

文章编号:1007-6735(2014)01-0015-06

有强带 C -根的半群

李慧明, 高振林, 刘皖平
(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 应用半群理论简介中关于半群的根描述, 引进半群的强(带) C -根、有强带 C -根的半群等概念. 指出有强带 C -根的半群类包含左(右)群带的半格半群作为其子类. 讨论强(带) C -根的性质, 有强带 C -根的半群的结构性质. 明确它与左(右)群带的半格半群、左 C -半群之间的关系. 有强带 C -根的半群的结构特征定理推广了左(右)群带的半格半群、左 C -半群的结构特征定理的结果. 这些结果表明, 半群的根理论是研究半群结构的一种有效方法.

关键词: 左(右)逆半群; (左) C -半群; 强(带) C -根; 左(右)群带的半格

中图分类号: O 152.7 **文献标志码:** A

Semigroups with Strong Band Clifford Radicals

LI Hui-ming, GAO Zhen-lin, LIU Wan-ping
(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The radicals of semigroups were described in accordance with the semigroup theory. The concepts of strong(band) C -radicals of semigroups and the semigroups with strong band C -radicals were defined. It was indicated that the semilattice of left(right) bands of groups and left C -semigroups are contained in the class of semigroups. The properties of the strong band C -radicals and the semigroups with strong band C -radicals were studied. The structure theorem of this class of semigroups was proved. The results in the article generalize the results of semilattice of left(right) bands of groups and left C -semigroups. So, the theory of radicals of semigroup is an effective ways to study the structure of semigroups.

Key words: *left (right) inverse semigroups; (left) C -semigroups; strong (band) C -radicals; semilattice of left (right) bands of groups*

1 预备知识

半群 S 上的格林关系 L, R, D, H, J 定义^[1]为

$$aLb \Leftrightarrow S^1a = S^1b; aRb \Leftrightarrow aS^1 = bS^1$$

$D = L \vee R; H = L \wedge R; aJb \Leftrightarrow S^1aS^1 = S^1bS^1$

性质 1^[1] a. 对于半群 $S, R(L)$ 是 S 上左(右)同余;

b. 设 H 是半群 S 的子半群, 则

$$L^H \subseteq L^S \cap (H \times H), R^H \subseteq R^S \cap (H \times H)$$

收稿日期: 2013-01-20
第一作者: 李慧明(1988-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 半群理论. E-mail: menglihuiming@sina.com
通讯作者: 高振林(1950-), 男, 教授. 研究方向: 半群理论. E-mail: zlgao@sina.com

$$J^H \subseteq J^S \cap (H \times H)$$

若 H 是半群 S 的正则子半群, 以上成相等包含关系.

半群 S 称为 *Clifford* 半群^[1] (简称为 C -半群), 若 S 是正则半群且幂等元均为中心幂等元, 即 $E(S) \subseteq C(S)$. 半群 S 称为右(左)正则半群, 若对 S^* , $E(L_a) \neq \Phi$ ($E(R_a) \neq \Phi$). 右(左)正则半群 S 称为充足的, 若对 S^* , $|E(L_a)| = 1$ ($|E(R_a)| = 1$). 显然, 正则半群既为左正则半群又为右正则半群. 半群 S 称为右(左)逆半群^[2-3], 如果 S 是正则半群, 且对 $\forall a \in S$, 有

$$|aV(a)| = 1 \text{ (或 } |V(a)a| = 1)$$

$V(a)$ 表示 a 的所有正则逆元集. 半群 S 称为左 *Clifford* 半群^[4] (简称为左 C -半群), 若 S 是充足右正则半群且 $aS \subseteq L(a)$ ($\forall a \in S$). 文献[4]指出, C -半群 S 是左 C -半群, 反之不必. 左(右)零带 $I_a(\Lambda_a)$ 与群 G_a 的直积 $I_a \times G_a$ ($\Lambda_a \times G_a$) 称为左(右)群带^[2-3]. 称半群直积 $S_1 \times S_2$ 为半格织积, 记为 $S_1 \times_{ssp} S_2$, 若 S_1, S_2 有共同的半格同态像. 文献[1-6]证明了以下引理.

引理 1 a. 在充足左(右)正则半群 S 中, 对 $\forall a \in S$, $\exists$ 幂等元, 记为 $a^+(a^*)$, 使得

$$a = aa^+ (= a^*a)$$

- b. 左(右)逆半群 S 为充足右(左)正则半群;
- c. 左 C -半群 S 为完全正则左群带的半格, 反之不必;
- d. 左(右)群带的半格 S 是右(左)逆半群, 且 S 同构于左正则带 $I(\wedge)$ 与 C -半群 T 的半格织积, 记为 $S \cong I \times_{ssp} T$ ($\Lambda \times_{ssp} T$);
- e. 半群 S 是 C -半群当且仅当 S 是 J -类子群的半格, 即 $S = \bigcup_{\alpha \in Y} G_\alpha$

定义 1 半群 S 上同余 ρ 称为 C -同余, 若 S/ρ 是 C -半群.

