

文章编号:1007-6735(2013)06-0541-06

一类具有饱和发生率的随机 SIRS 模型 全局正解的渐近行为

徐丽筱, 张天四, 黄晓鑫

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了一类具有饱和发生率并且移出率受到白噪声影响的随机 SIRS 模型. 讨论了系统全局正解的存在唯一性与有界性, 并通过构造 Lyapunov 函数, 证明了当基本再生数不大于 1 时, 无病平衡点的随机渐近稳定性, 给出基本再生数大于 1 时, 随机模型的解围绕确定性模型地方病平衡点震荡的充分条件, 最后通过数值仿真验证结论.

关键词: 随机 SIRS 模型; Lyapunov 函数; 伊藤公式; 随机渐近稳定; 渐近行为

中图分类号: O 175.1

文献标志码: A

Asymptotic Behavior of Global Positive Solution of a Stochastic SIRS Model with Saturation Incidence

XU Li-xiao, ZHANG Tian-si, HUANG Xiao-xin

(School of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: A stochastic SIRS model with saturation incidence was explored, in which the recovery rate is influenced by white noise. The global existence, uniqueness and boundness of the positive solution of the system were discussed and the stochastic asymptotical stability of disease-free equilibrium was proved when the basic reproduction number is not more than 1 by constructing Lyapunov function. A sufficient criteria for the solution of the stochastic model oscillating around the endemic equilibrium of the deterministic model was also given out while the basic reproduction number is more than 1. Finally, numerical simulations were presented to illustrate the mathematical findings.

Key words: stochastic SIRS model; Lyapunov function; Itô formula; stochastic asymptotical stability; asymptotic behavior

随机传染病模型在生物、医药等领域有着广泛的应用和研究^[1-8], 如 Dalal^[9] 和 Jiang^[10] 分别研究

了人均感染率受到白噪声影响的 AIDS 模型和系统变量受随机扰动的 SIR 模型, 得到了无病平衡点随

收稿日期: 2013-02-17

第一作者: 徐丽筱(1989-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 生物数学. E-mail: xulixiao7899515@163.com

通讯作者: 张天四(1978-), 男, 讲师. 研究方向: 微分方程定性理论与分支理论. E-mail: zhangts1209@163.com

机稳定的充分条件以及全局正解围绕确定性系统的平衡点做随机震荡的充分条件. 此外崔倩倩等^[11]研究了一类具有饱和发生率的 SIRS 模型, 并假设总人口为常数输入, 证明了无病平衡点及地方病平衡点的全局渐近稳定性. 然而, 在疾病传播过程中, 患病者的移出率会受到外界一些随机因素(如医疗条件、周边环境等)的影响, 上述文中有关常数参数的假设具有一定的不合理性. 在文献[11]的基础上, 考虑移出率受到白噪声影响, 讨论相应的随机模型解的全局存在唯一性及有界性、无病平衡点的随机渐近稳定性以及随机模型的解在确定性模型的地方病平衡点附近的渐近行为.

1 模型的建立

文献[11]描述了一类具有饱和发生率且总人口为常数输入的 SIRS 模型

$$\left. \begin{aligned} dS &= \left[aA - \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} + \delta R - dS \right] dt \\ dI &= \left[\frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - (\mu + \gamma + d)I \right] dt \\ dR &= [bA - (\delta + d)R + \gamma I] dt \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, S, I 和 R 分别为易感者类、感染者类和移除者类, 总人口数 $N = S + I + R$; A 为常数输入率, $A > 0$, aA 为进入易感者类的输入率, bA 为进入移除者类的输入率, 且 $a + b = 1, a, b > 0$, $\frac{\beta SI}{1 + \alpha I}$ 为饱和发生率; δ 为失去免疫率系数; d 为自然死亡率系数; μ 为因病死亡率系数; γ 为恢复率系数; $\alpha, \beta, \delta, d, \mu, \gamma$ 均为正常数. 疾病的基本再生数 $R_0 = \frac{\beta A(\delta + ad)}{d(\delta + d)(\mu + \gamma + d)}$, 文中指出当 $R_0 \leq 1$ 时, 系统(1)有唯一的无病平衡点 E^0 且为全局渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, E^0 不稳定, 但系统有唯一全局渐近稳定的地方病平衡点 E^* , 这里 $E^0 = (S^0, I^0, R^0)$, $E^* = (S^*, I^*, R^*)$, 且

