

文章编号:1007-6735(2014)01-0005-07

型 E_7 根系的结构

闫爱民, 胡建华
(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 建立了型 E_7 根系到有限域 $\mathbb{Z}/2$ 上的向量空间 $(\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2)^3$ 的单射; 借此映射, 结合根系的分层来讨论根系的正交关系和偏序关系. 分别给出了同一层间以及不同层间根的正交性的判别方法, 并将第七层上的这两种关系在立方体中体现出来. 类似的, 其它层上的这两种关系也可在立方体中体现出来.

关键词: 根系; 偏序; 正交

中图分类号: O 152 **文献标志码:** A

Structure of Type E_7 Root System

YAN Ai-min, HU Jian-hua
(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: An injective map from type E_7 root system to vector space $(\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2)^3$ over finite field $\mathbb{Z}/2$ was developed. By means to the injective map and the stratification of the root system, the relations of partial order and orthogonality between roots were investigated. The identification method of orthogonality between roots on the same stratum and different strata were provided. The two relations on the seventh stratum were made to be visualized in a cube. Similarly, the two relations on other strata can also be reflected in the cube.

Key words: root system; partial order; orthogonality

根系在李理论的研究中起着极其重要的作用, 根系中有两种重要的关系: 偏序关系和正交关系. 对于型 A_n ($n \geq 1$) 的根系, 文献[1]将正根之间的这两种结构完全体现在一个 $n+1$ 阶的严格上三角矩阵上, 这里只需矩阵的 (i, j) 位置表示根 $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$, 其中, $\epsilon_i = (0 \cdots 0 \ 1 \ 0 \cdots 0)$ 是 $n+1$ 维单位向量. $\alpha > \beta$ 当且仅当 α 在 β 的右方、正上方; 若存在某个 i , 划去第 i 行第 i 列后也划去了 α 与 β , 则

α 与 β 不正交, 否则 α 与 β 正交. 例 A_4 中, 正根 $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$, ($i = 1, 2, 3, 4$), $\alpha_i + \cdots + \alpha_j = \epsilon_i - \epsilon_j$ ($1 \leq i < j \leq 4$). 用 5 阶矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_3 + \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

收稿日期: 2013-03-31
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11201299)
第一作者: 闫爱民(1987-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 代数群及其表示论. E-mail: 2621807609@qq.com
通讯作者: 胡建华(1978-), 女, 讲师. 研究方向: 代数群及其表示论. E-mail: smilydragon2011@163.com

与 $\alpha_2 + \alpha_3$ 正交的根有 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$

对于型 E 的根系, 哈斯图很好地描述了它的偏序关系, 但正交关系就不能表现出来. 本文拟将具体地研究型 E_7 的根系的性质, 建立 E_7 的根系到有限域上向量空间的单射, 用分层的手段讨论 E_7 的根系的偏序关系和正交关系.

设 $\mathbb{R}^n$ 为实数域上 n 维欧氏空间, $(\cdot, \cdot)$ 表示内积, 对 $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$, 对应一个反射 σ_α . 对任意 $\beta \in \mathbb{R}^n$, $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$, 简记 $\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ 为 $\langle \beta, \alpha \rangle$, 则 $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$.

设 $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ 是一个秩为 n 的根系, $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 为 Δ 的基础根系, $\mathbb{Z}$ 表示整数集. 对于 $\forall \beta \in \Delta$, 可表示成 $\beta = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i$ ($k_i \in \mathbb{Z}, \alpha_i \in \Pi$), 若存在某个 $k_i > 0$ (或 $k_i < 0$), 就称 β 为正根 (或负根), $ht\beta = \sum_{i=1}^n k_i$ 称为 β 的高度. $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$, $\Delta^+ = -\Delta^-$, 其中 Δ^+ (Δ^-) 是 Δ 的所有正 (负) 根的集合. 记 Dyn 表示 Δ 的 Dynkin 图, Dyn 的顶点为 $v_1, \dots, v_n$, 它们对应单根 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

定义 1^[1] 若 Δ 中所有根的长度相等, 则称 Δ 为等长根系. 此时 $\forall \beta \in \Delta, (\beta, \beta) = 2$.

显然型 A_n ($n \geq 1$), D_n ($n \geq 4$), E_6, E_7, E_8 的不可约根系为等长根系, 且当 Δ 是可约的等长根系时, 其 Dynkin 图的每一个连通子根系为型 A, D, E 的.

定义 2^[2] 不可约根系 Δ 的最低根称为仿射根, 记为 $\hat{\alpha}_n$. Δ 的 Dynkin 图中添加仿射顶点 $\hat{v}_n$, 得到的新图称为仿射 Dynkin 图, 其中仿射顶点 $\hat{v}_n$ 对应仿射根 $\hat{\alpha}_n$.

下文中的 Δ 皆表示等长根系, 可以是可约的. $\Lambda = \mathbb{Z}\Delta$ 表示由 $\Delta, \mathbb{Z}$ -张成的格.