定义 2 对于半群 S , 若 S 上没有任何 C -同余, 则定义 S 上的泛关系 $S \times S$ 为 S 上的 C -根同余, 且称 S 为 C -根半群. 若 S 上至少有一个 C -同余, 则定义 S 上所有 C -同余 ρ_α ($\alpha \in \omega$) 的交为 S 上 C -根同余, 记作 ρ_{cr} . 即

$$\rho_{cr} = \bigcap_{\alpha \in \omega} \{\rho_\alpha \mid \rho_\alpha (\alpha \in \omega) \text{ 是 } S \text{ 上 } C\text{-同余}\}$$

C -根同余 ρ_{cr} 可能不再是 C -同余. 但以下结论是易见的.

引理 2 若 ρ_{cr} 仍是 S 上 C -同余, 则它是 S 上最小 C -同余. 反之, 若 S 上 C -同余 ρ 是 S 上最

小 C -同余, 则 $\rho = \rho_{cr}$.

定义 3 设 ρ 是半群 S 上一个同余, 若存在 S 的子集 H , 使得 $S = H \cup C$, 且 C 同构于 S/ρ , 则称 H 是 S 的 ρ -集. 此时, 将 ρ 记作 ρ_H .

定义 4 若半群 S 上 C -根同余 ρ_{cr} 有 ρ_{cr} -集, 则将 ρ_{cr} -集记作 $N(S)$. 称 $N(S)$ 为 S 的 C -根集. 这时有 $\rho_{cr} = \rho_{N(S)}$. 因此可将 C -根同余 ρ_{cr} 和 C -根集 $N(S)$ 统称为 S 的 C -根.

定义 5 如果 ρ_{cr} 仍是半群 S 上 C -同余, 且 S 的 C -根集 $N(S)$ 存在, 则称 C -根 ρ_{cr} 是强 C -根.

命题 1 设半群 S 有强 C -根 ρ_{cr} , 则根集 $N(S)$ 可表为

$$N(S) = \bigcap_{\alpha \in \omega} \{H_\alpha \mid H_\alpha \text{ 是 } S \text{ 的 } C\text{-同余 } \rho_\alpha \text{ 之集}\}$$

证明 设 $T = \bigcap_{\alpha \in \omega} \{H_\alpha \mid H_\alpha \text{ 是 } S \text{ 的 } C\text{-同余 } \rho_\alpha \text{ 之集}\}$, 由于 T 是所有 C -同余 ρ_α -集的交, 而 ρ_{cr} 是强根, 由定义 4 知, T 是 S 的 ρ_{cr} -集, 则由根集 $N(S)$ 的定义知 $N(S) = T$.

由引理 1 知, 左(右)逆半群与左 C -半群均为正则半群. 文献[1-6]讨论的均为这类半群的子类. 本文试图用文献[1]中关于半群的根描述, 引进另一类正则半群, 称之为有强带 C -根的半群. 证明左(右)群带的半格半群、左 C -半群均为有强带 C -根的半群. 并用实例证明, 存在这种半群, 它不是以上半群. 通过讨论强(带) C -根与有强带 C -根的半群的性质, 用织积手段给出有强带 C -根的半群的结构特征.

2 有强带 C -根半群的概念及相关性质

定义 6 若半群 S 有强 C -根 ρ_{cr} , 且 $N(S) = E(S)$ 是带, 则称 S 为有强带 C -根半群.

引理 3 设 S 为有零元的左(右)群带的半格半群, 则以下各条成立:

- a. $L = J(R = J)$ 是 S 上半格同余;
- b. S 是有强带 C -根的半群, 且 $S = N(S) \cup T^*$, $T = T^* \cup \{0\} \cong S/\rho_{N(S)}$ 是有零元的 C -半群, 根同余为

$$\rho_{N(S)} = \{(x, y) \in S \times S \mid (\exists e \in E(y^+)) x = ey\}$$

$$(\rho_{N(S)} = \{(x, y) \in S \times S \mid (\exists f \in E(y^*)) x = yf\})$$

这里 $E(x^+)(E(x^*))(x \in S)$ 表示元 $x^+(x^*)$ 生成的矩形带.