$$\begin{aligned} S^0 &= \frac{A(\delta + ad)}{d(\delta + d)} \quad I^0 = 0 \quad R^0 = \frac{bA}{\delta + d} \\ S^* &= \frac{(\mu + \gamma + d)(1 + \alpha I^*)}{\beta} \\ I^* &= \frac{d(\delta + d)(\mu + \gamma + d)(R_0 - 1)}{(\beta + \alpha d)(\delta + d)(\mu + \gamma + d) - \beta \delta \gamma} \\ R^* &= \frac{bA + \gamma I^*}{\delta + d} \end{aligned}$$

注意到该模型中的移出率 γ 为一正常数, 为了使模型更贴近现实, 修改移出率为受到白噪声影响

的情形, 即假设 γ 为时间 t 的函数

$$\gamma \rightarrow \gamma + \sigma dB(t)$$

式中, $B(t)$ 为标准的布朗运动; σ 为白噪声强度, 从而得到系统(1)相应的随机系统

$$\left. \begin{aligned} dS &= \left[aA - \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} + \delta R - dS \right] dt \\ dI &= \left[\frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - (\mu + \gamma + d)I \right] dt - \sigma I dB(t) \\ dR &= [bA - (\delta + d)R + \gamma I] dt + \sigma I dB(t) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

假设 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$ 是一个完备的概率空间, 具有满足通常条件的 σ 代数流 $\{F_t\}_{t \geq 0}$ (即单调递增右连续且 F_0 包含所有的零测集), $B(t)$ 为定义在此完备的概率空间上的布朗运动. 另设 $R_+^n = \{x \in R^n, x_i > 0, 1 \leq i \leq n\}$.

2 随机系统(2)全局正解的存在唯一性与有界性

定理 1 对任意给定的初值 $(S(0), I(0), R(0)) \in R_+^3$, 当 $t \geq 0$ 时, 系统(2)存在唯一的全局解 $(S(t), I(t), R(t))$, 并且该解以概率 1 停留在 R_+^3 中, 即对所有的 $t \geq 0$, 有

$$(S(t), I(t), R(t)) \in R_+^3 \text{ a.s.}$$

证明 易知系统(2)的系数满足局部 Lipschitz 条件, 因此对任意给定初值 $(S(0), I(0), R(0)) \in R_+^3$, 在 $t \in [0, \tau_e)$ 上系统(2)存在唯一的局部正解 $(S(t), I(t), R(t))$, 这里 τ_e 为爆炸时间.

对给定的初值 $N(0) = S(0) + I(0) + R(0)$, 由系统(2)知总人口 $N(t)$ 满足方程

$$\begin{aligned} dN(t) &= (A - dN(t) - \mu I(t)) dt \leq \\ & (A - dN(s)) dt \end{aligned}$$

取 $X(t)$ 为方程 $\begin{cases} dX(t) = (A - dX(t)) dt \\ X(0) = N(0) \end{cases}$ 的解, 可得

$$X(t) = \frac{A}{d} + (N(0) - \frac{A}{d})e^{-dt}$$

由比较定理知

$$\begin{aligned} N(t) &\leq X(t) \leq \max\left\{\frac{A}{d}, N(0)\right\} \triangleq Z, \\ t &\in [0, \tau_e) \text{ a.s.} \end{aligned} \quad (3)$$

从而

$$S(t), I(t), R(t) \leq Z, t \in [0, \tau_e) \text{ a.s.}$$

下证该解的全局性, 只需证 $\tau_e = \infty$, 取 $k_0 > 0$ 足够大时, 有 $(S(0), I(0), R(0)) \in [\frac{1}{k_0}, k_0]$. 当 $k \geq k_0$,

定义停时

$$\tau_k = \inf \left\{ t \in [0, \tau_e) : S(t) \notin \left(\frac{1}{k}, k \right) \text{ 或 } I(t) \notin \left(\frac{1}{k}, k \right) \text{ 或 } R(t) \notin \left(\frac{1}{k}, k \right) \right\}$$

令 $\inf \emptyset = \infty$ ($\emptyset$ 表示空集), 显然当 $k \rightarrow \infty$ 时, τ_k 单调递增. 令 $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$, 有 $\tau_\infty \leq \tau_e$. 若能证明 $\tau_\infty = \infty$, 则 $\tau_e = \infty$, 否则存在常数 $T > 0, \varepsilon \in (0, 1)$, 使得 $P\{\tau_\infty \leq T\} > \varepsilon$, 则存在 $k_1 \geq k_0$, 使得对所有的 $k \geq k_1$ 都有 $P\{\tau_k \leq T\} \geq \varepsilon$.

