

文章编号:1007-6735(2013)06-0536-05

R -左可消么半群上的正规 Rees 矩阵半群

刘皖平, 李慧明

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 应用 R -左可消么半群的概念, 推广零群上的 Rees 矩阵半群和广义 Rees 矩阵半群, 引进 R -左可消么半群上正规 Rees 矩阵半群. 讨论 R -左可消么半群上正规 Rees 矩阵半群的性质与结构特征, 证明这类矩阵半群是本原可分 wrpp 半群, 也是完全 $0-J^{**}$ -单 wrpp 半群. 这些结果部分推广了么半群、可消么半群及左可消么半群上 Rees 矩阵半群的性质和结构的相应结论.

关键词: (正规)Rees 矩阵半群; R -左可消么半群; 本原左可分 wrpp 半群; 完全 $0-J^{**}$ -单 wrpp 半群

中图分类号: O 152.7

文献标志码: A

Normal Rees Matrix Semigroups over R -left Cancellative Monoid

LIU Wan-ping, LI Hui-ming

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The Rees matrix semigroups over 0-group and generalized Rees matrix semigroups were developed by applying the concept of R -left cancellative monoid. The normal Rees matrix semigroups over R -left cancellative monoid was introduced. Its nature and structure were discussed and it is proved that the normal Rees matrix semigroup over R -left cancellative monoid is primitively decomposable wrpp semigroup, and is also completely $0-J^{**}$ -simple wrpp semigroup. These results partly extend the conclusion about the nature and structure of Rees matrix semigroups over monoids, cancellative monoids and left cancellative semigroups.

Key words: (normal) Rees matrix semigroups; R -left cancellative monoid; primitively decomposable wrpp semigroup; completely $0-J^{**}$ -simple wrpp semigroup

并证明了以下结论.

引理 1 在半群 S 上有:

a. $(a, b \in S) a L^{**} b \Leftrightarrow$

$(x, y \in S^1)(ax, ay) \in R \Leftrightarrow (bx, by) \in R;$

b. 格林 ** -关系都是 S 上等价关系;

c. L^{**} 是 S 上右同余, 且 $L \subseteq L^* \subseteq L^{**},$

1 预 备

作为格林关系的推广, 文献[1-2]引进半群 S 上格林 ** -关系 $L^{**}, R^{**}, J^{**}, D^{**} = L^{**} \vee R^{**},$

收稿日期: 2013-01-20

第一作者: 刘皖平(1988-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 代数学序半群理论. E-mail: 824523932@qq.com

$$L^{**} \mid_{\text{Reg}(S)} = L;$$

$$\text{d. } (a \in S, e \in E(S)) a L^{**} e \Leftrightarrow a = ae, \\ (\forall x, y \in S^1)(ax, ay) \in R \Rightarrow (ex, ey) \in R;$$

$$\text{e. } D \subseteq D^* \subseteq D^{**}, D^{**} \mid_{\text{Reg}(S)} = D.$$

引理 2 在半群 S 上有:

a. $(a, b \in S) a L^{**} b \Leftrightarrow L^{**}(a) = L^{**}(b)$, 这里 $(x \in S) L^{**}(x)$ 表示由元 x 生成的左 ** -理想;

b. $(x \in S) L^{**}(x) = \bigcup \{L(a) \mid a \in L_x^{**}\}$, $J^{**}(x) = \bigcup \{J(a) \mid a \in J_x^{**}\}$. 这里 $J^{**}(x)$ 表示由元 x 生成的 ** -理想, J_x^{**} 表示 x 所在的 J^{**} -类.

$$\text{c. } (\forall f \in E(S)) L^{**}(f) = S^1 f, J^{**}(f) = S f S.$$

文献[1]称半群 S 是 wrpp 半群, 如果 S 的每一 L^{**} -类 $(\forall a \in S) L_a^{**}$ 至少含有 S 的一个幂等元, 且对 $\forall e \in E(L_a^{**}), a = ae$, 其中 $E(L_a^{**})$ 是 L_a^{**} 的幂等元集. wrpp 半群 S 称为 C-wrpp 半群, 若 S 的幂等元都在 S 的中心里, 即 $E(S) \subseteq C(S)$.