性质 1^[3] 对 $\forall \alpha, \beta \in \Delta$ 且 $\alpha \neq \pm \beta$, 有 $\langle \beta, \alpha \rangle = \{-1, 0, 1\}$.

性质 2^[3] Δ^+ 是一个偏序集. 对 $\beta, \beta' \in \Delta^+$, $\beta > \beta'$ 当且仅当 $\beta - \beta'$ 是正根之和.

性质 3^[4] $\alpha, \beta \in \Delta, \alpha + \beta \in \Delta$ 当且仅当 $\langle \alpha, \beta \rangle = -1$; $\alpha - \beta \in \Delta$ 当且仅当 $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$.

性质 4^[4] 若 Δ 是可约的且 $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, 则对于 $\forall \alpha \in \Delta_1, \beta \in \Delta_2, \langle \alpha, \beta \rangle = 0$.

为方便约定 $D_2 = A_1 \times A_1, D_3 = A_3, E_3 = A_2 \times$

$A_1, E_4 = A_4, E_5 = D_5$.

1 根系到有限秩自由模的单射

设 $p \geq 2$ 是正整数, 设 V 是 $\mathbb{Z}/p$ 上的有限秩自由模, V 上有一个对称双线性型 $(\cdot | \cdot)$, 且其在 $\mathbb{Z}/p$ 上取值. 设 $\Gamma = \{x \in V \setminus \{0\} | (x | x) = 2\}$.

假设 Γ 有一个子集 $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 满足以下条件:

- S 中元素两两不同;
- $(\alpha_i | \alpha_j) = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \pmod{p}$,
 $i, j = 1, 2, \dots, n$

这里 S 中元素两两不同是必要的, 否则如当 $p > 3, \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = -1$ 时, $(\alpha_1 | \alpha_2) = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \pmod{p} = 2 \pmod{p}, (\alpha_1 | \alpha_2) = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \pmod{p} = -1 \pmod{p}$.

若 $\alpha_1 = \alpha_2$, 则有 $(\alpha_1 | \alpha_1) = 2 \pmod{p} = (\alpha_1 | \alpha_2) = -1 \pmod{p}, 2 = -1$ 显然矛盾.

显然, 通过自然扩展映射 $\alpha_i \mapsto a_i$ 可得到映射

$$f: \Lambda \rightarrow V, f\left(\sum_{i=1}^n k_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n k_i a_i.$$

引理 1 如果 $\beta, \beta' \in \Lambda$, 那么 $(f(\beta) | f(\beta')) = \langle \beta, \beta' \rangle \pmod{p}$.

证明 由 f 的定义和内积的双线性, 显然.

推论 1 若 $\beta \neq \pm \beta' \in \Delta$, 则 $\langle \beta, \beta' \rangle = 0$ 当且仅当 $(f(\beta) | f(\beta')) = 0$.

证明 因为 β 和 β' 是等长根系的根, $\langle \beta, \beta' \rangle \in \{-1, 0, 1\}$, 所以

$$\langle \beta, \beta' \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \beta, \beta' \rangle = 0 \pmod{p} \Leftrightarrow (f(\beta) | f(\beta')) = 0.$$

现在将 f 的定义域作以下限制: 当 $p > 2$ 时, 定义域为 Δ ; 当 $p = 2$ 时, 定义域为 Δ^+ .

对 $\beta \in \Delta$, 记

$$O(\beta) = \begin{cases} \{\gamma \in \Delta | \langle \beta, \gamma \rangle = 0\} & p > 2 \\ \{\gamma \in \Delta | \langle \beta, \gamma \rangle = 0\} \cup \{\pm \beta\} & p = 2 \end{cases}$$

引理 2 当 $p = 2$ 时, **a.** 若 $O(\beta) = \Delta$ 当且仅当 β 所在的不可约子根系为型 A_1 的;

b. 若 $O(\beta) \neq \Delta$, 则 $\Delta \setminus O(\beta)$ 的元只可能属于 Δ 的包含 β 不可约子根系中.

证明 a. 必要性: 当 β 所在的不可约子根系为型 A_1 时, 此子根系只有根 $\{\pm \beta\}$, 且此时 β 与其它子根系中的所有元素都垂直, 因此对 $\forall \gamma \in \Delta \setminus \{\pm \beta\}$ 有 $\langle \beta, \gamma \rangle = 0$, 即 $O(\beta) = \Delta$.