考虑正定函数

$$V(S, I, R) = (S - C - C \ln \frac{S}{C}) + (I - 1 - \ln I) + (R - 1 - \ln R)$$

式中, C 为待定正常数. 利用伊藤公式, 可得

$$dV = LVdt + \sigma(1 - \frac{I}{R})dB(t)$$

其中

$$\begin{aligned} LV = & (1 - \frac{C}{S}) \left[aA - \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} + \delta R - dS \right] + \\ & (1 - \frac{1}{I}) \left[\frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - (\mu + \gamma + d)I \right] + \frac{1}{2} \sigma^2 + \\ & (1 - \frac{1}{R}) [bA - (\delta + d)R + \gamma I] + \frac{\sigma^2 I^2}{2R^2} \leq \\ & (A + \mu + \gamma + 2d + \delta + dC + \frac{1}{2} \sigma^2) - \\ & (\mu + d - C\beta)I + \frac{\sigma^2 I^2}{2R^2} \end{aligned}$$

取 $C = (\mu + d)/\beta$, 由 $I \leq Z, R > 0$ 知存在 $\xi_0 > 0$, 使得 $R \geq \xi_0$, 所以有

$$LV \leq (A + \mu + \gamma + 2d + \delta + dC + \frac{1}{2} \sigma^2) + \frac{Z^2 \sigma^2}{2\xi_0^2} \triangleq K$$

因此

$$dV \leq Kdt + \sigma(1 - \frac{I}{R})dB(t) \quad (4)$$

对式(4)两端从 0 到 $\tau_k \wedge T$ 积分并取期望

$$EV(S(\tau_k \wedge T), I(\tau_k \wedge T), R(\tau_k \wedge T)) \leq V(S(0), I(0), R(0)) + KE(\tau_k \wedge T)$$

故

$$EV(S(\tau_k \wedge T), I(\tau_k \wedge T), R(\tau_k \wedge T)) \leq V(S(0), I(0), R(0)) + KT \quad (5)$$

当 $k \geq k_1$ 时, 令 $\Omega_k = \{\tau_k \leq T\}$, 则 $P(\Omega_k) \geq \varepsilon$. 对每个 $\omega \in \Omega_k$, 由停时的定义可知 $S(\tau_k, \omega), I(\tau_k, \omega), R(\tau_k, \omega)$ 中至少有一个等于 k 或 $\frac{1}{k}$, 所以

$$V(S(\tau_k, \omega), I(\tau_k, \omega), R(\tau_k, \omega)) \geq (k - 1 - \ln k) \text{ 或 } (\frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k})$$

$$V(S(\tau_k, \omega), I(\tau_k, \omega), R(\tau_k, \omega)) \geq (k - 1 - \ln k) \wedge (\frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k})$$

由(5)得

$$\begin{aligned} & V(S(0), I(0), R(0)) + KT \geq \\ & E[1_{\Omega_k}(\omega) V(S(\tau_k, \omega), I(\tau_k, \omega), R(\tau_k, \omega))] \geq \\ & \varepsilon(k - 1 - \ln k) \wedge (\frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k}) \end{aligned}$$

其中, 1_{Ω_k} 为 Ω_k 的示性函数. 令 $k \rightarrow \infty$, 有

$$\infty > V(S(0), I(0), R(0)) + KT = \infty$$

矛盾. 于是有 $\tau_e = \infty$, 即证定理.

注: 由上述定理中式(3)易知系统(2)的解是有界的.

3 随机系统(2)的解的性质分析

3.1 $R_0 \leq 1$ 时系统(2)解的性质

当 $R_0 \leq 1$ 时, 确定性系统(1)的无病平衡点 E^0 是全局渐近稳定的, 显然该平衡点仍然是系统(2)的无病平衡点, 下面的定理给出了系统(2)无病平衡点的随机稳定性.

