delta = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid k_i \neq 0\}$. 设 $\delta \in \Delta_+^{\text{im}}$, 如果对每一个 $i \in \text{supp } \delta$, 有 $[\delta, \alpha_i^\vee] = 0$, 则称 δ 为 null 根. 若 δ 还是极小的, 称 δ 是极小 null 根.

2 极小虚根的性质

现给出极小虚根的相关性质.

设 A 是广义 Cartan 矩阵, $g(A)$ 是与之对应的

Kac-Moody 代数. 设 $\alpha = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i \in \Delta_+^{\text{im}}, k_i \in \mathbb{Z}^+$ 是 $g(A)$ 的极小虚根, $r_i(\alpha) = \alpha - [\alpha, \alpha_i^\vee] \alpha_i$. 由 α 的极小性可知 $k_i - [\alpha, \alpha_i^\vee] \geq k_i, [\alpha, \alpha_i^\vee] \leq 0$, 故有 $\alpha \in \Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^\vee)$.

性质 1^[5] $g(A)$ 的极小虚根的个数是有限的.

性质 2^[5] 设 $\alpha \in \Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^\vee)$, 并且当 $\alpha - \alpha_i \in \Delta_+$ 时, $\text{supp}(\alpha - \alpha_i)$ 是有限型图, 那么, α 必为极小虚根.

性质 3^[7] $\alpha \in \Delta_+^{\text{im}}$, 则 α 是极小虚根, 当且仅当 α 是 $\Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^\vee)$ 中的极小根.

性质 4^[7] 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为广义 Cartan 矩阵, 且对每一个 $i = 1, 2, \dots, n$, 满足条件 $-\sum_{j \neq i}^n a_{ij} \geq 2$, 则 $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \alpha \in \Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^\vee)$.

性质 5^[8] 双曲型 Kac-Moody 代数 $g(A)$ 的 Dynkin 图的每个 Aff 型连通子图确定唯一一个极小虚根, 且是 null 的.

性质 6^[8] 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为双曲型广义 Cartan 矩阵, 若 Dynkin 图 $S(A)$ 中含有 $A_1^{(1)}, A_l^{(1)}, l \geq 2, D_{l+1}^{(2)}$ 作为连通子图, 则 $g(A)$ 没有非 null 的极小虚根.

性质 7^[2] 若 A 是有限型、仿射型或者双曲型广义 Cartan 矩阵, 则其对应的 Kac-Moody 代数的虚根集为 $\Delta^{\text{im}} = \{\alpha \in \mathbb{Q}/0 \mid |\alpha|^2 \leq 0\}$.

3 四阶双曲型 Kac-Moody 代数的极小虚根

设 A 是四阶双曲型广义 Cartan 矩阵, 它们的 Dynkin 图以及序号在文献[4]中已经给出, 共有 53

个: $H_i^{(4)}, i = 1, 2, \dots, 53$. 其中, $H_8^{(4)}, H_{13}^{(4)}, H_{14}^{(4)}$ 是严格双曲型的. 设 $g(\mathbf{A})$ 是对应于广义 Cartan 矩阵 $\mathbf{A}$ 的 Kac-Moody 代数, $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 为 $g(\mathbf{A})$ 的素根系.

为了书写方便, 将根 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 \in \mathbb{Q}_+$, 简记为 (k_1, k_2, k_3, k_4) .

定理 1^[7] Dynkin 图 $S(\mathbf{A})$ 为 $H_8^{(4)}, H_{13}^{(4)}, H_{14}^{(4)}$ 的

广义 Cartan 矩阵 $\mathbf{A}$ 所对应的 Kac-Moody 代数 $g(\mathbf{A})$ 有唯一的极小虚根 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 即 $(1, 1, 1, 1)$.

定理 2 Dynkin 图 $S(\mathbf{A})$ 为 $H_i^{(4)}, i = 1, 2, \dots, 7, H_{12}^{(4)}, H_{20}^{(4)}, H_{21}^{(4)}, H_{23}^{(4)}, H_{24}^{(4)}, H_{25}^{(4)}, H_{31}^{(4)}, H_{32}^{(4)}, H_{33}^{(4)}, H_{41}^{(4)}, H_{52}^{(4)}, H_{53}^{(4)}$ 的广义 Cartan 矩阵 $\mathbf{A}$ 所对应的 Kac-Moody 代数 $g(\mathbf{A})$ 的极小虚根都是 null 根. 如表 1 所示.