若半群 S 的左右非零幂等元 e 都是本原的, 则称 S 为本原半群. 文献[3]引进 rpp 半群与本原左(右)可分 rpp 半群. 文献[4]证明了本原可分 rpp 半群的结构定理. 推广了文献[3-5]中的相应结论. 文献[1]强调文献[3]中的 rpp 半群是 wrpp 半群, 但反之不必.

文献[1]还引进 R -左可消么半群, 证明了左可消么半群是 R -左可消么半群, 反之不必. R -左可消么半群 M 为 C-wrpp 半群. 它含有唯一的幂等元, 也只含有一个 L^{**} -类, 且在 M 上 $L^{**} = D^{**} = J^{**}$. 本文其它的一些基本概念与符号参见文献[5-11], R -左可消么半群的性质可参见文献[6].

任给半群 T , 非空足码集 I, Λ 以及 T 上一个 $\Lambda \times I$ 矩阵 $P = (p_{\lambda i})_{\Lambda \times I}$. 令集合

$$S = \mu(T; I, \Lambda, P) = \{(x)_{i\lambda} \mid \forall x \in T, \\ (i, \lambda) \in I \times \Lambda\}$$

称 $(x)_{i\lambda}$ 为形式矩阵. 对 $\forall (x)_{i\lambda}, (y)_{j\delta} \in \mu(T; I, \Lambda, P)$, 规定:

$$(x)_{i\lambda} = (y)_{j\delta} \Leftrightarrow x = y, (i, \lambda) = (j, \delta)$$

在 $\mu(T; I, \Lambda, P)$ 上规定二元运算

$$\forall (x)_{i\lambda}, (y)_{j\delta} \in \mu(T; I, \Lambda, P), \\ (x)_{i\lambda} \circ (y)_{j\delta} \triangleq (xp_{\lambda j}y)_{i\delta}$$

引理 3 $\mu(T; I, \Lambda, P)$ 关于以上运算构成半群, 称其为 T 上的 Rees 矩阵半群.

易验证 $[(a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu}] \circ (c)_{kl} = (ap_{\lambda j}bp_{\mu k}c)_{il} = (a)_{i\lambda} \circ [(b)_{j\mu} \circ (c)_{kl}]$ 成立, 从而引理 3 成立. 由此引进以下概念.

定义 1 设 M 是 R -左可消么半群, 称 $M^0 = M \cup \{0\}$ 为 0R -左可消么半群. 称 Rees 矩阵半群 $S = \mu(M_a^0; I, \Lambda, P)$ 为 R -左可消么半群上 Rees 矩阵半群. 若矩阵 $P = (p_{\lambda i})_{\Lambda \times I}$ 的每行每列均有 M 中的(群)可逆元, 则称 P 为一个正规矩阵. 若 R -左可消么半群上 Rees 矩阵半群 $S = \mu(M_a^0; I, \Lambda, P)$ 中矩阵 P 是正规矩阵, 则称 $S = \mu(M_a^0; I, \Lambda, P)$ 为 R -左可消么半群上的正规 Rees 矩阵半群.

显然, 零群与零左可消么半群均为 0R -左可消么半群. 反之不必^[1]. 故由定义 1 和文献[3]及文献[5]中定义知, 零群或零左可消么半群上的正规 Rees 矩阵半群是 R -左可消么半群上的正规 Rees 矩阵半群; 反之不必.

2 R -左可消么半群上的正规 Rees 矩阵半群的性质

以下内容中 $S = \mu(M_a^0; I, \Lambda, P)$ 都表示 R -左可消么半群上的正规 Rees 矩阵半群. e 表示 M 中的么元. 记 $0 = (0)_{i\lambda} (\forall i \in I, \lambda \in \Lambda)$, 显然它成为 S 中的唯一零元. 显然 $\{0\}$ 是 S 的一个 L^{**} -类 (D^{**} -类, J^{**} -类). 以下仅对非零元讨论等价类^[7-8].