证明 由定义, 设

$$S \cong \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha = \bigcup_{\alpha \in Y} (I_\alpha \times G_\alpha) \quad (1)$$

这里 Y 是半格, $S_\alpha = I_\alpha \times G_\alpha$ ($\alpha \in Y$) 是左群带, 令 $I = \bigcup_{\alpha \in Y} I_\alpha$, $T = \bigcup_{\alpha \in Y} G_\alpha = T^* \dot{\cup} \{0\}$, 则 I, T 分别是 S 的有零元左正则子带与 C -子半群, 其中 $T^* = \bigcup_{\alpha \in Y \setminus \{0\}} G_\alpha$ 是 S 的无零元 C -子半群, 且 $S = E(S) \cup T^*$.

a. 由式(1)知, 在 S 上

$$L = \{(a, b) \in S \times S \mid (\exists \alpha \in Y) (a, b) \in L^{S_\alpha}\} \cup \{1_S\} \quad (2)$$

而在左群带 $(\forall \alpha \in Y) S_\alpha$ 上, 由文献[2]知, L^{S_α} 是半格同余, 且 $L^{S_\alpha} = J^{S_\alpha}$. 因此, 由式(2)得引理3中结论a.

b. $\rho \triangleq \{(x, y) \in S \times S \mid (\exists e \in E(y^+) x = ey)\}$. 先证 ρ 是 S 上的等价关系: 由引理1知, S 为充足左正则半群, 对于 $x^+ \in E(x^+)$, 有 xRx^+ , 因此 $x = x^+x$. ρ 具有自反性. 若 $(x, y) \in \rho$, 由 ρ 的定义知 $\exists e \in E(y^+)$, $\exists x = ey$, 由于

$$yRy^+, eyRey^+ \Rightarrow y^+ eyRy^+ Ry \Rightarrow y = y^+y = y^+ey^+y = y^+ey$$

又 $x^+Rey^+ \Rightarrow E(x^+) = E(ey^+) = E(y^+)$, 因此 $y^+ \in E(y^+) = E(x^+)$. 由 $x = ey$, 得

$$y^+x = y^+ey = y \text{ 即 } (y, x) \in \rho$$

ρ 具有对称性. 若

$(x, y) \in \rho, (y, z) \in \rho, \exists e \in E(y^+), f \in E(z^+)$ 使得 $x = ey, y = fz$.

类似以上讨论得: $E(y^+) = E(z^+) = E(x^+)$, 从而 $ef \in E(z^+)$, 有 $x = (ef)z$, 即 $(x, z) \in \rho$. ρ 具有传递性.

其次证 ρ 是 S 上的同余: 若 $(x, y) \in \rho, \exists e \in E(y^+), \exists x = ey$, 对于 $\forall c \in S$ 因 $xc = eyc$, $(yc)^+ = c^+y^+ = c^+ey^+ \Rightarrow e \in E(y^+) \subseteq E((yc)^+)$, 故 ρ 是 S 上的右同余. 再由 ρ 具有对称性知 xLy 成立. 对于 $\forall c \in S$, 由引理3中结论a, $cxLcy$, 且 $cx, cy \in L_e$ ($\exists e \in E((cy)^+)$), $cx = ecy$. 故 ρ 是 S 上的左同余.

再证 $\rho = \rho_{N(S)}$: 易知 $E(S) = I \cup (\bigcup_{\alpha \in Y} \{1_\alpha\})$, $1_\alpha \in G_\alpha$ ($\forall \alpha \in Y$). 令

$$\varphi: S/\rho \rightarrow T$$

$$(x\rho)\varphi = \begin{cases} 1_\alpha, x \in I_\alpha \cup \{1_\alpha\} \\ x_\alpha, 1_\alpha \neq x \in G_\alpha \end{cases} (\forall \alpha \in Y)$$

可证 φ 是同构映射, 从而 ρ 是 S 上的 C -同余. 由 $S = E(S) \cup T^*$, 显然 φ 是满射. 设 $(\alpha, \beta \in Y)$

$(x_\alpha\rho)\varphi = (y_\beta\rho)\varphi$, 由 φ 定义知, $\alpha = \beta$. 若 $x_\alpha, y_\alpha \in I_\alpha \cup \{1_\alpha\}$, 由 ρ 定义知, $x_\alpha\rho = y_\alpha\rho$. 若 $x_\alpha, y_\alpha \notin I_\alpha \cup \{1_\alpha\}$, 于是 $x_\alpha = 1_\alpha y_\alpha = y_\alpha$. 故 φ 是单射. 为证 φ 是同态映射: 分4种情形讨论. (a). 若 $x_\alpha \in I_\alpha \cup \{1_\alpha\}$, $y_\beta \in I_\beta \cup \{1_\beta\}$, 则 $x_\alpha y_\beta \in I_{\alpha\beta} \cup \{1_{\alpha\beta}\}$. (b). 若 $1_\alpha \neq x_\alpha \in G_\alpha, 1_\beta \neq y_\beta \in G_\beta$ 则 $x_\alpha y_\beta \in G_{\alpha\beta}$. (c). 若 $x_\alpha \in I_\alpha \cup \{1_\alpha\}, 1_\beta \neq y_\beta \in G_\beta$, 则 $x_\alpha y_\beta = 1_\alpha y_\beta \in G_{\alpha\beta}$. (d). 若 $1_\alpha \neq x_\alpha \in G_\alpha, y_\beta \in I_\beta \cup \{1_\beta\}$, 则 $x_\alpha y_\beta = x_\alpha 1_\beta \in G_{\alpha\beta}$. 对这4种情形均有 $(x_\alpha\rho y_\beta\rho)\varphi = (x_\alpha y_\beta\rho)\varphi = (x_\alpha 1_\beta\rho)\varphi = x_\alpha 1_\beta = (x_\alpha\rho)\varphi (y_\beta\rho)\varphi$. φ 是 S/ρ 到 T 的同构映射.