表 1 Kac-Moody 代数极小虚根(I)

Tab.1 Minimal imaginary roots of Kac-Moody algebra (I)

$H_1^{(4)}$	$(1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)$	$H_2^{(4)}$	$(1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1)$
$H_3^{(4)}$	$(1, 1, 1, 0)$	$H_4^{(4)}$	$(1, 1, 1, 0)$
$H_5^{(4)}$	$(1, 1, 1, 0)$	$H_6^{(4)}$	$(1, 1, 1, 0), (1, 0, 2, 3), (0, 1, 2, 3)$
$H_7^{(4)}$	$(1, 1, 1, 0), (1, 0, 2, 1), (0, 1, 2, 1)$	$H_{12}^{(4)}$	$(1, 1, 0, 1)$
$H_{20}^{(4)}$	$(1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 2)$	$H_{21}^{(4)}$	$(1, 1, 0, 1), (0, 1, 2, 2)$
$H_{23}^{(4)}$	$(1, 1, 0, 1), (0, 1, 2, 2), (1, 2, 0, 1), (2, 1, 2, 0)$	$H_{24}^{(4)}$	$(1, 1, 0, 1), (1, 0, 2, 2), (2, 1, 2, 0), (0, 1, 1, 2)$
$H_{25}^{(4)}$	$(0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 2, 0, 1), (1, 0, 2, 1)$	$H_{31}^{(4)}$	$(1, 0, 1, 1)$
$H_{32}^{(4)}$	$(1, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)$	$H_{33}^{(4)}$	$(0, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 0)$
$H_{41}^{(4)}$	$(0, 1, 1, 1)$	$H_{52}^{(4)}$	$(0, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 0)$
$H_{53}^{(4)}$	$(1, 1, 1, 0), (0, 1, 2, 2)$		

证明 在这 19 个双曲型广义 Cartan 矩阵对应的 Dynkin 图中, 均含有 $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}$ 或 $D_3^{(2)}$ 作为其连通的 Aff 型真子图, 由性质 6 可知, 其对应的 Kac-Moody 代数 $g(\mathbf{A})$ 没有非 null 的极小虚根, 并且其任意二阶连通子图都是 Fin 型的. 现仅以 $H_1^{(4)}$ 为例, 具体计算其极小虚根, 其它情形的极小虚根可以类似计算得到.

$H_1^{(4)}$ 的 Cartan 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

它的 Dynkin 图如图 1 所示.

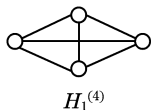


图 1 $H_1^{(4)}$ 的 Dynkin 图

Fig.1 Dynkin diagram of type of $H_1^{(4)}$

在 $H_1^{(4)}$ 的 Dynkin 图中, 所有连通的三阶真子图支集为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}, \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}, \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, 它们都是 Aff 型 $A_2^{(1)}$ 的, 由性质 6 可知, $H_1^{(4)}$ 对应的 Kac-Moody 代数没有非 null 的极小虚根; 又由性质 5 可知, 这 4 个 $A_2^{(1)}$ 型的 Aff 图分别唯一确定了一个 null 的极小虚根, 它们是 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 记为 $(1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)$. 又 $H_1^{(4)}$ 的任意连通二阶子图都是 Fin 型 A_2 的, 不存在极小虚根. 故 $H_1^{(4)}$ 所对应的 Kac-Moody 代数的极小虚根都是 null 根, 且只能为 $(1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)$.

定理 3 Dynkin 图 $S(\mathbf{A})$ 为 $H_9^{(4)}, H_{10}^{(4)}, H_{11}^{(4)}, H_{15}^{(4)}, H_{16}^{(4)}, H_{17}^{(4)}, H_{18}^{(4)}, H_{19}^{(4)}, H_{22}^{(4)}, H_{26}^{(4)}$ 的广义 Cartan 矩阵 $\mathbf{A}$ 所对应的 Kac-Moody 代数 $g(\mathbf{A})$ 的极小虚根如表 2 所示.