充分性: 若 $O(\beta) = \Delta$, 且 β 所在的不可约子根

系不是型 A_1 的,则此子根系中至少存在 α 使得 $\langle \beta, \alpha \rangle \neq 0$,与 $O(\beta) = \Delta$ 矛盾.

b. 若 $O(\beta) \neq \Delta$,一定存在 $\alpha \in \Delta \setminus O(\beta)$ 使得 $\langle \beta, \alpha \rangle \neq 0$, α, β 属于同一个不可约根系中. 若 $\Delta \setminus O(\beta)$ 的元素属于 Δ 的多个不可约子根系,则一定存在 $\alpha \in \Delta \setminus O(\beta)$ 与 β 不在同一不可约子根系中,则 $\langle \beta, \alpha \rangle = 0, \alpha \in O(\beta)$, 矛盾. 所以 $\Delta \setminus O(\beta)$ 的元素只可能属于 Δ 的包含 β 不可约子根系中.

引理 3 当 $p=2$ 时,对 $\beta \in \Delta$, **a.** 若 Δ 是型 A_2 的,则 $O(\beta) = \{\pm \beta\}$;

b. 若 Δ 是型 $A_k (k \geq 4), E_6, E_7, E_8$ 的,则 $O(\beta)$ 分别是型 $A_{k-2} \times A_1, A_5 \times A_1, D_6 \times A_1, E_7 \times A_1$ 的,且 β 属于型 A_1 的子根系中;

c. 若 Δ 是型 $D_k (k \geq 3)$ 的,则 $O(\beta)$ 是型 $A_{k-2} \times A_1 \times A_1$, 且 β 属于型 A_1 的子根系中.

证明 这里只需根据 Δ 型逐一验证即可.

定理 1 **a.** 当 $p > 2$ 时, $f: \Delta \rightarrow V$ 是单射,它的像位于 Γ 内;

b. 当 $p=2$ 时, $f: \Delta^+ \rightarrow V$ 是单射,它的像位于 Γ 内.

证明 **a.** 当 $p > 2$ 时, $\forall \beta \in \Delta, \langle \beta, \beta \rangle = 2$, 有 $(f(\beta) | f(\beta)) = \langle \beta, \beta \rangle (\text{mod } p) = 2$, 因此 $f(\Delta) \subset \Gamma$. 下证 f 是单射, 假设 $\beta, \beta' \in \Delta, f(\beta) = f(\beta')$, 要证 $\beta = \beta'$.

对 $\forall \gamma \in \Delta, (f(\beta) | f(\gamma)) = (f(\beta') | f(\gamma))$, 由引理 1 得 $\langle \beta, \gamma \rangle = \langle \beta', \gamma \rangle (\text{mod } p)$, 因此 $O(\beta) = O(\beta')$, 这意味着 β 和 β' 属于 Δ 的同一个不可约子根系. 分两种情况讨论:

(a) 若该子根系为型 A_2 的, 对 $\forall \gamma \in \Delta(A_2)$, 由 $\langle \beta, \gamma \rangle = \langle \beta', \gamma \rangle (\text{mod } p)$, 恒有 $\beta = \beta'$.

(b) 若该子根系不为型 A_2 的, 由 $O(\beta) = O(\beta')$ 推出 $\beta = \pm \beta'$. 若 $\beta = -\beta'$, 则对 $\forall \gamma \in \Delta, \langle -\beta', \gamma \rangle = \langle \beta', \gamma \rangle (\text{mod } p)$, 由性质 3, $\langle \beta', \gamma \rangle = \{-1, 0, 1, \pm 2\}$, 矛盾, 所以 $\beta = \beta'$.

b. 当 $p=2$ 时, $\forall \beta \in \Delta^+, \langle \beta, \beta \rangle = 2$, 所以 $f(\Delta^+) \subset \Gamma \cup \{0\}$. 因此只需证 $f(\Delta^+) \cup \{0\} \rightarrow \Gamma \cup \{0\}$ 是单射. 设 $\beta, \beta' \in \Delta^+ \cup \{0\}, f(\beta) = f(\beta')$, 下证 $\beta = \beta'$.

同 $p > 2$ 的情形, 对所有的 $\gamma \in \Delta, \langle \beta, \gamma \rangle = \langle \beta', \gamma \rangle (\text{mod } 2)$. 由此 $O(\beta) = O(\beta')$.

(a) 当 $O(\beta) = O(\beta') = \Delta$ 时, 由引理 2, β 和 β' 要么为子根系 A_1 的单根, 要么为 $\{0\}$. 由于 f 限制到 $\{0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是单射, 所以 $\beta = \beta'$.

(b) 当 $O(\beta) = O(\beta') \neq \Delta$ 时, 由引理 2, β 和 β'

同属于 $\Delta \setminus O(\beta)$ 所在的不可约子根系中. 因此不妨假设 Δ 是不可约根系.