最后证 ρ 是 S 上的最小 C -同余, 从而由引理2知 $\rho = \rho_{cr}$, 且 $N(S) = E(S)$: 设 σ 是 S 上任一个 C -同余, 若 $(x, y) \in \rho$, 则 $\exists e \in E(y^+) \ni x = ey$, 于是

$$x\sigma = (ey)\sigma = e\sigma \cdot y\sigma = y\sigma \Rightarrow (x, y) \in \sigma \Rightarrow \rho \subseteq \sigma$$

类似的可以证明对有零元右群带的半格半群, 相应结论也成立. 证毕.

下例证明, 有强带 C -根的半群是借 C -半群通过根理论真扩张得到的半群类.

例1 取一个有零元的带 B , B 不是任何特殊带. 由带结构, 设 B 表成矩形带 B_α 的半格 $B = \bigcup_{\alpha \in Y} B_\alpha$, 这里半格 $Y \cong B/J$. 再用半格 Y 作有零元 C -半群 $T = \bigcup_{\alpha \in Y} G_\alpha$, 其中 G_α ($\forall \alpha \in Y$) 是群, 由于半格 $Y \cong B/J$, 故 $E(T) = \{1_\alpha \mid \forall \alpha \in Y\} \subseteq B$. 令 $S = B \cup T$, 则 $E(S) = B \cup \{1_\alpha \mid \forall \alpha \in Y\}$. 规定 S 上运算

$$(\forall x, y \in S) x * y = \begin{cases} xy, & x, y \in E(S), \text{ or } x, y \in T \\ z_{\alpha\beta} \in G_{\alpha\beta}, & x_\alpha \in B_\alpha, y_\beta \in G_\beta (\forall \alpha, \beta \in Y) \\ z_{\alpha\beta} \in G_{\alpha\beta}, & 1_\alpha \neq x_\alpha \in G_\alpha, y_\beta \in B_\beta (\forall \alpha, \beta \in Y) \end{cases}$$

经验证 S 关于以上运算成半群. 采用引理3完全相同证法, 可证 S 是有强带 C -根的半群, 且

$$\rho_{cr} = \{(x, y) \in S \times S \mid \exists \alpha \in \omega \ni x, y \in B_\alpha\} \cup 1_S, N(S) = E(S)$$

由于 B 不是左、右正则带, 从而 S 不是右或左逆半群, 当然不是右或左群带的半格半群.

以下 S 总表示含零元的有强带 C -根的半群. 由文献[1]中带的结构定理, 设 S 的 C -根集 $N(S)$ 是 S 的 J -类子矩形带 B_α ($\forall \alpha \in \omega$) 的半格, 即 $N(S) = \bigcup_{\alpha \in \omega} B_\alpha$. 由引理1, 设 S 的没有零元的 C -子半群 T^* 是 S 的 J -类子群的半格, 即 T^* 可表为

$T^* = \bigcup_{\alpha \in \omega \setminus \{0\}} G_\alpha$. 由定义 6, S 可表为

$$S = N(S) \cup T^*, T = T^* \cup \{0\} \cong S/\rho_{N(S)}$$

性质 2 a. $(\forall \alpha, \beta \in \omega, i \in B_\alpha, 1_\beta \in G_\beta \cap B_\beta)$
 $i1_\beta = 1_{\alpha\beta}, 1_\beta i \in B_{\beta\alpha}, 1_\alpha i = i$;
 b. $(\forall \alpha, \beta \in \omega, i \in B_\alpha, 1_\beta \neq a \in G_\beta) ia = 1_\alpha a$,
 $ai \in G_{\beta\alpha}$;

c. S 是充足右(左)正则半群, 且

$$(\forall a \in S) a^* = \begin{cases} a, & a \in N(S) \\ 1_\alpha, & a \in G_\alpha (\forall \alpha \in \omega) \end{cases}$$

$$(\forall a, b \in S) (ab)^* = \begin{cases} b^* a^* & a \in S \setminus N(S), b \in N(S) \\ a^* b^* & \text{其它} \end{cases} \quad (3)$$

