

文章编号:1007-6735(2014)01-0001-04

奇数阶幻方的构造与特征值分析

刘乐乐

(上海理工大学 理学院,上海 200093)

摘要: 对奇数阶幻方的一种构造方法进行改造,利用循环矩阵和对称循环矩阵的性质对奇数阶幻方的特征值进行分析,同时给出了奇数阶幻方全部特征值的统一计算公式,并最终否定了一些学者关于幻方特征值的猜测.

关键词: 幻方; 循环矩阵; 对称循环矩阵; 特征值
中图分类号: O 151.2 **文献标志码:** A

Construction of Odd Order Magic Squares and Its Eigenvalue Analysis

LIU Le-le

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The method for constructing odd order magic squares was reformed and the eigenvalues of odd order magic squares were analyzed based on the properties of circulant matrices and symmetric circulant matrices. Meanwhile, the unified calculation formula were given out. It is also found that some conjectures about the eigenvalues of magic squares are not correct.

Key words: magic square; circulant matrix; symmetric circulant matrix; eigenvalue

1 问题的提出

关于幻方的研究由来已久,中国古书《易经》中记载的洛书是世界上最早的幻方.随后,幻方传入世界各地,引起了广泛关注,取得了许多成果.幻方不仅具备美感,还蕴含着许多奇特的奥秘,具体可参看文献[1-3].随着计算机的快速发展,幻方广泛应用于人工智能、图像处理、图论及对策论等方面.

定义 1 对任意的正整数 $n \geq 3$, 将 $1, 2, \dots, n^2$ 填入 $n \times n$ 的矩阵中,使得矩阵的每行、每列及对

角线之和均为同一个数 s , 这样的矩阵称为幻方矩阵(或魔方矩阵),简称为幻方, s 为幻方值.

显然, n 阶幻方中所有整数的和为

$$1 + 2 + \dots + n^2 = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2}$$

按照幻方的定义即知 $2s = n(n^2 + 1)$.

文献[4]通过对幻方矩阵特征值的分析,给出了一种构造奇数阶非奇异幻方的方法,但并未给出其特征值的计算公式.文献[5]给出了幻方的精彩应用案例.文献[6]讨论了奇数阶幻方的一种构造方法.除此之外,幻方的构造方法还有很多,在文献[2]中有详细的介绍.文献[7]给出了利用线性空间理论来

收稿日期: 2013-01-18

第一作者: 刘乐乐(1988-),男,硕士研究生.研究方向:半群理论. E-mail: ahhylau@163.com

构造幻方的方法. 文献[8]对奇数阶幻方特征值给出了一个猜测: 奇数阶幻方的特征值均为实特征值, 除最大特征值为幻方矩阵的幻方值外, 其它特征值正负成对出现.

现对文献[7]中奇数阶幻方的一种构造方法进行改造, 给出奇数阶幻方的一种代数表示方法. 基于这种表示法, 应用循环矩阵和对称循环矩阵的性质, 对奇数阶幻方特征值进行分析, 最后给出奇数阶幻方全部特征值的统一计算公式. 因此, 发现文献[8]中关于奇数阶幻方特征值的猜想是错误的.

为了分析奇数阶幻方特征值的性质, 需要以下的概念与结论.

定义 2^[9] 若 n 阶复矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 具有形状

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

则称 $\mathbf{A}$ 为 n 阶循环矩阵, 记为 $\mathbf{A} = \text{circ}(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$. 称 $\boldsymbol{\pi} = \text{circ}(0, 1, 0, \dots, 0)$ 为基本循环矩阵, 即

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

显然, $\boldsymbol{\pi}$ 为正交矩阵, 则必为正规矩阵, 从而 $\boldsymbol{\pi}$ 在复数域上可以对角化. 因为 $\boldsymbol{\pi}^n = \mathbf{E}$ 且 $\boldsymbol{\pi}^k \neq \mathbf{E}$ (其中, $k < n$ 为正整数, $\mathbf{E}$ 为单位矩阵), 所以, $\boldsymbol{\pi}$ 的 n 个特征值分别为 $1, \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{n-1}$, 其中, ϵ 为 n 次单

位原根, 相对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}$, 可解得

$$\boldsymbol{\alpha}_i = (1, \epsilon^i, \epsilon^{2i}, \dots, \epsilon^{(n-1)i}), i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

定义 3^[9] 若 n 阶复矩阵 $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 具有形状

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_0 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \end{pmatrix} \quad (2)$$

则称 $\mathbf{B}$ 为 n 阶对称循环矩阵, 记为 $\mathbf{B} = \text{sc}(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$. 称 $\boldsymbol{\sigma} = \text{sc}(0, 0, \dots, 0, 1, 0)$ 为基本对称循环矩阵, 即

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

引理 1^[9] 矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 由式(1)和(2)定义, 则有表示

$$\mathbf{A} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \boldsymbol{\pi}^k, \quad \mathbf{B} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k-1} \boldsymbol{\sigma}^k$$

2 奇数阶 $n = 2m + 1 (m \geq 1)$ 幻方的构造

引理 2 中关于奇数阶幻方的构造方法引自文献[7].