由引理 3 若 Δ 是型 $A_2, A_k (k \geq 4), E_6, E_7, E_8$ 的, 显然 $\beta = \beta'$. 若 Δ 是型 $D_k (k \geq 3)$ 的, β 和 β' 都属于子根系 A_1 (不一定是同一个) 中. 若 β 和 β' 属于同一个 A_1 , 则有 $\beta = \beta'$. 若它们不属于同一个子根系 A_1 中, $\Delta(D_k)$ 的根是 $\{\epsilon_i \pm \epsilon_j, i \neq j\} \subset \mathbb{R}^k$. 令 $\beta = \epsilon_i \pm \epsilon_j$, 由 $O(\beta) = O(\beta')$, 则 $\beta' = \epsilon_i \mp \epsilon_j$. 因为 $f(2\epsilon_j) = f(\beta) - f(\beta') = 0$, 所以对 $\forall l, f(2\epsilon_l) = 2f(\epsilon_l - \epsilon_j) + f(2\epsilon_j) = 0$

由此, 对所有的 $m \neq l, f(\epsilon_m + \epsilon_l) = f(\epsilon_m - \epsilon_l)$. 特别对单根 $\alpha_{k-1} = \epsilon_{k-1} - \epsilon_k, \alpha_k = \epsilon_{k-1} + \epsilon_k$, $f(\epsilon_{k-1} - \epsilon_k) = f(\epsilon_{k-1} + \epsilon_k)$, 这与 f 限制到单根是单射, 矛盾. 故 β 和 β' 属于同一个 A_1 , 有 $\beta = \beta'$.

2 型 E_7 根系的结构

2.1 型 E_7 根系的分层

在向量空间 $\mathbb{R}^8$ 中, E_8 根系为

$$\Delta = \{\alpha \in L : (\alpha, \alpha) = 2\}$$

$$\text{其中 } L = \left\{ \sum_{i=1}^8 c_i \epsilon_i + \frac{c}{2} \sum_{i=1}^8 \epsilon_i : c_i, c \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^8 c_i \in 2\mathbb{Z} \right\}$$

基为 $\Pi = \{\alpha_i : 1 \leq i \leq 8\}$, 具体为

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_8 - (\epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7))$$

$$\alpha_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

$$\alpha_i = \epsilon_{i-1} - \epsilon_{i-2} \quad (3 \leq i \leq 8)$$

型 E_7 的根系为型 E_8 的根系的子根系, 其 Dyn 图^[4]如图 1 所示.

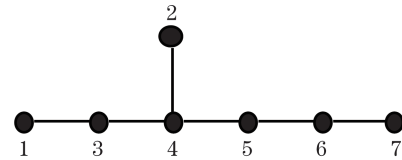


图 1 型 E_7 根系的 Dyn 图

Fig.1 Dynkin diagrams about root system of type E_7

下面对型 E_7 的根系进行分层. 约定 E_7 的单根的顺序对应根系的包含关系为

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \rightarrow & D_2 & \rightarrow & E_3 & \rightarrow & E_4 \rightarrow E_5 \rightarrow E_6 \rightarrow E_7 \\ & & & & \parallel & & \parallel & \parallel & \parallel \\ & & & & A_1 \times A_1 & \rightarrow & A_2 \times A_1 \rightarrow A_4 \rightarrow D_5 \end{array}$$

记

$$\Delta_2^+ = \{\beta \in \Delta^+(E_7) | \beta \geq \alpha_8\},$$

$$\beta \geq \alpha_t \text{ 不成立, } \forall t > s \quad (2)$$

E_7 的正根 $\Delta^+(E_7)$ 满足 $\Delta^+(E_7) = \bigcup_{i=1}^7 \Delta_s^+$. 为了方便下一步的讨论, 将 Δ_2^+, Δ_3^+ 放在同一层仍记作

$$\Delta_3^+ = \{\alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1, \alpha_2\}$$

由此, E_7 对应的分层 $\Delta(E_7) = \bigcup_{s=1,3}^7 \Delta_s$, 其中 $\Delta_s = \Delta_s^+ \cup (-\Delta_s^+)$. 于是 E_n ($3 \leq n \leq 7$) 的根系 $\Delta(E_n) = \bigcup_{s \leq n} \Delta_s$. 记 $s' = \max\{3, s+1\}$, 则 Δ_s 和 $\Delta_{s'}$ 总是表示连续的层. E_7 的正根^[5] 分层为

$$\Delta_1^+ = \{\alpha_1\}$$

$$\Delta_3^+ = \{\alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1, \alpha_2\}$$

$$\Delta_4^+ = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4, \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \end{array} \right\}$$

$$\Delta_5^+ = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_5, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2 + \alpha_3 + \\ 2\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 \end{array} \right\}$$

$$\Delta_6^+ = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_6, \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 + \\ \alpha_6, \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \\ \alpha_6, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \\ \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_2 + \alpha_3 + \\ 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \\ \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_2 + \\ 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + \\ 2\alpha_5 + \alpha_6, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 \end{array} \right\}$$

$$\Delta_7^+ = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_7, \alpha_6 + \alpha_7, \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7, \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \\ \alpha_7, \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7, \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \\ \alpha_7, \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7, \alpha_2 + \alpha_3 + \\ \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \\ \alpha_6 + \alpha_7, \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7, \alpha_1 + \alpha_2 + \\ \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7, \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \\ \alpha_6 + \alpha_7, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7, \alpha_2 + \alpha_3 + \\ 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + \\ 2\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \\ \alpha_6 + \alpha_7, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \\ \alpha_7, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7, \alpha_1 + \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7, \alpha_1 + \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \\ 3\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + \\ 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + \\ 2\alpha_6 + \alpha_7, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \\ \alpha_7, 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \end{array} \right\}$$

定理 2 $\forall \beta \in \Delta_s^+, \beta$ 表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的线性组合时系数 $k_s = 1$.