证明 a. 因 $i \in B_\alpha, 1_\beta \in G_\beta$ 且 $1_\beta \in B_\beta$, 由于 B_α, B_β 是矩形带, 故 $1_\beta i \in B_{\beta\alpha}$. 又对 $\forall x \in G_\beta$, $i1_\beta x = ix$, 若 $(ix)^2 = ix \Rightarrow ixi = i, xix = x, x \in V(i)$, 不可能, 故

$$i1_\beta x = ix \in G_{\alpha\beta} \Rightarrow (i1_\beta)ix = ix,$$

$$i1_\beta \in G_{\alpha\beta} \cap B_{\alpha\beta} = \{1_{\alpha\beta}\}$$

所以, $i1_\beta = 1_{\alpha\beta}$. 由此推得 $i = i1_\alpha i = 1_\alpha i$.

b. 因 $i \in B_\alpha, a \in G_\beta$, 则由性质 2 中结论 a 得

$$ia = i1_\beta a = 1_{\alpha\beta} a = 1_\alpha 1_\beta a = 1_\alpha a$$

$$ai1_{\alpha\beta} = ai1_\alpha 1_\beta = a1_{\alpha\beta} = a1_\alpha = ai1_\alpha \in G_{\beta\alpha} \Rightarrow$$

$$ai = ai1_{\alpha\beta} i = ai1_{\alpha\beta} \Rightarrow ai \in G_{\beta\alpha}$$

c. 对 $\forall a \in S$, 显然 $a = a^* a = aa^*$, $a^* \in L_a$ 成立. 若有 $e \in E(S)$, $\exists a = ae = ea$. 当 $a \in G_\alpha$ ($\alpha \in \omega$) 时, a 可逆, 由 $ae = aa^* \Rightarrow e = a^* = 1_\alpha$. 当 $a \in B_\alpha$ ($\alpha \in \omega$) 时, 由 $ae = aa^*, ea = a^* a \Rightarrow e = eae = a^* aa^* = a^*$. 故 S 是充足右正则半群. 往证式(3)成立: 设 $a, b \in S$, 分 4 种情形: (a). $a = a_\alpha \in B_\alpha, b = b_\beta \in B_\beta$; (b). $a_\alpha \in G_\alpha, b_\beta \in G_\beta$; (c). $a_\alpha \in B_\alpha, b_\beta \in G_\beta$; (d). $a_\alpha \in G_\alpha, b_\beta \in B_\beta$. 由性质 2 中结论 a 计算知, 对情形(a) - (c)有 $(a_\alpha b_\beta)^* = a_\alpha^* b_\beta^*$. 对情形(d)有 $(a_\alpha b_\beta)^* = b_\beta^* a_\alpha^*$.

同样可证 S 是充足左正则半群. 证毕.

性质 3 a. S 是正则半群;

b. $N(S) \cap T = \{1_\alpha \mid \alpha \in \omega\} = E(T)$;

c. $(\forall \alpha \in \omega) B_\alpha \cup G_\alpha = J_\alpha$ 恰为 S 的一个 J -类;

d. $L = J$ 是 S 上半格同余, 使得 $S/L \cong \omega$;

e. $\rho_{N(S)} = \rho$, 且

$$\rho = \{(x, y) \in S \times S \mid \exists \alpha \in \omega \exists x, y \in B_\alpha\} \cup 1_S = \{(x, y) \in S \times S \mid x = x^+ yx^+\} \quad (4)$$

证明 a. 对 $\forall x \in S, x \in N(S)$ 或 $x \in T^*$. 因带 $N(S)$ 与 C -半群 T^* 都是正则半群, 故 x 是正则元, 即 S 是正则半群.

b. 该结论是易见的.

c. 由性质 3 中的结论 a、性质 1 得

$$J^{N(S)} = J^S \cap (N(S) \times N(S)), J^T = J^S \cap (T \times T)$$

$$(\forall \alpha \in \omega) B_\alpha \cup G_\alpha = J_\alpha^{N(S)} \cup J_\alpha^T = J_\alpha^S = J_\alpha$$

这里 J_α^H 表示子半群 H 上格林关系 J^H 的一个 J^H -类.

d. 先证 L 是同余: 由性质 1, L 是右同余. 设

$$\forall a, b \in S, aLb \Leftrightarrow S^1 a = S^1 b \Leftrightarrow \exists u, v \in S^1, \exists a = ub, b = va$$