定理 2 当 $R_0 \leq 1, \sigma^2 < \frac{2\gamma(\mu + d)}{\mu + 2d}$ 时, 系统(2)

的无病平衡点 E^0 是随机渐近稳定的.

证明 首先作变量替换 $u_1 = S - S^0, u_2 = I, u_3 = R - R^0$, 则系统(2)可转换为

$$\left. \begin{aligned} du_1 = & \left[-du_1 - \frac{\beta(u_1 + S^0)u_2}{1 + \alpha u_2} + \delta u_3 \right] dt \\ du_2 = & \left[\frac{\beta(u_1 + S^0)u_2}{1 + \alpha u_2} - (\mu + \gamma + d)u_2 \right] \cdot \\ & dt - \sigma u_2 dB(t) \\ du_3 = & [-(\delta + d)u_3 + \gamma u_2] dt + \sigma u_2 dB(t) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

定义正定函数 $V: R_+^3 \rightarrow R_+$

$$V = \frac{1}{2} (u_1 + u_2 + u_3)^2 + c_2 u_2 + c_3 u_3^2$$

式中, c_2, c_3 为待定正常数. 利用伊藤公式, 有

$$dV = LVdt + \sigma(2c_3 u_2 u_3 - c_2 u_2)dB(t)$$

其中

$$\begin{aligned} LV = & (u_1 + u_2 + u_3) \left[-du_1 - (\mu + d)u_2 - \right. \\ & \left. du_3 \right] + \frac{1}{2} \sigma^2 u_2^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 u_2^2 - \sigma^2 u_2^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \left[\frac{\beta(u_1 + S^0)u_2}{1 + \alpha u_2} - (\mu + \gamma + d)u_2 \right] + \\
& 2c_3 u_3 [-(\delta + d)u_3 + \gamma u_2] + c_3 \sigma^2 u_2^2 = \\
& -du_1^2 - [\mu + d - c_3 \sigma^2]u_2^2 - du_3^2 - \\
& (\mu + 2d)u_1 u_2 - (\mu + 2d - 2c_3 \gamma)u_2 u_3 - \\
& 2du_1 u_3 + \frac{c_2 \beta(u_1 u_2 + S^0 u_2)}{1 + \alpha u_2} - \\
& c_2(\mu + \gamma + d)u_2 \leq -du_1^2 - [\mu + d - \\
& c_3 \sigma^2]u_2^2 - [d + 2c_3(\delta + d)]u_3^2 - \\
& (\mu + 2d - c_2 \beta)u_1 u_2 - (\mu + 2d - \\
& 2c_3 \gamma)u_2 u_3 - 2du_1 u_3 + \\
& c_2[\beta S^0 - (\mu + \gamma + d)]u_2
\end{aligned}$$

其中, $\beta S^0 - (\mu + \gamma + d) = (\mu + \gamma + d)(R_0 - 1) \leq 0$, 这时取 $c_2 = (\mu + 2d)/\beta > 0$, $c_3 = (\mu + 2d)/2\gamma > 0$, 从而

$$\begin{aligned}
LV \leq & -du_1^2 - [\mu + d - c_3 \sigma^2]u_2^2 - \\
& [d + 2c_3(\delta + d)]u_3^2 \leq 0
\end{aligned}$$

故系统(6)的零解是随机渐近稳定的, 进而可知系统(2)的无病平衡点 E^0 是随机渐近稳定的, 定理得证.

3.2 $R_0 > 1$ 时系统(2)解的性质

当 $R_0 > 1$, 确定性系统(1)的地方病平衡点 E^* 是全局渐近稳定的, 然而系统(2)不存在任何正平衡点, 通过下面的定理给出了系统(2)的解满足的性质.