对每一层, H_s 表示图: 其顶点为 Δ_s^+ 中的根; 若 $\beta, \beta' \in \Delta_s^+, \pm(\beta - \beta')$ 为单根, 则 β 和 β' 之间用一条边连接. 这样的 H_s 为 Δ_s^+ 上的偏序图, 称为哈斯图, 如图 2 所示. 哈斯图很好地刻画了 Δ_s^+ 上的偏序关系, 但正交性并没有从中体现.

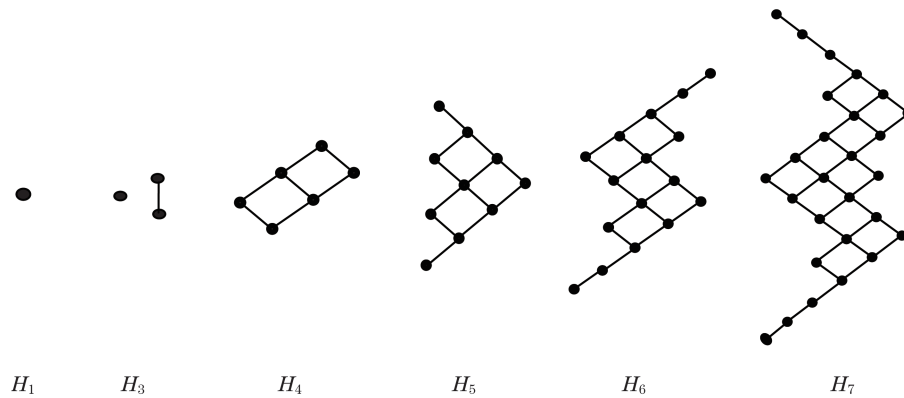


图 2 每一层的哈斯图

Fig.2 Hasse diagrams about every stratum

2.2 映射

Δ 为 E_7 的根系, $p = 2$. 设 $F = (\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2, \oplus)$ 表示非循环的四元群, 分别用 $0, 1, 2, 3$ 代表 $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$, 由此这个群的元素为 $\{0, 1, 2, 3\}$, 定义 F 上的“ $\oplus$ ”运算, 见表 1.

表 1 F 上的“ $\oplus$ ”运算
Tab.1 Operation“ $\oplus$ ”on F

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

这样 F 是一个 $\mathbb{Z}/2$ 上的二维向量空间, 在其上定义一个双线性型

$$(a|a') = \begin{cases} 0 & \text{若 } a = 0, a' = 0 \text{ 或 } a = a' \\ 1 & \text{其它} \end{cases} \quad (3)$$

取 $V = F^3$, 将 $(a, b, c) \in V$ 简记为 abc , 定义 V 上的“ $\oplus$ ”

$$abc \oplus a'b'c' = (a \oplus a', b \oplus b', c \oplus c') \quad (4)$$

在 V 上定义双线性型

$$(abc|a'b'c') = (a|a') + (b|b') + (c|c') \quad (5)$$

取集合 $S = \{a_1, \dots, a_7\} \subset V$, 其中

$$a_1 = 100, a_2 = 030, a_3 = 300, a_4 = 111,$$

$$a_5 = 003, a_6 = 001, a_7 = 033$$

定理 3 $f: \Delta^+ \rightarrow V \cup \{0\}$ 是双射.

证明 由定理 1 知 f 是单射, 又因为 $\#(\Delta^+ \cup 0) = \#(V) = 64$, 因此 f 为双射.

设 Γ_s 表示层 Δ_s^+ 在 f 下的像, 通过计算得到

$$\Gamma_1 = \{100\}$$

$$\Gamma_3 = \{300, 200, 030\}$$

$$\Gamma_4 = \{111, 121, 211, 311, 221, 321\}$$

$$\Gamma_5 = \{003, 112, 122, 212, 312, 222, 322, 333, 233, 133\}$$

$$\Gamma_6 = \{001, 002, 113, 123, 213, 313, 223, 323, 332, 232, 331, 231, 132, 131, 020, 010\}$$

$$\Gamma_7 = \{033, 032, 031, 120, 110, 220, 320, 210, 310, 301, 201, 302, 101, 202, 303, 102, 203, 013, 103, 023, 012, 022, 011, 021, 130, 230, 330\}$$

定理 4 层 $\Gamma_7 = \{abc \in V | a, b, c \text{ 有且仅有一个为 } 0\}$.