证明 在这 10 个双曲型广义 Cartan 矩阵对应的 Dynkin 图里都含有一个圈, 因而它们对应的

表 2 Kac-Moody 代数极小虚根(II)

Tab.2 Minimal imaginary roots of Kac-Moody algebra (II)

$H_9^{(4)}$	$(3, 2, 0, 1), (2, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)$	$H_{10}^{(4)}$	$(1, 2, 2, 0), (1, 1, 1, 1)$
$H_{11}^{(4)}$	$(1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 1)$	$H_{15}^{(4)}$	$(1, 2, 0, 1), (2, 3, 1, 0), (0, 1, 1, 2), (1, 0, 2, 3), (1, 1, 1, 1)$
$H_{16}^{(4)}$	$(2, 1, 1, 0), (3, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 1)$	$H_{17}^{(4)}$	$(1, 2, 0, 1), (2, 3, 1, 0), (0, 1, 1, 2), (1, 0, 2, 3), (1, 1, 1, 1)$
$H_{18}^{(4)}$	$(1, 2, 0, 1), (2, 3, 0, 1), (1, 0, 2, 1), (0, 1, 3, 2), (1, 1, 1, 1)$	$H_{19}^{(4)}$	$(2, 2, 0, 1), (0, 2, 1, 2), (1, 1, 1, 1)$
$H_{22}^{(4)}$	$(1, 2, 0, 2), (0, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1)$	$H_{26}^{(4)}$	$(1, 0, 2, 2), (2, 1, 2, 0), (2, 2, 0, 1), (0, 2, 1, 2), (1, 1, 1, 1)$

Cartan 矩阵的元素满足性质 4 的条件, 所以, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha \in \Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^V)$. 又其二阶、三阶连通真子图为 Fin 型或 Aff 型的, 不存在虚根或非 null 极小虚根, 由性质 3 可知, $\alpha = (1, 1, 1, 1)$ 是极小虚根. 对于其 null 的极小虚根, 现以 $H_9^{(4)}$ 为例进行计算. 其它情形的极小虚根可以类似计算得到.

$H_9^{(4)}$ Cartan 矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

它的 Dynkin 图如图 2 所示.

$H_9^{(4)}$ 的 Dynkin 图中有 2 个连通的 Aff 型真子图 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$, 它们分别是 Aff 型 $D_4^{(3)}$ 和 $G_2^{(1)}$ 的 Dynkin, 因此, 由性质 5 可知, 可以唯



$H_9^{(4)}$

图 2 $H_9^{(4)}$ 的 Dynkin 图

Fig. 2 Dynkin diagram of type of $H_9^{(4)}$

一确定一个 null 的极小虚根, 分别为 $(2, 1, 1, 0), (3, 2, 0, 1)$; 对真子图 $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}, \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$ 为有限型 A_3 的, 不存在极小虚根; 对于二阶的真子图均是 Fin 型的, 不存在极小虚根. 故 $H_9^{(4)}$ 所对应的 Kac-Moody 代数的极小虚根分别为 $(3, 2, 0, 1), (2, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)$.

定理 4 Dynkin 图 $S(A)$ 为 $H_i^{(4)} (27 \leq i \leq 30), H_k^{(4)} (34 \leq k \leq 40), H_j^{(4)} (42 \leq j \leq 51)$ 的广义 Cartan 矩阵 A 所对应的 Kac-Moody 代数 $g(A)$ 的极小虚根如表 3 所示.

表 3 Kac-Moody 代数极小虚根(III)

Tab. 3 Minimal imaginary roots of Kac-Moody algebra (III)

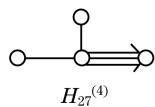
$H_{27}^{(4)}$	$(1, 0, 2, 3), (0, 1, 2, 3), (1, 1, 2, 2)$	$H_{28}^{(4)}$	$(1, 0, 2, 1), (0, 1, 2, 1)$
$H_{29}^{(4)}$	$(1, 0, 2, 2), (1, 1, 2, 1)$	$H_{30}^{(4)}$	$(1, 0, 2, 1)$
$H_{34}^{(4)}$	$(1, 2, 2, 0), (0, 2, 2, 1), (1, 0, 2, 1), (1, 1, 2, 1)$	$H_{35}^{(4)}$	$(1, 1, 2, 0), (0, 1, 2, 1), (1, 0, 2, 1)$
$H_{36}^{(4)}$	$(0, 1, 2, 3)$	$H_{37}^{(4)}$	$(0, 1, 2, 1)$
$H_{38}^{(4)}$	$(1, 2, 1, 0), (0, 3, 2, 1)$	$H_{39}^{(4)}$	$(0, 1, 2, 1)$
$H_{40}^{(4)}$	$(0, 1, 2, 2)$	$H_{42}^{(4)}$	$(0, 2, 2, 1)$
$H_{43}^{(4)}$	$(1, 2, 1, 0)$	$H_{44}^{(4)}$	$(1, 2, 1, 0)$
$H_{45}^{(4)}$	$(3, 2, 1, 0), (1, 1, 1, 1)$	$H_{46}^{(4)}$	$(3, 2, 1, 0), (2, 2, 2, 1)$
$H_{47}^{(4)}$	$(1, 2, 1, 0), (0, 1, 2, 3)$	$H_{48}^{(4)}$	$(0, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 0)$
$H_{49}^{(4)}$	$(0, 1, 2, 3), (3, 2, 1, 0), (1, 1, 1, 1)$	$H_{50}^{(4)}$	$(1, 2, 2, 0), (0, 1, 2, 2)$
$H_{51}^{(4)}$	$(1, 2, 2, 0), (0, 1, 2, 1)$		