引理 2 矩阵 $\mathbf{M} = n\mathbf{A}_n + \mathbf{B}_n + \mathbf{H}_n$ 为 $n = 2m + 1 (m \geq 1)$ 阶幻方, 其中

$$\mathbf{A}_n = \text{circ}(m, m+1, \dots, m-1)$$

即

$$n\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} m & m+1 & \cdots & 2m & 0 & 1 & \cdots & m-1 \\ m-1 & m & \cdots & 2m-1 & 2m & 0 & \cdots & m-2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & m & m+1 & m+2 & \cdots & 2m \\ 2m & 0 & \cdots & m-1 & m & m+1 & \cdots & 2m-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m+1 & m+2 & \cdots & 0 & 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}$$

$\mathbf{B}_n$ 为 $\mathbf{A}_n$ 逆时针旋转 90° 所得矩阵, $\mathbf{H}_n$ 为元素全为 1 的矩阵.

现对这种构造作以下改造. 为此, 先证明引理 3.

引理 3 矩阵 $\boldsymbol{\pi}$ 为基本循环矩阵, $\boldsymbol{\sigma}$ 为基本对称

循环矩阵, 则有

$$\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\pi}^{n-1}, \quad \boldsymbol{\pi}^{m+1}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\pi}^m$$

证明 易验证 $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\pi}^{n-1} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\pi}^n\boldsymbol{\pi}^{-1} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\pi}^{-1}$, 从而有 $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\pi}^{n-1}$ 成立. 往证另一算式成立. 由 $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\pi}^{n-1}$ 可得

$$\begin{aligned}
\pi^{m+1}\sigma &= \pi^m(\pi\sigma) = \pi^m\sigma\pi^{n-1} = \pi^{m-1}(\pi\sigma)\pi^{n-1} = \\
&\pi^{m-1}\sigma\pi^{2(n-1)} = \pi^{m-2}(\pi\sigma)\pi^{2(n-1)} = \\
&\pi^{m-2}\sigma\pi^{3(n-1)} = \cdots = \pi\sigma\pi^{m(n-1)} = \\
&\sigma\pi^{(m+1)(n-1)} = \sigma\pi^m
\end{aligned}$$

结合引理 2 和引理 3 可得定理 1.

定理 1 令 $g(x) = \sum_{i=1}^{2m} ix^i$, 则 n 阶幻方矩阵

M 可表为

$$M = \pi^{m+1}[ng(\pi) + \sigma\pi g(\pi^{-1})] + H_n$$

证明 由引理 1 和引理 2 可将 M 写成

$$\begin{aligned}
M &= n \left[\sum_{i=1}^m i\pi^{m+1+i} + \sum_{i=m+1}^{2m} i\pi^{i-m} \right] + \\
&\left[\sum_{j=1}^m j\sigma\pi^{m+1-j} + \sum_{j=m+1}^{2m} j\sigma\pi^{3m+2-j} \right] + H_n
\end{aligned}$$

结合引理 3 及恒等式 $\pi^n = \pi^{2m+1} = E$, 得

$$\begin{aligned}
M &= n \left[\sum_{i=1}^m i\pi^{m+1+i} + \sum_{i=m+1}^{2m} i\pi^{m+1+i} \right] + \\
&\left[\sum_{j=1}^m j\sigma\pi^{m+1-j} + \sum_{j=m+1}^{2m} j\sigma\pi^{m+1-j} \right] + H_n = \\
&n \sum_{i=1}^{2m} i\pi^{m+1+i} + \sigma\pi^m \sum_{j=1}^{2m} j\pi^{1-j} + H_n = \\
&n \sum_{i=1}^{2m} i\pi^{m+1+i} + \pi^{m+1}\sigma \sum_{j=1}^{2m} j\pi^{1-j} + H_n = \\
&\pi^{m+1} \left[n \sum_{i=1}^{2m} i\pi^i + \sigma\pi \sum_{j=1}^{2m} j\pi^{-j} \right] + H_n = \\
&\pi^{m+1} [ng(\pi) + \sigma\pi g(\pi^{-1})] + H_n
\end{aligned}$$

3 幻方特征值的计算

现基于定理 1 求出奇数阶幻方的特征值. 由于相似矩阵具有相同的特征值, 因此, 要计算幻方矩阵 M 的特征值, 只需考虑矩阵 $P^{-1}MP$. 结合文献[10] 可得定理 2.