于是 $\exists \alpha, \beta \in Y$ (or $\alpha, \beta \in \omega$, or $\alpha \in Y, \beta \in \omega$) $\exists \alpha = \alpha\beta = \beta\alpha = \beta$. 即可设

(a) $a, b \in B_\alpha$ 或 (b). $a, b \in G_\alpha$ 或 (c). $a \in B_\alpha, b \in G_\alpha$ ($\alpha \in Y \cap \omega$) (或相反)

对以上情形分别证明如下:

(a). 若 $a, b \in B_\alpha$, 由性质 3 中的结论 c 知 $L|_{N(S)} = J|_{N(S)}$, $L|_{T^*} = J|_{T^*}$ 分别是 $N(S)$ 与 T^* 上半格同余. 若对 $c \in S, ca, cb \in N(S)$, or $ca, cb \in T^*$ 则 $caLcb$ 成立. 由性质 2 知, 情形 $\forall c \in S, ca \in N(S), cb \in T^*$ (或相反) 不可能出现.

(b) 若 $a, b \in G_\alpha$, 由性质 2 知, 对 $\forall c \in S, ca, cb \in T^*$. 同上, $caLcb$.

(c) 若 $a \in B_\alpha, b \in G_\alpha$ ($\alpha \in Y \cap \omega$) (或相反), 由性质 2 知, 对 $\forall c \in S, cb \in T^*$. 若 $c \in T^*$, 则 $ca \in T^*$, 从而 $caLcb$ 成立. 若 $c \in N(S)$, 则 $ca \in B_{\beta\alpha}$ ($\exists \beta \in Y \subseteq \omega$). 此时 $cb \in G_{\beta\alpha}$. 由性质 3 中结论 c 知, 与 ca, cb 在同一个 L -类, 即 $caLcb$. 综上, L 是 S 上同余.

次证 S/L 是半格: 由性质 2 知, 对 $\forall x \in B_\alpha \cup G_\alpha$ ($\forall \alpha \in Y$), $x^2 \in B_\alpha$ 或 $x^2 \in G_\alpha$. 由性质 3 中结论 c 知, $\forall xL = L_x \in S/L, (xL)^2 = x^2L = xL$. 对 $\forall x \in B_\alpha$ ($\forall \alpha \in \omega \setminus Y$), 显然有 $(xL)^2 = x^2L = xL$. 故 S/L 是带. 又对

$$\forall L_{x_\alpha} = L_\alpha, L_{y_\beta} = L_\beta \in S/L,$$

$$L_{x_\alpha} L_{y_\beta} = L_\alpha L_\beta = L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha} = L_{y_\beta} L_{x_\alpha}$$

故 S/L 是半格.

再证 $L = J$: 显然, $L \subseteq J$. 只要证反包含. 设 aJb ($a, b \in S$), 则

$$\exists \alpha \in \omega, \exists a, b \in B_\alpha \cup G_\alpha, \text{ or } a, b \in B_\alpha$$

性质 3 中结论 c 知, 无论哪种情形均有 aLb

$(a, b \in S)$. 故 $L = J$.

最后证 $S/L \cong \omega$, $(\forall \alpha \in \omega) L_\alpha = J_\alpha = B_\alpha \cup G_\alpha$: 由性质 1、性质 3 中结论 b, c 与 $L = J$ 知

$$S/L = \{L_\alpha = B_\alpha \cup G_\alpha \mid \forall \alpha \in \omega \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$$

从而易证 $\varphi: S/L \rightarrow \omega, L_\alpha \mapsto \alpha$ 是同构映射, 即 $S/L \cong \omega$.

e. 显然 ρ 满足反身性和对称性, 下证 ρ 具有传递性. 假设 $(a, b) \in \rho, (b, c) \in \rho$, 由 ρ 的定义, 可设 $a, b \in B_\alpha (\exists \alpha \in \omega)$ 或 $a = b$, 同样 $b, c \in B_\beta (\exists \beta \in \omega)$ 或 $b = c$, 分 4 种情况证明: (a). $a, b \in B_\alpha$ 且 $b, c \in B_\beta$, 由于 B_α, B_β 是矩形带, 因此 $a = aba$ 且 $b = bab, b = bcb$ 且 $c = cbc$, 可推出 $\alpha = \beta$, 则 $a, b, c \in B_\alpha$, 所以 $(a, c) \in \rho$. (b). $a, b \in B_\alpha$ 且 $b = c$, 那么 $a, b, c \in B_\alpha$, 立即可得 $(a, c) \in \rho$. (c). $a = b$ 且 $b, c \in B_\beta$: 情况类似于 (b). (d). $a = b = c$: 显然 $(a, c) \in \rho$. 综上, ρ 具有传递性. 所以 ρ 是 S 上的等价关系.