性质 1 对 $S = \mu(M_a^0; I, \Lambda, P)$, 以下结论成立:

$$\text{a. } E(S) = \{(p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} \in S \mid \forall \lambda \in \Lambda, \exists i \in I, \\ \forall i \in I, \exists \lambda \in \Lambda\} \cup \{0\} \triangleq E^*(S) \cup \{0\};$$

$$\text{b. 两个非零元 } (a)_{i\lambda}, (b)_{j\mu} \in S, (a)_{i\lambda} L^{**}(b)_{j\mu} \Leftrightarrow \lambda = \mu;$$

$$\text{c. } S \text{ 的所有非零幂等元属于同一个 } D\text{-类};$$

$$\text{d. } S \text{ 为本原 wrpp 半群.}$$

证明 a. 设 $(a)_{i\lambda} \in E^*(S)$, 由 $(a)_{i\lambda}^2 = (ap_{\lambda i}a)_{i\lambda} = (a)_{i\lambda}$, $ap_{\lambda i}a = a$, 得 $(ap_{\lambda i}a)M = aM$. 因 M 是 R -左可消么半群, 得 $(p_{\lambda i}a)M = eM$, 于是 $\exists u \in M, \exists (up_{\lambda i})a = (p_{\lambda i}a)u = p_{\lambda i}(au) = e$. 故 $p_{\lambda i}a$ 可逆, 进而 a 和 $p_{\lambda i}$ 均可逆且 $u = (p_{\lambda i}a)^{-1} = a^{-1}p_{\lambda i}^{-1}$. 由 $ap_{\lambda i}a = a$, 得

$$a^{-1} = (ap_{\lambda i}a)^{-1} = a^{-1}p_{\lambda i}^{-1}a^{-1} \Rightarrow \\ e = p_{\lambda i}^{-1}a^{-1} \Rightarrow a = p_{\lambda i}^{-1}$$

$$\text{b. 由以上结论 a, 对 } 0 \neq (a)_{i\lambda} \in S$$

$$\lambda \in \Lambda, \exists l \in I, \exists (p_{\lambda l}^{-1})_{l\lambda} \in E^*(S),$$

$$(a)_{i\lambda} \circ (p_{\lambda l}^{-1})_{l\lambda} = (ap_{\lambda l}p_{\lambda l}^{-1})_{i\lambda} = (a)_{i\lambda}$$

因 M 是 R -左可消么半群, 于是对 $\forall (x)_{k\gamma}, (y)_{h\delta} \in S^1$, 若

$$\begin{aligned}
& ((a)_{\lambda} \circ (x)_{ky}, (a)_{\lambda} \circ (y)_{h\delta}) \in R \Rightarrow ((a)_{\lambda} \circ \\
& (p_{\lambda 1}^{-1})_{\lambda} \circ (x)_{ky}, (a)_{\lambda} \circ (p_{\lambda 1}^{-1})_{\lambda} \circ (y)_{h\delta}) \in R \Rightarrow \\
& (ap_{\lambda l} p_{\lambda l}^{-1} p_{\lambda k} x)M = (ap_{\lambda l} p_{\lambda l}^{-1} p_{\lambda h} y)M \Rightarrow \\
& (p_{\lambda l}^{-1} p_{\lambda k} x)M = (p_{\lambda l}^{-1} p_{\lambda h} y)M \Rightarrow \\
& ((p_{\lambda l}^{-1})_{\lambda} \circ (x)_{ky}, (p_{\lambda l}^{-1})_{\lambda} \circ (y)_{h\delta}) \in R
\end{aligned}$$

由引理 1 中 d 知 $(a)_{\lambda} L^{**} (p_{\lambda l}^{-1})_{\lambda}$ 充分性) 若两个非零元有关系 $(a)_{\lambda} L^{**} (b)_{j\mu}$, 则 $\exists (p_{\lambda l}^{-1})_{\lambda} \in E^*(S)$, $\exists (a)_{\lambda} L^{**} (p_{\lambda l}^{-1})_{\lambda} L^{**} (b)_{j\mu}$, 由引理 1 知有 $(b)_{j\mu} = (b)_{j\mu} \circ (p_{\lambda l}^{-1})_{\lambda}$, 比较足码即得 $\lambda = \mu$; 必要性) 若 $\lambda = \mu$, 则由以上证明得 $(a)_{\lambda} L^{**} (p_{\lambda l}^{-1})_{\lambda} L^{**} (b)_{j\mu}$.