定理 3 当 $R_0 > 1$, 且 $\sigma^2 < \frac{\mu + 2\gamma + d + \delta}{2}$, $\delta^2 < 2d(\delta + d)$ 时, 对任意给定的初值 $(S(0), I(0), R(0)) \in R_+^3$, 系统(2)有性质

$$\begin{aligned}
& \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [(S(r) - S^*)^2 + \\
& (I(r) - I^*)^2 + (R(r) - R^*)^2] dr \leq \frac{K_\sigma}{M}
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
& K_\sigma = 2\sigma^2 I^{*2} + \\
& \frac{[\beta S^* + (\delta + d + \gamma)(1 + \alpha I^*)]}{2\beta} \sigma^2 I^* \\
& M = \min \left\{ \frac{d}{2}, \mu + 2\gamma + d + \delta - 2\sigma^2, \right. \\
& \left. \frac{2d(\delta + d) - \delta^2}{2d} \right\}
\end{aligned}$$

证明 定义函数

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{\delta + \gamma}{2\mu} (S + I + R - S^* - I^* - R^*)^2 \\
V_2 &= \frac{1}{2} (S + I - S^* - I^*)^2
\end{aligned}$$

$$V_3 = I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*}$$

$$V_4 = \frac{(R - R^*)^2}{2}$$

由系统(1)易知 S^*, I^*, R^* 满足

$$aA = \frac{\beta S^* I^*}{1 + \alpha I^*} - \delta R^* + dS^*$$

$$\frac{\beta S^*}{1 + \alpha I^*} = \mu + \gamma + d$$

$$bA = (\delta + d)R^* - \gamma I^*$$

结合系统(2)及伊藤公式和不等式 $a^2 \leq$

$2(a - b)^2 + 2b^2$, 得

$$LV_1 \leq -\frac{(\delta + \gamma)d}{\mu} (S + I + R - S^* - I^* - R^*)^2 -$$

$$(\delta + \gamma)(I - I^*)^2 - (\delta + \gamma)(S - S^*) \cdot$$

$$(I - I^*) - (\delta + \gamma)(I - I^*)(R - R^*)$$

$$LV_2 \leq -\left(\frac{\beta S^*}{1 + \alpha I^*} - \sigma^2\right)(I - I^*)^2 - d(S - S^*)^2 -$$

$$\left(\frac{\beta S^*}{1 + \alpha I^*} + d\right)(S - S^*)(I - I^*) + \delta(I - I^*) \cdot$$

$$(R - R^*) + \delta(S - S^*)(R - R^*) + \sigma^2 I^{*2}$$

$$LV_3 = -\frac{\alpha \beta S (I - I^*)^2}{(1 + \alpha I)(1 + \alpha I^*)} + \frac{\beta}{1 + \alpha I^*} (S - S^*) \cdot$$

$$(I - I^*) + \frac{\sigma^2}{2} I^* \leq \frac{\beta}{1 + \alpha I^*} (S - S^*) \cdot$$

$$(I - I^*) + \frac{\sigma^2}{2} I^*$$

$$LV_4 \leq \sigma^2 (I - I^*)^2 - (\delta + d)(R - R^*)^2 +$$

$$\gamma(I - I^*)(R - R^*) + \sigma^2 I^{*2}$$

令

$$\begin{aligned}
V &= V_1 + V_2 + \\
& \frac{[\beta S^* + (\delta + d + \gamma)(1 + \alpha I^*)]}{\beta} V_3 + V_4
\end{aligned}$$

计算得

$$LV \leq -\frac{d(\delta + \gamma)}{\mu} (S + I + R - S^* -$$

$$I^* - R^*)^2 - \left[\frac{\beta S^*}{1 + \alpha I^*} + \delta + \gamma - 2\sigma^2 \right] \cdot$$

$$(I - I^*)^2 - d(S - S^*)^2 - (\delta + d)(R - R^*)^2 +$$

$$\delta(S - S^*)(R - R^*) + K_\sigma \leq -d(S - S^*)^2 -$$

$$\left[\frac{\beta S^*}{1 + \alpha I^*} + \delta + \gamma - 2\sigma^2 \right] (I - I^*)^2 -$$

$$(\delta + d)(R - R^*)^2 + \frac{d}{2} (S - S^*)^2 +$$

$$\frac{\delta^2}{2d} (R - R^*)^2 + K_\sigma = -\frac{d}{2} (S - S^*)^2 -$$

$$[\mu + 2\gamma + d + \delta - 2\sigma^2] (I - I^*)^2 -$$

$$\frac{2d(\delta+d)-\delta^2}{2d}(R-R^*)^2+K_\sigma \quad (7)$$

其中, $K_\sigma = 2\sigma^2 I^{*2} + \frac{[\beta S^* + (\delta+d+\gamma)(1+\alpha I^*)]}{2\beta}$.