下面证 ρ 是 S 上同余: 设 $(a, b) \in \rho, c \in S$, 若 $a, b \in B_\alpha, c \in N(S)$, 因为 $N(S)$ 是带, 由性质 3 中结论 c, 对某一 $\beta \in Y$, 有 $ca, cb \in B_\beta$, 即 $(ca, cb) \in \rho$. 若 $a, b \in B_\alpha, c \in T^*$, 因为 $\rho_{N(S)}$ 是强 C -根, 所以 T^* 是 S 的 C -子半群, 因此可设 $c \in G_\beta (\beta \in Y)$. 则 $ca, cb \in G_{\beta_\alpha}$. 因为 $a, b \in N(S) = E(S)$, 所以 $ca = c = cb$, 因此有 $(ca, cb) \in \rho$. 若 $a = b$, 则 S 都有 $ca = cb$, 于是也有 $(ca, cb) \in \rho$ 成立. 综上 ρ 是 S 上左同余, 类似地, 可证 ρ 是 S 上右同余, 所以 ρ 是 S 上同余.

往证 S/ρ 是 C -半群, 所以 ρ 是 S 上的 C -同余. 这只需证 $S/\rho \cong T$: 令

$$\varphi: S/\rho \rightarrow T$$

$$(x\rho)\varphi = \begin{cases} 1_\alpha, & x \in B_\alpha \\ x, & 1_\alpha \neq x \in G_\alpha \end{cases}$$

可证 φ 是同构映射. 易见 φ 是双射. 下证 φ 是 S/ρ 到 T 的同态映射. 对以下 4 种形 (a). $x_\alpha \in B_\alpha, y_\beta \in B_\beta$; (b). $1_\alpha \neq x_\alpha \in G_\alpha, 1_\beta \neq y_\beta \in G_\beta$; (c). $x_\alpha \in B_\alpha, 1_\beta \neq y_\beta \in G_\beta$; (d). $1_\alpha \neq x_\alpha \in G_\alpha, y_\beta \in B_\beta$, 均由性质 2 计算, 即知

$$(x_\alpha \rho y_\beta \rho)\varphi = [(x_\alpha y_\beta)\rho]\varphi = x_\alpha 1_\beta = (x_\alpha \rho)\varphi (y_\beta \rho)\varphi$$

再证 ρ 是 S 上最小 C -同余, 从而由引理 2 知 $\rho_{N(S)} = \rho$: 设 σ 是 S 上任一个 C -同余, $(x, y) \in \rho$, 则有 $x, y \in B_\alpha (\exists \alpha \in Y)$, 或 $x = y$. 若后者成立, 显

然 $(x, y) \in \sigma$. 设前者成立, 因为 σ 是 S 上 C -同余, 故有 $x\sigma = 1_\alpha\sigma = y\sigma$, 从而也有 $(x, y) \in \sigma$. 综合得 $\rho \subseteq \sigma$.

最后证 $\rho_{N(S)} = \sigma = \{(x, y) \in S \times S \mid x = x^* \cdot yx^*\}$: 设 $(x, y) \in \sigma, x = x^* yx^*$, 且存在

$$\alpha, \beta \in Y, \exists x \in B_\alpha \cup G_\alpha, y \in B_\beta \cup G_\beta$$

由 $x = x^* yx^*$ 得 $\alpha = \alpha\beta$. 又由 $y^* xy^* = y^* x^* yx^* y^* = y^* x^* y^* yy^* x^* y^* = y^* yy^* = y$, 得 $\beta = \alpha\beta, \beta = \alpha, x, y \in B_\alpha \cup G_\alpha$. 若 $x, y \in B_\alpha$, 则 $(x, y) \in \rho$.

若 $1_\alpha \neq x, 1_\alpha \neq y \in G_\alpha$, 则 $x = x^* yx^* = 1_\alpha y 1_\alpha = y$, 从而 $(x, y) \in \rho$. 若 $x \in G_\alpha, y \in B_\alpha$ (或相反), 则由 $x = x^* yx^*$ 知 $x = x^* yx^* = x^* = 1_\alpha$. 即 $(x, y) \in \rho$. 同样由 $y^* xy^* = y$ 证明另情形. 综合得 $(x, y) \in \rho$ 即 $\sigma \subseteq \rho$. 反之, 设 $(x, y) \in \rho$, 则有 $x, y \in B_\alpha (\exists \alpha \in Y)$, 或 $x = y$. 若后者成立, 显然 $(x, y) \in \sigma$. 设前者成立, 由于 B_α 是矩形带, 故 $\exists e, f \in B_\alpha$, 使得 $x = eyf = ef$. 由于 $x = x^* = (eyf)^* = fy^* e = fe = ef$, 从而 $e = f = x^*$, 即 $(x, y) \in \sigma$. 故 $\rho \subseteq \sigma$, 从而 $\rho = \sigma$. 证毕.