c. 对 $\forall (p_{\lambda i}^{-1})_{\lambda}, (p_{\mu j}^{-1})_{j\mu} \in E^*(S)$, 由 $(p_{\lambda i}^{-1})_{i\mu} \circ (p_{\mu j}^{-1})_{j\lambda} = (p_{\lambda i}^{-1} p_{\mu j} p_{\mu j}^{-1})_{\lambda} = (p_{\lambda i}^{-1})_{\lambda}$, $(p_{\lambda i}^{-1})_{\lambda} \circ (p_{\mu j}^{-1})_{i\mu} = (p_{\lambda i}^{-1} p_{\mu j} p_{\lambda i}^{-1})_{i\mu} = (p_{\mu j}^{-1})_{i\mu}$ 知, $\exists (p_{\lambda i}^{-1})_{i\mu} \in E^*(S)$, $\exists (p_{\mu j}^{-1})_{i\lambda} R (p_{\lambda i}^{-1})_{i\mu}$. 又由结论 b 知 $(p_{\lambda i}^{-1})_{i\mu} L (p_{\mu j}^{-1})_{j\mu}$. 从而

$$(p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} R (p_{\mu j}^{-1})_{i\mu} L (p_{\mu j}^{-1})_{j\mu} \Rightarrow (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} D (p_{\mu j}^{-1})_{j\mu}$$

d. 先证 S 为本原半群. 设 $(a)_{\lambda} \in E^*(S)$, 若有 $(b)_{j\mu} \in E^*(S)$, $\exists (b)_{j\mu} \leq_n (a)_{\lambda}$, 那么

$$\begin{aligned}
& (a)_{\lambda} \circ (b)_{j\mu} = (b)_{j\mu} \circ (a)_{\lambda} = (b)_{j\mu} \Rightarrow \\
& (ap_{\lambda j} b)_{i\mu} = (bp_{\mu i} a)_{j\lambda}
\end{aligned}$$

因此有 $i = j, \mu = \lambda$ 且有 $ap_{\lambda j} b = bp_{\lambda j} a$, 从而 $a = p_{\lambda i}^{-1} b$, 故每一非零幂等元都是本原的, 即 S 为本原半群.

再证 S 为 wrpp 半群. 由性质 1 知, 对 $0 \neq (a)_{\lambda} \in S$, $\exists (p_{\lambda i}^{-1})_{\lambda} \in E^*(S)$, $\exists (a)_{\lambda} L^{**} (p_{\lambda i}^{-1})_{\lambda}$, 且对 $\forall (p_{\lambda j}^{-1})_{j\lambda} \in E(L_{(a)_{\lambda}}^{**})$, $(a)_{\lambda} \circ (p_{\lambda j}^{-1})_{j\lambda} = (ap_{\lambda j} p_{\lambda j}^{-1})_{\lambda} = (ae)_{\lambda} = (a)_{\lambda}$. 由定义知 S 为 wrpp 半群. 综上得结论成立.

性质 2 令 $G = \{x \in M \mid \exists x^{-1}\}$, $\bar{G} = M^0 \setminus G$, $G^0 = G \cup \{0\}$, $S_{G^0} = \{(x)_{\lambda} \mid x \in G^0\}$, $S_{\bar{G}} = \{(x)_{\lambda} \mid x \in \bar{G}\}$, 则有:

- G 是 M 的子群, $\bar{G}$ 是 M^0 的理想;
- S_{G^0} 是 S 的完全 0-单子半群, 且 $E(S) \subseteq S_{G^0}$;
- $S_{\bar{G}}$ 是 S 的理想, 但不是 S 的 $**$ -理想;
- 若 $G = \{e\}$, 则 $S_{G^0} = E(S) = \{(e)_{\lambda} \in S \mid \forall \lambda \in \Lambda, \exists i \in I, \forall i \in I, \exists \lambda \in \Lambda\} \cup \{0\}$.