$\sigma^2 I^*$, 对式(7)两端从0到 t 积分并取期望, 则

$$\begin{aligned} 0 \leq EV(t) - EV(0) &= \int_0^t E[LV(r)]dr \leq \\ &= -\frac{d}{2}E\int_0^t (S-S^*)^2dr - \\ &= [\mu+2\gamma+d+\delta-2\sigma^2]E\int_0^t (I-I^*)^2dr - \\ &= \frac{2d(\delta+d)-\delta^2}{2d}E\int_0^t (R-R^*)^2dr + K_\sigma t \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &\frac{d}{2}E\int_0^t (S-S^*)^2dr + \\ &= [\mu+2\gamma+d+\delta-2\sigma^2]E\int_0^t (I-I^*)^2dr + \\ &= \frac{2d(\delta+d)-\delta^2}{2d}E\int_0^t (R-R^*)^2dr \leq K_\sigma t \end{aligned}$$

令 $M = \min \left\{ \frac{d}{2}, \mu+2\gamma+d+\delta-2\sigma^2, \frac{2d(\delta+d)-\delta^2}{2d} \right\}$, 所以, 有

$$E\int_0^t [(S(r)-S^*)^2 + (I(r)-I^*)^2 +$$

$$(R(r)-R^*)^2]dr \leq \frac{K_\sigma t}{M}$$

进而有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E\int_0^t [(S(r)-S^*)^2 + (I(r)-I^*)^2 + (R(r)-R^*)^2]dr \leq \frac{K_\sigma}{M}$$

即定理得证.

注: 该定理证明了引入白噪声后的随机系统(2)的解在时间均值意义下于无穷远处围绕确定性模型的地方病平衡点 E^* 做随机震荡, 震动幅度小于等于 K_σ/M . 且当 σ^2 越小, K_σ/M 就越小.

4 数值模拟

考虑了确定性系统(1)在随机干扰下相应的随机系统(2), 研究了其动力学行为. 下面利用计算机选取不同的初始值分别来验证定理2与定理3的正确性.

在定理2中, 选取初始值 $(S(0), I(0), R(0)) = (2.5, 0.1, 0.6)$, 参数 $A=2, a=0.6, b=0.4, \alpha=0.6, \beta=0.2, \delta=0.5, d=0.5, \mu=0.3, \gamma=0.2$, 通过计算可得 $R_0=0.64 < 1$, 再取 $\sigma=0.4$, 则由数值模拟可得图1.

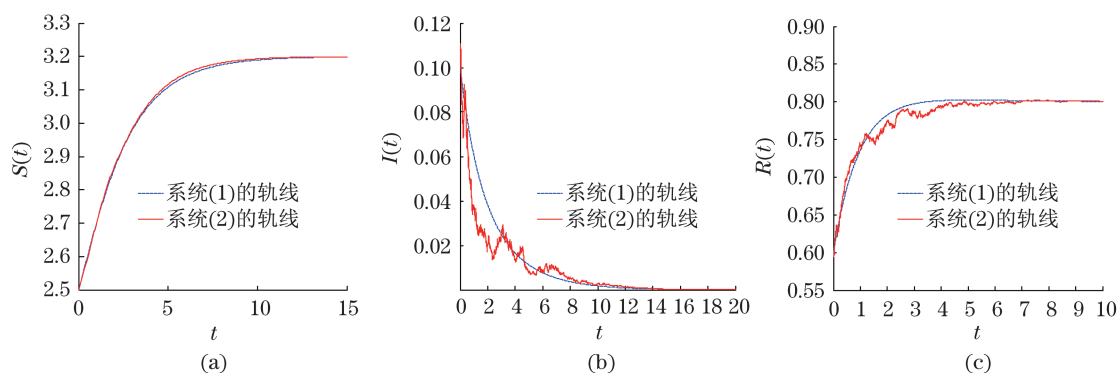


图1 $R_0 \leq 1$ 时, 系统(1)与系统(2)轨线之间关系

Fig.1 Relationship between trajectories of deterministic system (1) and stochastic system (2) when $R_0 \leq 1$

由图1所示, 当 $R_0 \leq 1$ 且噪声足够小时, 随机模型的解与确定性模型的解的性态基本一致, 也总是趋向于无病平衡点, 说明了随机模型的解是全局渐近稳定的, 即疾病会最终消失, 从而验证了定理2的正确性.