定理 2 存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}\pi P$ 和 $P^{-1}H_n P$ 均为对角阵, 且

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} (n+1)f(1) + n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & nf(\epsilon) & 0 & \cdots & 0 & \epsilon f(\epsilon) \\ 0 & 0 & nf(\epsilon^2) & \cdots & \epsilon^2 f(\epsilon^2) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \epsilon^{n-2} f(\epsilon^{n-2}) & \cdots & nf(\epsilon^{n-2}) & 0 \\ 0 & \epsilon^{n-1} f(\epsilon^{n-1}) & 0 & \cdots & 0 & nf(\epsilon^{n-1}) \end{pmatrix}$$

定理 4 对任意正整数 $k, 0 \leq k \leq n$, 有

$$P^{-1}\sigma P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \epsilon^2 \\ 0 & 0 & \cdots & \epsilon^4 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \epsilon^{2(n-1)} & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

证明 令 $P = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})$, 其中, $\alpha_i = (1, \epsilon^i, \epsilon^{2i}, \cdots, \epsilon^{(n-1)i})$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$. 显然, P 是范德蒙矩阵, 从而 P 可逆. 易验证 $P^{-1}\pi P = \text{diag}(1, \epsilon, \epsilon^2, \cdots, \epsilon^{n-1})$, $P^{-1}H_n P = \text{diag}(n, 0, 0, \cdots, 0)$. 由引理 3, $\pi\sigma = \sigma\pi^{-1}$, 有

$$(P^{-1}\pi P)(P^{-1}\sigma P) = (P^{-1}\sigma P)(P^{-1}\pi^{-1}P)$$

记 $P^{-1}\sigma P = (a_{ij})_{n \times n}$, 即为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \epsilon & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \epsilon^{n-1} & \\ & & & & \epsilon^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \\
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \epsilon^{n-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \epsilon & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

解得

$$P^{-1}\sigma P = \begin{pmatrix} u_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & \cdots & u_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & u_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

进一步, 将 $P = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})$ 代入式(3), 得 $u_k = \epsilon^{2k}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.

由定理 1 计算得

$$\begin{aligned}
P^{-1}MP &= P^{-1}[\pi^{m+1}(ng(\pi) + \sigma\pi g(\pi^{-1}))]P + \\
&P^{-1}H_n P = (P^{-1}\pi P)^{m+1}[ng(P^{-1}\pi P) + \\
&(P^{-1}\sigma P)(P^{-1}\pi P)g(P^{-1}\pi^{-1}P)]P + \\
&P^{-1}H_n P
\end{aligned}$$

因此, 结合定理 2, 有定理 3.

定理 3 令 $f(x) = x^{m+1}g(x)$, 则

$$\text{a. } f(\epsilon^k) + f(\epsilon^{n-k}) = 0;$$

$$\text{b. } f(\epsilon^k)f(\epsilon^{n-k}) = \frac{n^2}{2 - (\epsilon^k + \epsilon^{n-k})}.$$

证明 利用 Abel 分部求和公式^[11], 得

$$\begin{aligned} f(\epsilon^k) &= \epsilon^{k(m+1)} g(\epsilon^k) = \epsilon^{k(m+1)} \sum_{i=1}^{2m} i \epsilon^{ki} = \\ &= \epsilon^{k(m+1)} \left[2m \sum_{i=1}^{2m} \epsilon^{ki} - \sum_{i=1}^{2m-1} \left(\sum_{j=1}^i \epsilon^{k(j+1)} \right) \right] = \\ &= \epsilon^{k(m+1)} \left[-2m - \frac{\epsilon^k}{1 - \epsilon^k} \sum_{i=1}^{2m-1} (1 - \epsilon^{ki}) \right] = \\ &= -2m \epsilon^{k(m+1)} - \frac{\epsilon^{k(m+2)}}{1 - \epsilon^k} \left(2m - 1 - \sum_{i=1}^{2m-1} \epsilon^{ki} \right) = \\ &= \frac{n \epsilon^{k(m+1)}}{\epsilon^k - 1} \end{aligned}$$

现证明 a 和 b 成立.