证明: a. 因 M 的幺元 e 是 G 的幺元, G 中任意元可逆, 从而任两个可逆元之积仍可逆, 故 G 是 M 子群. 对 $\forall x, y \in \bar{G}$, 因它们均不可逆, 从而它们的乘积也不可逆. 即 $xy \in \bar{G}$, $\bar{G}$ 是 M^0 的子半群. 同理, 对 $\forall x \in \bar{G}, g \in G, xg, gx \in \bar{G}$. 故 $\bar{G}$ 是 M^0 的理想.

b. 由文献[5], 群 G 上的正规 Rees 矩阵半群 S_{G^0} 是完全 0-单子半群. $E(S) \subseteq S_{G^0}$ 易见.

c. 由结论 a, $\bar{G}$ 是 M^0 的理想, 于是对 $\forall (a)_{\lambda} \in S_{\bar{G}}, (x)_{j\mu} \in S, (a)_{\lambda} (x)_{j\mu} = (ap_{\lambda j} x)_{j\mu} \in S_{\bar{G}} (\because ap_{\lambda j} x \in \bar{G})$

$(x)_{j\mu} (a)_{\lambda} = (xp_{\mu i} a)_{j\lambda} \in S_{\bar{G}} (\because xp_{\mu i} a \in \bar{G})$ 故 $S_{\bar{G}}$ 是 S 的理想. 再由性质 1, 性质 2 中 b 与 wrpp 半群定义知, $S_{\bar{G}}$ 不是 wrpp 的. 于是必有 $(x)_{\lambda} \in S_{\bar{G}}$, 使得 $E(J_{(x)_{\lambda}}^{**}) \cap S_{\bar{G}} = \phi$. 但由性质 1 中 d 知, S 是 wrpp 的, 从而 $E(J_{(x)_{\lambda}}^{**}) \neq \phi$. 故有 $J_{(x)_{\lambda}}^{**} \not\subseteq S_{\bar{G}}$, 即 $S_{\bar{G}}$ 不是 S 的 $**$ -理想.

d. 由性质 1 中 a, 即得.

仿性质 2 可证以下结果. 这里略去大部分证明.

性质 3 令 $M_l = \{x \in M \mid x \text{ 为左可消元}\}$,

$\bar{M}_l = M^0 \setminus M_l, M_l^0 = M_l \cup \{0\}, S_{M_l^0} = \{(x)_{\lambda} \mid x \in M_l^0\}, S_{\bar{M}_l} = \{(x)_{\lambda} \mid x \in \bar{M}_l\}$, 则有:

- M_l 是 M 的左可消元子半群, $\bar{M}_l$ 是 M^0 的理想;
- $S_{M_l^0}$ 是 S 的完全 0- J^* -单 rpp 子半群, 且 $E(S) \subseteq S_{M_l^0}$;
- $S_{\bar{M}_l}$ 是 S 的理想, 但不是 S 的 $**$ -理想;
- 若 S 对 $\forall (x)_{\lambda} \in S_{\bar{M}_l} E(J_{(x)_{\lambda}}^{**}) = \phi$, 则 $S_{\bar{M}_l}$ 是 S 的 $*$ -理想.

证明 只证 c, d.

c. 仿性质 2 可证 $S_{\bar{M}_l}$ 是 S 的理想, 但不是 S 的 $**$ -理想. 故结论 c 成立.

d. 即证 $S_{\bar{M}_l}$ 是 S 的 $*$ -理想. 设 $(x)_{\lambda} \in S_{\bar{M}_l}$, 由 $S_{\bar{M}_l}$ 是 S 的理想得 $J^*((x)_{\lambda}) \subseteq S_{\bar{M}_l}$. 另一方面, 由题条件, 结合结论 b 与文献[3]中平行于引理 2 的结果知, 对 $(a)_{\lambda} \in J_{(x)_{\lambda}}^{**}, J^*((a)_{\lambda}) = J^*((x)_{\lambda}) \Rightarrow \exists (b \in J_{(x)_{\lambda}}^{**}, \exists (a)_{\lambda} \in S^1 (b S^1 \subseteq J^*((x)_{\lambda}) \subseteq S_{\bar{M}_l}$, 即 $J_{(x)_{\lambda}}^{**} \subseteq S_{\bar{M}_l}$. 故 S 的理想 $S_{\bar{M}_l}$ 是 $*$ -理想.

3 R -左可消元半群上的正规 Rees 矩阵半群的结构特征

研究 R -左可消元半群上的正规 Rees 矩阵半群 $S = {}_{\mu}(M_{\alpha}^0; I, \Lambda, P)$ 的结构.