在定理3中, 在初值不变的情况下, 选取如下参数 $A=4, a=0.6, b=0.4, \alpha=0.6, \beta=0.7, \delta=0.5, d=0.5, \mu=0.3, \gamma=0.2$, 此时 $R_0=4.48 > 1$,

再取 $\sigma=0.1$, 可得图2(见下页).

由图2可知, 当 $R_0 > 1$ 时, 并且满足 $\sigma^2 < \frac{\mu+2\gamma+d+\delta}{2}, \delta^2 < 2d(\delta+d)$ 时, 随机系统(2)的解总围绕着确定性系统(1)的地方病平衡点 E^* 作随机震荡, 且震幅受噪声强度影响. 即当 $R_0 > 1$, 且满足定理3条件时, 疾病会成为地方病流行下去, 验证了定理3的正确性.

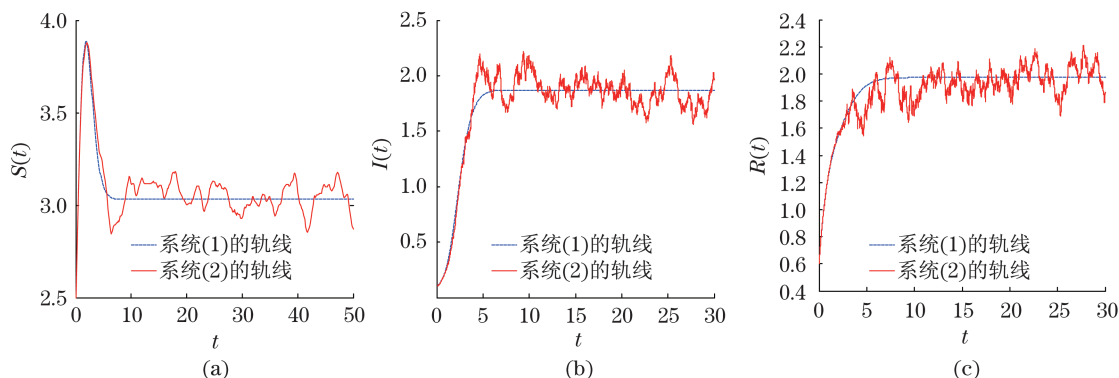


图2 $R_0 > 1$ 时, 系统(1)与系统(2)轨线之间关系

Fig.2 Relationship between trajectories of deterministic system (1) and stochastic system (2) when $R_0 > 1$

参考文献:

- [1] 王克. 随机生物数学模型[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [2] 胡适耕, 黄乘明, 吴付科. 随机微分方程[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [3] Rundnicki R. Long-time behavior of stochastic prey-predator model[J]. Stoch Proc Appl, 2003, 108(1): 93 - 107.
- [4] Yang Q, Jiang D, Shi N, et al. The ergodicity and extinction of stochastically perturbed SIR and SEIR epidemic models with saturated incidence[J]. Math Anal Appl, 2012, 388(1): 248 - 271.
- [5] Mao X, Yuan C, Zou J. Stochastic differential delay equations of population dynamics[J]. Math Anal Appl, 2002, 304(1): 296 - 320.
- [6] Carletti M. On the stability properties of a stochastic model for phage-bacteria interaction in open marine environment[J]. Math Biosci, 2002, 175 (2): 117 - 131.
- [7] Dalal N, Greenhalgh D, Mao X R. A stochastic model for internal HIV dynamics[J]. Math Anal Appl, 2008, 341(2): 1084 - 1101.
- [8] Kiouach D, Omari L. Stochastic asymptotic stability of a SIRS epidemic model [J]. European Journal of Scientific Research, 2008, 24(4): 575 - 579.
- [9] Dalal N, Greenhalgh D, Mao X R. A stochastic model of AIDS and condom use[J]. Math Anal Appl, 2007, 325 (1): 36 - 53.
- [10] Jiang D Q, Yu J J, Ji C Y, et al. Asymptotic behavior of global positive solution to a stochastic SIR model[J]. Math Comput Modelling, 2011, 54(1/2): 221 - 232.
- [11] 崔倩倩, 张强. 一类具有饱和发生率的 SIRS 传染病模型的全局性分析[J]. 四川理工学院学报, 2012, 25 (6): 83 - 85.

(编辑: 金 虹)