证明 由 Γ_7 的列举, 显然.

2.3 偏序和正交结构

对 $abc, a'b'c' \in V$, 若 $\{a = a', b = b', c = c'\}$ 有且仅有一个成立, 则记 $abc \sim a'b'c'$.

定义图 $O(V)$: 以 V 中元为顶点, 对 $abc, a'b'c' \in V$ 且 $abc \neq a'b'c'$, 若 $(abc|a'b'c') = 0$, $abc, a'b'c'$ 有一条边连接.

图 $T(V)$: 以 V 中元为顶点, 若 $abc \sim a'b'c'$, 则 abc 与 $a'b'c'$ 有一条边连接.

若 $X \subset V$, $O(X)$ 和 $T(X)$ 各自表示 $O(V)$ 和 $T(V)$ 被限制到 X 上的子图.

注 由推论 1, 可知图 $O(X)$ 中若两顶点之间有边连接, 则这两个顶点对应的根正交. 图 $O(X)$ 可以反映根系的正交结构. 又图 $O(X)$ 有边连接的两个顶点满足 $(abc|a'b'c') = 0$, 而图 $T(X)$ 有边连接的两个顶点满足 $\{a = a', b = b', c = c'\}$ 有且仅有一个成立, 前者的条件需要计算可以得出, 后者则仅需观察元素的特征就可以得出, 因此图 $T(X)$ 更有利于实现直观化, 但是前提是图 $T(X)$ 与图 $O(X)$ 是一致的.

定理 5 a. 图 $T(\Gamma_7)$ 和 $O(\Gamma_7)$ 是一致的; b. 图 $T(\Gamma/\Gamma_7)$ 和 $O(\Gamma/\Gamma_7)$ 是一致的.

证明 因为 $(abc|a'b'c') = (a|a') + (b|b') + (c|c')$, 所以 $(abc|a'b'c') = 0 \Leftrightarrow \{(a|a'), (b|b'), (c|c')\}$ 中有奇数个为 0.

a. 设 abc 和 $a'b'c'$ 是 Γ_7 中的不同的元素, 由定理 4, $\{a, b, c\}$ 和 $\{a', b', c'\}$ 中仅有一个为零. 若 $a = a' = 0$, 那么 $(abc|a'b'c') = 0 \Leftrightarrow b \neq b' \text{ 且 } c \neq c' \Leftrightarrow abc \sim a'b'c'$. 若 $a = b' = 0$, 那么 $(abc|a'b'c') = 0 \Leftrightarrow c = c' \Leftrightarrow abc \sim a'b'c'$. 由对称性, 其余情况可类似推出.

b. 设 abc 和 $a'b'c'$ 是 $\Gamma \setminus \Gamma_7$ 中的不同元素, 由定理 4, $\{a, b, c\}$ 和 $\{a', b', c'\}$ 中零的个数为 0 或 2. 以下分情况讨论:

(a) a, b, c, a', b', c' 全部非零, 那么

$(abc|a'b'c') = 0 \Leftrightarrow \{a \neq a', b \neq b', c \neq c'\}$ 中有偶数个成立 $\Leftrightarrow abc \sim a'b'c'$;

(b) a, b, c, a' 非零且 $b', c' = 0$, 那么 $(abc|a'b'c') = 0 \Leftrightarrow a = a' \Leftrightarrow abc \sim a'b'c'$;

(c) a, a' 非零且 $b = c = b' = c' = 0$, 那么 $(abc|a'b'c') \neq 0, abc \not\sim a'b'c'$;

(d) a, b' 非零且 $b = c = a' = c' = 0$, 那么 $(abc|a'b'c') = 0, abc \sim a'b'c'$.

(e) 其它情况, 由对称性得证.

推论 2 对 $\beta, \beta' \in \Delta_7$ 或 $\beta, \beta' \in \Delta(E_6)$ 且 $\beta \neq$

$\beta', \langle \beta, \beta' \rangle = 0$ 当且仅当图 $T(V)$ 中 $f(\beta), f(\beta')$ 有一条边连接.

证明 因为 $\langle \beta, \beta' \rangle = 0 \Leftrightarrow (f(\beta) | f(\beta')) = 0 \Leftrightarrow f(\beta) \sim f(\beta')$.

记 $\zeta_s = \sum_{i=s'}^7 \alpha_i, z_s = f(\zeta_s), s = 1, 3, 4, 5, 6$, 约定 $z_7 = 0$. 对 $\beta \in \Delta_s^+$, 定义 $\tilde{\beta} = \beta + \zeta_s$.

引理 4 $\forall \beta \in \Delta_s^+, s = 1, 3, 4, 5, 6$. a. $\langle \beta, \zeta_s \rangle = -1$; b. $\langle \beta, \zeta_t \rangle = 0, t > s'$; c. $\tilde{\beta} \in \Delta_7^+$.