定义 2 半群 S 称为左(右)本原可分的, 若 S 可以表示为

$$\bigcup \{Se_{\lambda}; \lambda \in \Lambda\} \cup \{e_i S; i \in I\}$$

其中所有 e_{λ} 和 e_i 都是本原幂等元, 所有 $Se_{\lambda} (e_i S)$ 都 S^1 -系同构. 半群 S 称为本原可分的, 如果它既

是左本原可分的,又是右本原可分的.

定义 3 S 是完全 $0-J^{**}$ -单 wrpp 半群,若半群 S 是完全半群,且 S 的非零 J^{**} -理想只有它本身.

引理 4 设 H 为有零元本原 wrpp 半群, $0 \neq e \in E(H)$, 则有:

- a. He 是 H 的极小 $0-J^{**}$ -理想;
- b. HeH 是 H 的极小 $0-J^{**}$ -理想.

证明 a 显然 He 是 H 的 $0-J^{**}$ -理想. 设 $a \in He$, $\forall x \in L_a^{**}$, 则由 He 是 H 的 $0-J^{**}$ -理想, 知

$a = ae \Rightarrow L^{**}(a) = L^{**}(x) \subseteq He \Rightarrow x \in He$. 即 He 是 H 的 $0-J^{**}$ -理想. 设 K 是 H 的任一非零 $0-J^{**}$ -理想且 $K \subseteq He$. 则 $\exists 0 \neq a \in K$, $\exists L^{**}(a) \subseteq K$. 由于 H 是 wrpp 半群, 故 $\exists 0 \neq f \in L_a^{**}$. 于是有 $Hf = L^{**}(f) = L^{**}(a) \subseteq K \subseteq He$, 导致 $f \in He$. 从而有 $f = fe \Rightarrow (ef)^2 = efef = ef \in E(H)$ 且 $ef \leq_n e$. 因 e 是本原幂等元, 故 $ef = 0$ 或 $ef = e$. 若是前者, 则 $f = ff = fef = 0$, 不可. 故后者成立. 结合 $fe = f$, $ef = e$ 得 eLf . 由引理 1、引理 2 得: $He = Hf = L^{**}(a) \subseteq K \subseteq He \Rightarrow K = He$ 即 He 是 H 的极小 $0-J^{**}$ -理想.

b. 显然 HeH 是 H 的 $0-J^{**}$ -理想. 设 $a \in HeH$, $\forall x \in J_a^{**}$, 则由 HeH 是 H 的 $0-J^{**}$ -理想, 知

$$J^{**}(a) = J^{**}(x) \subseteq HeH \Rightarrow x \in HeH \Rightarrow J_a^{**} \subseteq HeH$$

即 HeH 是 H 的 $0-J^{**}$ -理想. 设 K 是 H 的任一非零 $0-J^{**}$ -理想且 $K \subseteq HeH$. 则 $\exists 0 \neq a \in K$, $\exists J^{**}(a) \subseteq K$. 由于 H 是 wrpp 半群, 故 $\exists 0 \neq f \in L_a^{**} \subseteq J_a^{**}$. 于是有 $HfH = J^{**}(f) = J^{**}(a) \subseteq K \subseteq HeH$, 导致 $f \in HeH$. 从而有

$f = fef \Rightarrow (ef)^2 = efef = ef \in E(H)$ 且 $ef \leq_n e$. 因 e 是本原幂等元, 故 $ef = 0$ 或 $ef = e$. 若是前者, 则 $f = ff = fef = 0$, 不可. 故后者成立. 结合 $fe = f$, $ef = e$ 得 eLf . 由引理 1、引理 2 得: $HeH = HfH = J^{**}(a) \subseteq K \subseteq HeH \Rightarrow K = HeH$. 即 HeH 是 H 的极小 $0-J^{**}$ -理想.

引理 5^[4] 对任意半群 H , $x, y \in E(H)$ 有以下各条等价:

- a. $x D y$;
- b. xH, yH 是右 H^1 -系同构的;
- c. Hx, Hy 是左 H^1 -系同构的.

引理 6^[2] 在有零元本原 wrpp 半群 H 上, $J^{**} = D^{**} (= L^{**} \vee R^{**})$.