证明 在这 21 个四阶双曲型广义 Cartan 矩阵中, 每个连通的 Aff 型子图可以唯一确定一个 null 的极小虚根; 对非 null 的极小虚根(如果有的话), 由性质 3 可知, 只需找出 $\Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^V)$ 中的极小根 α , 即为极小虚根. 现以 $H_{27}^{(4)}, H_{28}^{(4)}$ 为例给出具体的证明过程, 其它的类似可以求得.

$H_{27}^{(4)}$ 的 Cartan 矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

它的 Dynkin 图如图 3 所示.



$H_{27}^{(4)}$

图 3 $H_{27}^{(4)}$ 的 Dynkin 图

Fig. 3 Dynkin diagram of type of $H_{27}^{(4)}$

$H_{27}^{(4)}$ 的 Dynkin 图中有 2 个连通的 Aff 型真子图 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}, \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, 它们都是 $G_2^{(1)}$ 型的 Aff 图, 由性质 5 可知, 由它们可以唯一确定一个 null 的极小虚根, 分别是 $\gamma_1 = (1, 0, 2, 3)$ 和 $\gamma_2 = (0, 1, 2, 3)$; 另外, $H_{27}^{(4)}$ 的二阶连通真子图都是 Fin 型的, 没有虚根.

考虑支集为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 的虚根, 设 $\alpha =$

$\sum_{i=1}^4 k_i \alpha_i \in \mathbb{Q}_+, k_i \neq 0, i = 1, 2, 3, 4$, 若 α 为极小虚根, 则有 $\alpha \in -C^V$, 即

$$\begin{cases} \langle \alpha, \alpha_1^\vee \rangle = 2k_1 - k_3 \leq 0 \\ \langle \alpha, \alpha_2^\vee \rangle = 2k_2 - k_3 \leq 0 \\ \langle \alpha, \alpha_3^\vee \rangle = -k_1 - k_2 + 2k_3 - k_4 \leq 0 \\ \langle \alpha, \alpha_4^\vee \rangle = -3k_3 + 2k_4 \leq 0 \end{cases}$$

可以得到, $2k_1 \leq k_3 \leq \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_4), 2k_2 \leq k_3,$

$3k_3 \geq 2k_4, k_i \in \mathbb{Z}_+ / \{0\}$.

现取 $\alpha = (1, 1, 2, 2)$, 有 $\alpha \in \Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^V)$. 对

$\Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^\vee)$ 中支集为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 任意一根 $\alpha' = (k_1 k_2 k_3 k_4)$, $\alpha' - \alpha = (k_1 - 1, k_2 - 1, k_3 - 2, k_4 - 2)$. 因为

$$k_1, k_2 > 0, k_1 - 1, k_2 - 1 \in \mathbb{Z}_+, k_3 - 2 \geq 2k_2 - 2 \in \mathbb{Z}_+, \\ k_4 - 2 \geq 2k_3 - k_2 - k_2 - 2 \geq k_3 - 2 \in \mathbb{Z}_+$$

由此推出 $\alpha' - \alpha \in \mathbb{Q}_+$, 即 $\alpha' > \alpha$, 又显然 $\alpha - \gamma_i \notin \mathbb{Q}_+$, $i = 1, 2$, 所以, α 是 $\Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^\vee)$ 中的极小根, 由性质 3 可知, $\alpha = (1, 1, 2, 2)$ 是 $H_{27}^{(4)}$ 对应的 Kac-Moody 代数的极小虚根. 故 $H_{27}^{(4)}$ 对应的 Kac-Moody 代数的极小虚根为 $(1, 0, 2, 3), (0, 1, 2, 3), (1, 1, 2, 2)$.

