

文章编号:1007-6735(2014)01-0012-03

双圈图的无符号拉普拉斯特征多项式的系数

徐丽珍, 何常香

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 设图 G 为简单图, G 的无符号拉普拉斯矩阵 $Q(G) = D(G) + A(G)$, 其特征多项式记为 $\varphi(G, \lambda) = \sum_{i=0}^n p_i(G) \lambda^{n-i}$. 给出了双圈图的无符号拉普拉斯特征多项式的常数项 $p_n(G)$, 并证明了 $p_n(G)$ 仅与双圈图的基图有关.

关键词: 双圈图; 无符号拉普拉斯矩阵; 系数
中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

On the Signless Laplacian Coefficients of Bicyclic Graphs

XU Li-zhen, HE Chang-xiang

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Let G be a simple graph, $Q(G) = D(G) + A(G)$ be the signless Laplacian matrix of G , and $\varphi(G, \lambda) = \sum_{i=0}^n p_i(G) \lambda^{n-i}$ be the characteristic polynomial of its signless Laplacian matrix. Giving $p_n(G)$ of the characteristic polynomial of signless Laplacian matrix of bicyclic graph, it is proved that $p_n(G)$ is determined by the base of G .

Key words: bicyclic graph; signless Laplacian matrix; coefficient

1 基本定义

设 $G = (V, E)$ 是 n 阶简单图 (不含环和多重边), 其中, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是顶点集合, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 是边集合. 图 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 为 $n \times n$ 矩阵, 设 $A(G) = (a_{ij})$, 其中, 当点 v_i 与点 v_j 相邻时, $a_{ij} = 1$; 当点 v_i 与点 v_j 不相邻时, $a_{ij} = 0$. 令 $d(v_i)$ 表示顶点 v_i 的度, 图 G 的无符号拉普拉斯矩阵 $Q(G) = D(G) + A(G)$, 其中, $D(G)$

是图 G 的度对角阵. 无符号拉普拉斯矩阵 $Q(G)$ 的特征多项式记为

$$\varphi(G, \lambda) = \det(\lambda I - Q(G)) = \sum_{i=0}^n p_i(G) \lambda^{n-i} \quad (1)$$

式中, I 为 n 阶单位矩阵.

如果连通图 G 的边数等于顶点数, 则称 G 为单圈图; 如果连通图 G 的边数等于顶点数加 1, 则称 G 为双圈图. $G - e$ 表示由 G 删去边 e 后得到的图.

定义 1^[1] 设 H 是图 G 的一个生成子图, 若 H 的连通分支是树, 或者是圈长为奇数的单圈图, 则称

收稿日期: 2013-01-22

第一作者: 徐丽珍(1988-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 组合数学与图论. E-mail: xulizhen200788@126.com

通讯作者: 何常香(1979-), 女, 副教授. 研究方向: 组合数学与图论. E-mail: changxiang-he@163.com

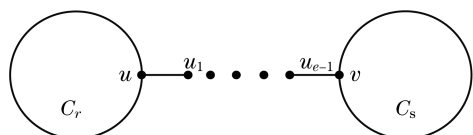
H 是图 G 的一个 TU -子图;若 H 恰有 c 个圈长为奇数的单圈分支和 s 个树分支 $T_1, T_2, \dots, T_s$, 则定义

$$W(H) = 4^c \prod_{i=1}^s (1 + |E(T_i)|) = 4^c \prod_{i=1}^s n_i, n_i \text{ 表示树 } T_i \text{ 的阶数.}$$

引理 1^[1] 设 $\mathcal{H}_i$ 为图 G 中所有具有 i 条边的 TU -子图集合, 则式(1)中 $p_0(G) = 1$,

$$p_i(G) = \sum_{H \in \mathcal{H}_i} (-1)^i W(H), \quad 1 \leq i \leq n$$

在引理 1 中, 由于 $\mathcal{H}_i$ 的确定比较困难, 所以, $p_i(G)$ 也很难被确定. 文献[1]给出了无符号拉普拉斯特征多项式系数 $p_1(G)$ 和 $p_2(G)$ 的表达式. 文献[2]给出了 $p_3(G)$ 的表达式. 文献[3]给出了经删边、剖分及移邻等变换后所得图 G' 的 $p_i(G')$ 的绝对值与原图 $p_i(G)$ 的绝对值的大小关系, 并以此为工具, 确定了无符号拉普拉斯特征多项式系数绝对值最小的单圈图. 更多关于系数的研究见文献[4-9]. 现主要研究双圈图的无符号拉普拉斯特征多项式的常数项.



2 双圈图的分类

若 G 是双圈图, 称 G 的极小双圈子图 $\hat{G}$ 为 G 的基图. 很显然 $\hat{G}$ 中不含悬挂点.

设 $\mathcal{B}(n)$ 为所有 n 阶双圈图的集合, 不含悬挂点的双圈图有 $B(r, s, l)$ 和 $B(P_k, P_l, P_t)$ 这两类, 如图 1 所示.