证明 $\forall \beta \in \Delta_s^+$, 令 $\beta = \sum_{j=1}^s k_j \alpha_j$, 其中 $k_s = 1$.

a. $\langle \beta, \zeta_s \rangle = \langle \sum_{j=1}^s k_j \alpha_j, \sum_{i=s'}^7 \alpha_i \rangle = \langle k_s \alpha_s, \alpha_{s'} \rangle = -k_s = -1$.

b. 对 $t > s'$, $\langle \beta, \zeta_t \rangle = \langle \sum_{j=1}^s k_j \alpha_j, \sum_{i=t}^7 \alpha_i \rangle = 0$.

c. 由 a, $\tilde{\beta} = \beta + \zeta_s$ 是一个根. 又因为 $\tilde{\beta} = \sum_{j=1}^s k_j \alpha_j + \sum_{i=s'}^7 \alpha_i$, 其系数 $\tilde{k}_7 = 1, \tilde{\beta} \in \Delta_7^+$.

定理 6 $\forall \beta, \beta' \in \Delta_s^+, s = 1, 3, 4, 5, 6$, 则有:

a. $\langle \beta, \beta' \rangle = \langle \tilde{\beta}, \tilde{\beta}' \rangle$;

b. $\beta < \beta' \Leftrightarrow \tilde{\beta} < \tilde{\beta}'$.

证明 a. $\langle \tilde{\beta}, \tilde{\beta}' \rangle = \langle \beta, \beta' \rangle + \langle \beta, \zeta_s \rangle + \langle \zeta_s, \beta' \rangle + \langle \zeta_s, \zeta_s \rangle = \langle \beta, \beta' \rangle + (-1) + (-1) + 2 = \langle \beta, \beta' \rangle$.

b. 由 $\tilde{\beta} - \tilde{\beta}' = \beta - \beta'$, 显然结构成立.

注 此定理说明 $\beta \in \Delta_s^+, s = 1, 3, 4, 5, 6$ 与 $\tilde{\beta} \in \Delta_7^+$ 有相同的正交关系和偏序关系, 这也建立了其它层与第 7 层的联系.

引理 5 设 $x_1, x_2 \in \Gamma_7$. a. 若 x_1 与 x_2 正交, 则存在唯一向量 $x_3 \in \Gamma$, 使 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 是两两正交的, 且 $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 0$; b. 若 $x_1 \oplus x_2 \in \Gamma_7$, 则 x_1 与 x_2 正交.

证明 设 $\beta_1 = f^{-1}(x_1) \in \Delta_7^+, \beta_2 = f^{-1}(x_2) \in \Delta_7^+$, 将 β_1 和 β_2 看作根系 E_8 的根.

a. 若 x_1, x_2 正交, 则 $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle = 0$. 又对任意 $\beta \in \Delta_7^+, \langle \alpha_8, \beta \rangle = -1, \alpha_8 + \beta \in \Delta(E_8)$. 所以 $\alpha_8 + \beta_1 \in \Delta(E_8)$. 又 $\langle \alpha_8 + \beta_1, \beta_2 \rangle = -1$, 所以 $\alpha_8 + \beta_1 +$

$\beta_2 \in \Delta(E_8)$.

先证存在性. 设 $\hat{\alpha}_8 = -(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8)$ 为 E_8 的仿射根, $\langle \alpha_8, \hat{\alpha}_8 \rangle = -1$, 又 $\forall \gamma \in \Delta(E_7), \langle \hat{\alpha}_8, \gamma \rangle = 0$, 则 $\langle \alpha_8 + \beta_1 + \beta_2, \alpha_8 + \hat{\alpha}_8 \rangle = -1$, 所以 $2\alpha_8 + \beta_1 + \beta_2 + \hat{\alpha}_8 \in \Delta(E_8)$. 设 $\beta_3 = -(2\alpha_8 + \beta_1 + \beta_2 + \hat{\alpha}_8), x_3 = f(\beta_3)$, 由于 β_3 表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的线性组合时系数 $k_8 = 0, k_7 = 1$, 所以 $\beta_3 \in \Delta_7^+$, 因此 $x_3 \in \Gamma_7$. 又 $\langle \beta_1, \beta_3 \rangle = \langle \beta_3, \beta_2 \rangle = 0$, 所以 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 是两两正交的. 又对任意 $\gamma \in \Delta(E_7), (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 | f(\gamma)) = \langle \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \gamma \rangle \pmod{2} = \langle -\hat{\alpha}_8 - 2\alpha_8, \gamma \rangle \pmod{2} = 0$. 因此, $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 0$.