证明 显然 $\{0\}$ 是 H 的一个 D^{**} -类, 其它

D^{**} -类包含于 $H \setminus \{0\}$. 令 $D_a^{**} (a \in H)$ 为 H 的一个非零 D^{**} -类, 则 $a \neq 0$ 且由文献[2]知 $D_a^{**} \subseteq J_a^{**}$. 取 $x \in J_a^{**}$, 由引理 1, 存在本原幂等元 $e \in L_a^{**}$, $f \in D_e = L_e \vee R_e$, 使得

$$eL^{**}x, \exists y \in S, \exists eLyRf \Rightarrow xL^{**}yR^{**}f \Rightarrow x \in D_f^{**} = D_e^{**} \subseteq D_a^{**} \Rightarrow J_a^{**} \subseteq D_a^{**}$$

综合得 $J^{**} = D^{**}$.

引理 7 在有零元本原 wrpp 半群 H 上, 以下各条等价:

- a. H 是本原可分的;
- b. H 是右本原可分的.

证明 只需证 $b \Rightarrow a$. 设 H 是右本原可分的. 因 H 是 wrpp 半群, 故 H 可表为

$$H = \bigcup \{L_f^{**} \mid f \in E(H)\}$$

由引理 4, 对 $0 \neq e \in E(H)$, He 是 H 的极小 $0-J^{**}$ -理想, 且 $L_e^{**} \subseteq He$, 于是由以上表示得 $H = \bigcup \{Hf \mid f \in E(H)\}$. 由引理 6、引理 1, H 的非零幂等元都有 D -关系. 于是由引理 5 知, $Hf (f \in E(H))$ 互相左 H^1 -系同构. 由定义知 H 为左本原可分的. 结合条件得, H 是本原可分的.

定理 1 S 为本原可分 wrpp 半群.

证明 易见, 对 $\forall (p_{\lambda i}^{-1})_{\lambda} \in E^{*}(S), (p_{\lambda i}^{-1})_{\lambda} S = \{(a)_{i\tau} \mid a \in M, \tau \in \Lambda\} \cup \{0\}$. 故有 $S = \bigcup \{(p_{\lambda i}^{-1})_{\lambda} S \mid \forall i \in I, (p_{\lambda i}^{-1})_{\lambda} \in E^{*}(S)\} \cup \{0\}$ 于是由性质 1、引理 4 和引理 5 得, 以上是 S 的右本原可分式, 即 S 为右本原可分的. 再由性质 1、引理 4 和引理 7 及其证明知, S 为本原可分 wrpp 半群.

以上定理是文献[4-5]中相应结果的推广, 这里作为推论给出这些结果.

推论 1 若 M 是左可消么半群, 则 $S = \mu(M_a^0; I, \Lambda, P)$ 是本原可分 rpp 半群.

推论 2 若 M 是群, 则 $S = \mu(M_a^0; I, \Lambda, P)$ 是本原可分正则半群.

推论 3 S_{G^0} 与 $S_{M_l^0}$ 分别是本原可分正则半群与本原可分 rpp 半群.

定理 2 R -左可消么半群上的正规 Rees 矩阵半群 $S = \mu(M^0; I, \Lambda, P)$ 是完全 $0-J^{**}$ -单半群.

证明 由性质 1 中 d, S 为有零元本原 wrpp 半群, 且对

$$\forall 0 \neq (a)_{\lambda} \in S, \exists (p_{\lambda i}^{-1})_{\lambda} \in E(L_a^{**}), \exists S^1(a)_{\lambda} \subseteq S(p_{\lambda i}^{-1})_{\lambda}$$

故 S 是完全半群. 只要证 S 是 $0-J^{**}$ -单半群: 设 H 为 S 的非零 $0-J^{**}$ -理想, 则

$$\exists (a)_{\bar{\alpha}} \in H \setminus \{0\}, \exists J^{**}((a)_{\bar{\alpha}}) \subseteq H$$

由引理 6, 在 S 上

$$J^{**} = D^{**} (= L^{**} \vee R^{**}), \exists (P_{\bar{\lambda}i}^{-1})_{\bar{\alpha}} \in$$

$$E(J^{**}((a)_{\bar{\alpha}})) \ni J^{**}((a)_{\bar{\alpha}}) =$$

$$J^{**}((P_{\bar{\lambda}i}^{-1})_{\bar{\alpha}}) = S(P_{\bar{\lambda}i}^{-1})_{\bar{\alpha}} S \subseteq H$$