定义 2 若 $\hat{G}$ 是某一个 $B(r, s, l)$, 则称 G 为第 I 类双圈图, 并定义

$$\mathcal{B}_1(n) = \{G \in \mathcal{B}(n) \mid \hat{G} = B(r, l, s), \\ r \geq 3, s \geq 3 \text{ 且 } l \geq 0\}$$

定义 3 若 $\hat{G}$ 是某一个 $B(P_k, P_l, P_t)$, 则称 G 为第 II 类双圈图, 并定义

$$\mathcal{B}_2(n) = \{G \in \mathcal{B}(n) \mid \hat{G} = B(P_k, P_l, P_t), \\ 1 \leq t \leq \min(k, l)\}$$

$$\text{易见 } \mathcal{B}_n(n) = \mathcal{B}_1(n) \cup \mathcal{B}_2(n).$$

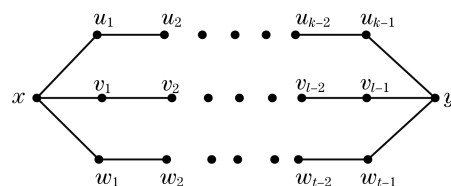


图 1 $B(r, s, l)$ 和 $B(P_k, P_l, P_t)$
Fig.1 $B(r, s, l)$ and $B(P_k, P_l, P_t)$

3 双圈图的无符号拉普拉斯系数 $p_n(G)$

现主要给出两类双圈图的无符号拉普拉斯特征多项式的常数项.

定义 4 设图 G 是 n 阶连通图, $e = v_1 v_2$ 是图 G 的一条非悬挂边, 在图 G 中的点 v_1 处添加一条悬挂边, 再将边 e 收缩(即将点 v_1 和 v_2 粘合)后得到一个新的 n 阶连通图 $G' = \tau(G, 1, 2)$.

定理 1 设 $G \in \mathcal{B}_1(n)$, 则

$$p_n(G) = \begin{cases} 0, & \text{若 } r, s \text{ 均为偶数} \\ (-1)^n 4x, & \text{若 } r, s \text{ 奇偶性不同,} \\ & \text{设 } x \text{ 为 } r, s \text{ 中的偶数} \\ (-1)^n (4r + 4s + 16l), & \text{若 } r, s \text{ 均为奇数} \end{cases}$$

证明 由引理 1 可知

$$p_n(G) = \sum_{H \in \mathcal{H}_n} (-1)^n W(H)$$

若 $H \in \mathcal{H}_n$, 则 H 为 G 的边数为 $n + 1 - 1 = n$ 的 TU -子图, 即存在 $e \in E(G)$ 使得 $H = G - e$; 若

$e \notin E(\hat{G})$, 则 $G - e \notin \mathcal{H}_n$. 以下假设 $e \in E(\hat{G})$, 按 r, s 的奇偶性进行讨论.

情形 1 若 r, s 均为偶数.

此时 $\mathcal{H}_n = \varphi$, 从而有 $p_n(G) = 0$.

情形 2 若 r, s 的奇偶性不同.

不失一般性, 不妨设 $x = r$ 为偶数(即 C_r 为偶圈). 只有当 $e \in E(C_r)$ 时, $H = G - e$ 才是 G 的 TU -子图, 并且此时的 $W(H) = 4$, 从而有

$$p_n(G) = \sum_{H \in \mathcal{H}_n} (-1)^n W(H) = (-1)^n 4r$$

情形 3 若 r, s 均为奇数.

若 e 不在圈上, 则 $G - e$ 是 G 的含 2 个奇单圈分支的 TU -子图, 故 $W(H) = 4^2$; 若 e 在圈上, 则 $G - e$ 是 G 的恰有 1 个奇单圈分支的 TU -子图, 且 $W(H) = 4$. 综上

$$p_n(G) = \sum_{H \in \mathcal{H}_n} (-1)^n W(H) = (-1)^n (4r + 4s + 16l)$$

由定理 1 的结论可知, 收缩加悬挂边后双圈图中圈的奇偶性发生改变, 所以, 图的无符号拉普拉斯

特征多项式系数 $p_n(G)$ 的大小关系很难确定.

例 1 设图 G 的阶数为 $n=9$, 图 G' 和 G'' 是由

图 G 收缩边 $v_1 v_2$ 加一条悬挂边于点 v_1 而得到的, 如图 2 和 3 所示.

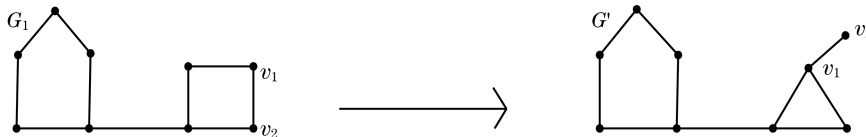


图 2 图 G_1 和图 $G' = \tau(G_1, 1, 2)$
Fig.2 Graph G_1 and $G' = \tau(G_1, 1, 2)$



图 3 图 G_2 和图 $G'' = \tau(G_2, 1, 2)$
Fig.3 Graph G_2 and $G'' = \tau(G_2, 1, 2)$

显然 $p_n(G_1) = p_n(G_2) = -16$, $p_n(G') = -(4 \times 5 + 4 \times 3 + 4^2 \times 1) = -48$, $p_n(G'') = 0$, $p_n(G_1) \geq p_n(G')$, $p_n(G_2) \leq p_n(G'')$.