再证唯一性. 设 x_3 是与 x_1 和 x_2 正交的任意向量, $\beta_3 = f^{-1}(x_3) \in \Delta_7^+$, 有 $\langle \alpha_8 + \beta_1 + \beta_2, \alpha_8 + \beta_3 \rangle = -1$, 所以 $\gamma = -(2\alpha_8 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \in \Delta(E_8)$. γ 的表达式中系数 $k_8 = -2$, 而 $\Delta(E_8)$ 中仅有仿射根 $\hat{\alpha}_8$ 具有这个性质. 因此 $\gamma = \hat{\alpha}_8$, 从而

$$\beta_3 = -(2\alpha_8 + \beta_1 + \beta_2 + \hat{\alpha}_8)$$

b. 若 x_1 和 x_2 不是正交的, 那么 $\beta_1 - \beta_2$ 是一个根, 但其不在 Δ_7 中, 因此 $x_1 \oplus x_2 \notin \Gamma_7$.

定理 7 设 $x, y \in \Gamma_s, (x | y) = 0 \Leftrightarrow x \oplus y \in \Gamma_7$.

证明 由引理 4 中 c, $x \oplus z_s, y \oplus z_s \in \Gamma_7$. 因此 $(x | y) = 0 \Leftrightarrow (x \oplus z_s | y \oplus z_s) = 0$. 由引理 5, $x \oplus y = (x \oplus z_s) \oplus (y \oplus z_s) \in \Gamma_7$.

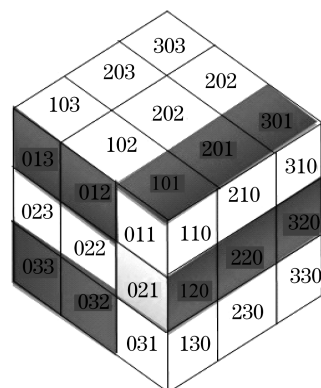
注 此定理给出了同一层两个根的正交性的判定方法.

下面在一个立方体上将 Γ_7 具像化, 由定理 6, 其它层上的根的正交和偏序关系也可类似得到. Γ_7 的元素被排列如图 3(a).

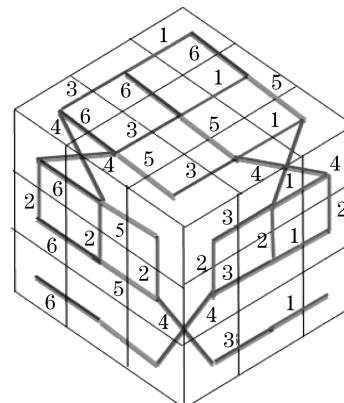
在图 3(a)中, 由定理 5 及图 $T(V)$ 的定义, 对 $\forall x \in \Gamma_7, \Gamma_7$ 中与 x 正交的元素 y 被描述为:

a. 若 y 与 x 在立方体的同一个面上, 那么 y 与 x 不在同一行或同一列;

b. 若 y 与 x 在不同的面上, 那么 y 位于 x 所在行或列延伸的行或列. 图 3 给出了 Γ_7 中与 021 正交的根的像的集合为: $\{012, 013, 032, 033, 101, 120, 201, 220, 301, 320\}$.



(a) 第7层上的正交关系



(b) 第7层上的偏序关系

图 3 第 7 层上的正交和偏序关系

Fig. 3 Orthogonality and partial order on the seventh stratum

对 $x, y \in \Gamma_7$, 若 $y = x \oplus a_i$, 其中 $a_i = f(\alpha_i)$, $i = 1, 2, \dots, 6$, 则 x 和 y 之间用一条边连接. 这样在立方体中复原 Δ_7^+ 的偏序关系图 H_7 (图 3(b)), 图中 $i, i = 1, 2, \dots, 6$ 表示该边连接的 x 和 y 满足 $y = x \oplus a_i$.

参考文献:

- [1] Purbhoo K. Compression of root systems and the E-sequence [J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2008, 15(1): 26 – 46.
- [2] Wildberger N J. A combinatorial construction for simply-laced Lie algebras [J]. Adv Appl Math, 2003, 30(5): 385 – 396.
- [3] Humphreys J E. Introduction to Lie algebras and representation theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1972.
- [4] 苏育才, 卢才辉, 崔一敏. 有限维半单李代数简明教程 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.

- [5] 田丽, 胡建华. 有限域上型 D_n, E_6, E_7, E_8, F_4 的 Chevalley 群之间的同态 [D]. 上海: 上海理工大学, 2011.
- [6] Purbhoo K, Sottile F. The recursive nature of cominuscule Schubert calculus [J]. Adv Math, 2008, 217(5): 1962 – 2004.
- [7] Godsil C, Royle G. Algebraic graph theory [M]. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [8] Wildberger N J. Minuscule posets from neighbourly graph sequences [J]. European J Combinatorics, 2003, 24(6): 741 – 757.
- [9] Belkale P, Kumar S. Eigenvalue problem and a new product in cohomology of flag varieties [J]. Invent Math, 2006, 166(1): 185 – 228.
- [10] Stembridge J R. On minuscule representations, plane partitions and involutions in complex Lie groups [J]. Duke Math J, 1994, 73(2): 469 – 490.

(编辑: 金 虹)