$H_{28}^{(4)}$ 的 Cartan 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

它的 Dynkin 图如图 4 所示.

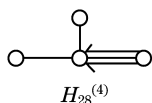


图 4 $H_{28}^{(4)}$ 的 Dynkin 图

Fig. 4 Dynkin diagram of type of $H_{28}^{(4)}$

$H_{28}^{(4)}$ 的 Dynkin 图中有 2 个连通的 Aff 型真子图 $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}, \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, 确定的 null 的极小虚根为 $(1, 0, 2, 1)$ 和 $(0, 1, 2, 1)$; 另外, $H_{28}^{(4)}$ 的二阶连通真子图都是 Fin 型的, 没有虚根.

考虑支集为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 的虚根, 若 $\beta =$

$\sum_{i=1}^4 k_i \alpha_i \in \mathbb{Q}_+, k_i \neq 0, i = 1, 2, 3, 4$ 为极小虚根, 则有 $\beta \in -C^\vee$, 即

$$\begin{cases} \langle \beta, \alpha_1^\vee \rangle = 2k_1 - k_3 \leq 0 \\ \langle \beta, \alpha_2^\vee \rangle = 2k_2 - k_3 \leq 0 \\ \langle \beta, \alpha_3^\vee \rangle = -k_1 - k_2 + 2k_3 - 3k_4 \leq 0 \\ \langle \beta, \alpha_4^\vee \rangle = -k_3 + 2k_4 \leq 0 \end{cases}$$

可以得到, $2k_1 \leq k_3 \leq \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + 3k_4), 2k_2 \leq k_3, k_3 \geq 2k_4, k_i \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$.

现取 $\beta = (1, 1, 2, 1)$, 有 $\beta \in \Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^\vee)$. 对 $\Delta_+^{\text{im}} \cap (-C^\vee)$ 中支集为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 的任意一根 $\beta' = (k_1 k_2 k_3 k_4)$, $\beta' - \beta = (k_1 - 1, k_2 - 1, k_3 - 2, k_4 - 1)$. 因为, $k_1, k_2, k_4 > 0 \Rightarrow k_1 - 1, k_2 - 1, k_4 - 1 \in \mathbb{Z}_+, k_3 - 2 \geq 2k_2 - 2 \in \mathbb{Z}_+$, 得 $\beta' - \beta \in \mathbb{Q}_+$, 所以, $\beta' \geq \beta$, 但显然有 $(1, 0, 2, 1) < (1, 1, 2, 1)$, 故 β 不是极小虚根. 因此, $H_{28}^{(4)}$ 对应的 Kac-Moody 代数的极小虚根为 $(1, 0, 2, 1), (0, 1, 2, 1)$, 且均是 null 的.

至此, 四阶双曲型 Kac-Moody 代数的极小虚根已经全部给出.

参考文献:

- [1] 万哲先. Kac-Moody 代数导引[M]. 北京: 科学教育出版社, 1993.
- [2] Kac V G. Infinite dimensional Lie algebras[M]. 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.
- [3] 万哲先, 卢才辉. Kac-Moody 代数简介[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 1988, 9(1): 1-12.
- [4] Li Wanglai. Classification of generalized Cartan matrices of hyperbolic type[J]. Chin Ann of Math, 1988, 9B(1): 68-77.
- [5] 张贺春. Kac-Moody 代数的虚根系[J]. 数学学报, 1990, 33(1): 1-6.
- [6] 张贺春. 关于虚根的几个注记[J]. 科学通报, 1994, 39(4): 295-297.
- [7] 胡建华, 刘国华. 有限域上型 A1 的 Chevalley 群之间的同态[J]. 上海理工大学学报, 2009, 31(4): 307-310.
- [8] 朱林生. 双曲型李代数的极小虚根[J]. 首都师范大学学报(自然科学版), 1993, 14(2): 32-36.
- [9] Vinberg E B. Discrete linear groups generated by reflections [J]. Izvestija AN USSR, 1971(35): 1072-1112.

(编辑: 石 瑛)