由引理 4, $J^{**}((a)_{\bar{\alpha}}) = S(p_{\bar{\lambda}i}^{-1})_{\bar{\alpha}} S$ 是极 $0-J^{**}$ -理想. 由性质 1, 对

$$\forall (x)_{j\mu} \in S, \exists (p_{\mu l}^{-1})_{l\mu} \in L_{(x)_{j\mu}}^{**},$$

$$\ni (x)_{j\mu} = (x)_{j\mu} \circ (p_{\mu l}^{-1})_{l\mu}$$

故 $(x)_{j\mu} \in S(p_{\mu l}^{-1})_{l\mu} S = J^{**}((p_{\mu l}^{-1})_{l\mu})$. 又由性质 1、引理 6, 得

$$(p_{\bar{\lambda}i}^{-1})_{\bar{\alpha}} D(p_{\mu l}^{-1})_{l\mu} \Rightarrow (p_{\bar{\lambda}i}^{-1})_{\bar{\alpha}} J^{**}(p_{\mu l}^{-1})_{l\mu} \Rightarrow$$

$$S(p_{\bar{\lambda}i}^{-1})_{\bar{\alpha}} S = S(p_{\mu l}^{-1})_{l\mu} S = J^{**}((p_{\mu l}^{-1})_{l\mu})$$

故 $(x)_{j\mu} \in S(p_{\bar{\lambda}i}^{-1})_{\bar{\alpha}} S \subseteq H \Rightarrow H = S$. 即 S 是 $0-J^{**}$ -单半群.

以上定理是文献[4-5]中相应结果的推广. 这里作为推论给出这些结果.

推论 4 若 M 是左可消么半群, 则 $S = \mu(M_a^0; I, \Lambda, P)$ 是完全 $0-J^*$ -单 rpp 半群.

推论 5 若 M 是群, 则 $S = \mu(M_a^0; I, \Lambda, P)$ 是完全 0 -单半群.

由性质 2、性质 3 和定理 2 知, 完全 $0-J^{**}$ -单半群 $S = \mu(M_a^0; I, \Lambda, P)$ 至少有一个非零理想 $S_{\bar{G}}$ (见性质 2 中 c), 从而它不是完全 0 -单半群. 同样, S 也可能有非零 $*$ -理想 $S_{\bar{M}_l}$ (见性质 3 中 c), 因此它也可能不是完全 $0-J^*$ -单半群. 从而表明本文所研究的半群类与 Rees 研究的零群上的 Rees 矩阵半群和文献[4]研究的左可消么半群上的 Rees 矩阵半群类不同, 这表明以上推广具有实质意义.

参考文献:

- [1] Tang X D. On a theorem of C-wrpp semigroups[J]. Communications in Algebra, 1997, 25(5): 1499-1504.
- [2] Du L, Shum K P. On left C-wrpp semigroups[J]. Semigroups Form, 2003, 67(3): 373-387.
- [3] Foutain J. Abundant semigroups[J]. Proc London Math Soc, 1982, 44(3): 103-129.
- [4] 邱小伟, 郭小江, 王军旗, 等. 本原可分 rpp 半群[J]. 理论数学, 2012, 2(4): 256-262.
- [5] Hoie J M. An introduction to semigroups theory[M]. London: Academic Press, 1976.
- [6] 杜兰. 关于 R_- 左消么半群[J]. 山东师范大学学报, 2003, 18(4): 5-7.
- [7] 梁静, 李刚. 可消么半群上的 Rees 矩阵半群的强半格同态[J]. 科学技术与工程, 2007, 7(17): 4256-4257.
- [8] Gao Z L, Liu X G. On Rees matrix representation of abundant semigroups with adequate transversals[J]. Commun Korean Mathematical Society, 2009, 24(4): 481-500.
- [9] Calister D B. One-to-one partial right translations of a right cancellative semigroup[J]. J of Algebra, 1976, 43(1): 231-251.
- [10] Stijn F. A representation of a semigroup by a semigroup of matrices over a group with zero[J]. Semigroup Forum, 1975, 10(1): 238-249.
- [11] Steinfeld O. On a generalization of completely 0-simple semigroups[J]. Acta Scientia Mathematica, 1969, 28: 135-145.

(编辑: 金虹)