$$\begin{aligned} \text{a. } f(\epsilon^k) + f(\epsilon^{n-k}) &= \frac{n \epsilon^{k(m+1)}}{\epsilon^k - 1} + \frac{n \epsilon^{(n-k)(m+1)}}{\epsilon^{n-k} - 1} = \\ \frac{n \epsilon^{k(m+1)}}{\epsilon^k - 1} + \frac{n \epsilon^{(n-k)(m+1) + k}}{1 - \epsilon^k} &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } f(\epsilon^k)f(\epsilon^{n-k}) &= \frac{n \epsilon^{k(m+1)}}{\epsilon^k - 1} \frac{n \epsilon^{(n-k)(m+1)}}{\epsilon^{n-k} - 1} = \\ \frac{n^2}{2 - (\epsilon^k + \epsilon^{n-k})}. \end{aligned}$$

即定理 4 成立.

由定理 2~4 得定理 5. 定理 5 给出了奇数阶幻方全部特征值的统一计算公式.

定理 5 $n = 2m + 1 (m \geq 1)$ 阶幻方 M 的全部特征值为

$$s, \pm \sqrt{\frac{n^2(n^2 - 1)}{2 - (\epsilon^k + \epsilon^{n-k})}} i, k = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

式中, i 为虚数单位, 即 $i^2 = -1$.

证明 计算行列式 $\varphi(\lambda) = |\lambda E - P^{-1}MP|$, 得

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= [\lambda - (n+1)f(1) - n] \prod_{k=1}^m [(\lambda - \\ &= nf(\epsilon^k))(\lambda - nf(\epsilon^{n-k})) - f(\epsilon^k)f(\epsilon^{n-k})] = \\ &= (\lambda - s) \prod_{k=1}^m [\lambda^2 + (n^2 - 1)f(\epsilon^k)f(\epsilon^{n-k})] = \\ &= (\lambda - s) \prod_{k=1}^m \left[\lambda^2 - \frac{n^2(n^2 - 1)}{(\epsilon^k + \epsilon^{n-k}) - 2} \right] \end{aligned}$$

对任意正整数 k , ϵ^k 与 ϵ^{n-k} 总是共轭的, 因此, $\epsilon^k + \epsilon^{n-k} \in \mathbb{R}$, 且有

$$\epsilon^k + \epsilon^{n-k} = 2\text{Re}(\epsilon^k) < 2$$

于是, 令 $\varphi(\lambda) = 0$, 可知 M 的全部特征值由式 (4) 给出.

4 结 论

研究结果表明, 奇数阶幻方矩阵有实特征值 s , 其它特征值均为纯虚数且共轭出现, 其数值由式 (4) 给出. 鉴于此, 发现文献[8]中关于奇数阶幻方的特征值的猜想是错误的. 例如, 当 $n = 3$ 时, 3 阶幻方的特征值分别为 $15, 2\sqrt{6}i, -2\sqrt{6}i$, 其特征值中有纯虚数, 并非全是实数.

参考文献:

- [1] 汪潘义, 代诗平. 神奇的奇数阶幻方[J]. 合肥学院学报, 2007, 17(4): 20-23.
- [2] 吴鹤龄. 幻方及其他——娱乐数学经典名题[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [3] Pickover C A. The zen of magic squares, circles, and stars [M]. Princeton: Princeton University Press, 2002.
- [4] Lee M Z, Love E, Narayan S K, et al. On nonsingular regular magic squares of odd order[J]. Linear Algebra and its Applications, 2012, 437(6): 1346-1355.
- [5] Aronov B, Asano T, Kikuchi Y, et al. A generalization of magic squares with applications to digital halftoning [J]. Theory Comput Syst, 2008, 42(2): 143-156.
- [6] 廖云儿, 祝宝满, 吴连发. 求解奇数阶幻方的一个简单方法[J]. 数学的实践与认识, 2007, 37(24): 174-177.
- [7] 李尚志. 线性代数精彩应用案例 (之一)[J]. 大学数学, 2006, 22(3): 1-8.
- [8] 单润红, 高峰, 宋君强. 魔方矩阵的特征值分析[J]. 高等数学研究, 2004, 7(4): 45.
- [9] 江兆林, 周章鑫. 循环矩阵[M]. 成都: 成都科技大学出版社, 1999.
- [10] 袁晖坪. 行(列)对称矩阵的满秩分解和正交对角分解[J]. 上海理工大学学报, 2007, 29(3): 260-264.
- [11] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析(下册)[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2004.

(编辑: 石 璞)