定理 2 设 $G \in \mathcal{B}_2(n)$, 则

$$p_n(G) = \begin{cases} 0, & \text{若 } k, l, t \text{ 这三者的奇偶性相同} \\ (-1)^n & \\ 4(x+y), & \text{其它} \end{cases}$$

式中, x, y 为 k, l, t 中奇偶性相同的 2 个数.

证明 由引理 1 可知

$$p_n(G) = \sum_{H \in \mathcal{H}_n} (-1)^n W(H)$$

若 $H \in \mathcal{H}_n$, 则 H 为 G 的边数为 $n+1-1=n$ 的 TU -子图, 即存在 $e \in G$ 使得 $H = G - e$; 若 $e \notin \hat{G}$, 则 $G - e \notin \mathcal{H}_n$. 以下假设 $e \in \hat{G}$, 按 k, l, t 的奇偶性进行讨论.

情形 1 若 k, l, t 这三者的奇偶性相同.

不失一般性, 不妨假设 k, l, t 均为偶数, 此时 $\mathcal{H}_n = \varphi$, 从而有 $p_n(G) = 0$.

情形 2 若 k, l, t 这三者的奇偶性不完全相同.

不妨设 $x = l, y = t$ 为偶数, k 为奇数.

若 e 在 x 到 y 的长为 k 的路中, 则 $G - e$ 不是 TU -子图; 若 e 在 x 到 y 的长为 l 或 t 的路中, 则 $G - e$ 是 G 的恰有一个奇单圈分支的 TU -子图, 故 $W(H) = 4$. 综上

$$p_n(G) = \sum_{H \in \mathcal{H}_n} (-1)^n W(H) = (-1)^n (4l + 4t)$$

由定理 1 和定理 2 可知, 对于非二部双圈图, $p_n(G)$ 的绝对值有最小值 16. 由定理 1 和 $r \geq 3, s \geq 3$ 可知, 当 $r = 4$ 或 $s = 4$ 时, $p_n(G)$ 的绝对值取到最小值 16, 即非二部双圈图的 $p_n(G)$ 的绝对值取到最小值 16 时, 第一类双圈图 $\mathcal{B}_1(n)$ 必含有 1 个 C_4 圈和 1 个奇单圈; 由定理 2 可知, 当 $x = 1, y = 3$ 或 $x = 2, y = 2$ 时, $p_n(G)$ 的绝对值取到最小值 16,

即非二部图 $p_n(G)$ 的绝对值取到最小值 16 时, 第二类双圈图 $\mathcal{B}_2(n)$ 必含有 1 个 C_4 圈和 1 个奇单圈. 同时, 由以上定理可知, 双圈图的无符号拉普拉斯特征多项式的常数项只与圈长的奇偶性有关.

参考文献:

- [1] Cvetkovi D, Rowlinson P, Simic S. Signless Laplacian of finite graphs[J]. Linear Algebra and its Applications, 2007, 423(1): 155 - 171.
- [2] Wang J F, Huang Q H. Some results on the signless Laplacians of graphs[J]. Applied Mathematics Letters, 2010, 23(9): 1045 - 1049.
- [3] Mirzakhah M, Kiani D. Some results on signless Laplacian coefficients of graphs[J]. Linear Algebra and its Applications, 2012, 437(9): 2243 - 2251.
- [4] Oliveira C S, Maia de Abreu N M, Jurkiewicz S. The characteristic polynomial of the Laplacian of graphs in (a, b) -linear classes [J]. Linear Algebra and its Applications, 2002, 356(1/2/3): 113 - 121.
- [5] He C X, Shan H Y. On the Laplacian coefficients of bicyclic graphs[J]. Discrete Mathematics, 2010, 310(23): 3404 - 3412.
- [6] Mohar B. On the Laplacian coefficients of acyclic graphs [J]. Linear Algebra and its Applications, 2007, 422(2/3): 736 - 741.
- [7] Ilic A, Ilic M. Laplacian coefficients of trees with given number of leaves or vertices of degree two[J]. Linear Algebra and its Applications, 2009, 431(11): 2195 - 2202.
- [8] Stevanovic D, Ilic A. On the Laplacian coefficients of unicyclic graphs [J]. Linear Algebra and its Applications, 2009, 430(8/9): 2290 - 2300.
- [9] 陈永玲, 何常香. 二部双圈图的拉普拉斯系数[J]. 上海理工大学学报, 2012, 34(5): 481 - 486.

(编辑: 石 瑛)