性质 4 a. $\rho_{N(S)} \subseteq L$;

b. $(\forall a, b \in S) aL^S b \Rightarrow (a\rho_{N(S)}) L^{S/\rho_{N(S)}} (b\rho_{N(S)})$;

c. S 同构于其 C -根 $N(S)$ 与 C -子半群 T 的半格织积. 即 S 可表为

$$S \cong N(S) \times_{ssp} T = \bigcup_{\alpha \in \omega} (B_\alpha \times G_\alpha), \forall \alpha, \beta \in \omega \cdot (B_\alpha \times G_\alpha)(B_\beta \times G_\beta) \subseteq B_{\alpha\beta} \times G_{\alpha\beta}$$

证明 a. 设 $a, b \in S, a\rho_{N(S)} b$, 由式(4)得 $a, b \in B_\alpha (\exists \alpha \in \omega)$ 或 $a = b$. 若是后者, 显然有 aLb , 若是前者, 由于 $B_\alpha = L_\alpha$, 故也知 aLb .

b. 设 $(\forall a, b \in S) aL^S b, S^1 a = S^1 b, \exists u, v \in S^1, \exists a = ub, b = va$, 由性质 1

$$a\rho_{N(S)} = u\rho_{N(S)} b\rho_{N(S)} = (ub)\rho_{N(S)}$$

$$b\rho_{N(S)} = v\rho_{N(S)} a\rho_{N(S)} = (va)\rho_{N(S)}$$

即 $(S/\rho_{N(S)})^1 a\rho_{N(S)} = (S/\rho_{N(S)})^1 b\rho_{N(S)}$, 从而

$(a\rho_{N(S)}) L^{S/\rho_{N(S)}} (b\rho_{N(S)})$ 成立.

c. 由 S 满足的条件知, 半格织积半群 $N(S) \times_{ssp} T \triangleq W$ 是可以做成的. 令映射

$$\varphi: N(S) \times_{ssp} T = W \rightarrow S = N(S) \cup T^*$$

$$(\forall \alpha \in W)(i_\alpha, a_\alpha)\varphi = a_\alpha i_\alpha$$

可证 φ 是同构映射: 对 $\forall x \in S, \exists \alpha \in \omega, \exists x = i_\alpha \in B_\alpha$, or, $x = a_\alpha \in G_\alpha$. 若是前者, 由性质 2,

$1_\alpha i_\alpha = i_\alpha$. 于是 $\exists (i_\alpha, 1_\alpha) \in W$, $\exists (i_\alpha, 1_\alpha)\varphi = 1_\alpha i_\alpha = i_\alpha$. 若是后者, 则有

$$(1_\alpha, a_\alpha) \in W, \exists (1_\alpha, a_\alpha)\varphi = a_\alpha 1_\alpha = a_\alpha$$

即 φ 是满射. 若有 $(i_\alpha, a_\alpha), (j_\beta, b_\beta) \in W$, $\exists (i_\alpha, a_\alpha)\varphi = a_\alpha i_\alpha = b_\beta j_\beta = (j_\beta, b_\beta)\varphi$, 则必有 $\alpha = \beta$. 当 $a_\alpha = 1_\alpha$ 时, 有 $b_\alpha = 1_\alpha$. 否则 $a_\alpha i_\alpha = 1_\alpha i_\alpha = i_\alpha \in B_\alpha, 1_\alpha \neq b_\alpha j_\alpha \in G_\alpha \Rightarrow a_\alpha i_\alpha \neq b_\alpha j_\alpha$, 矛盾. 于是有 $b_\alpha = 1_\alpha = a_\alpha$, 同时得 $i_\alpha = 1_\alpha i_\alpha = 1_\alpha j_\alpha = j_\alpha, (i_\alpha, a_\alpha) = (j_\alpha, b_\alpha)$. 当 $a_\alpha \neq 1_\alpha$ 时, 同理 $b_\alpha \neq 1_\alpha, a_\alpha = a_\alpha 1_\alpha = a_\alpha i_\alpha = b_\alpha j_\alpha = b_\alpha 1_\alpha = b_\alpha$, 故 $i_\alpha = a_\alpha^{-1} a_\alpha i_\alpha = a_\alpha^{-1} b_\alpha j_\alpha = a_\alpha^{-1} a_\alpha j_\alpha = j_\alpha$. 于是也有 $(i_\alpha, a_\alpha) = (j_\alpha, b_\alpha)$. 即 φ 是单射.

设 $(i_\alpha, a_\alpha), (j_\beta, b_\beta) \in W, ((i_\alpha, a_\alpha)(j_\beta, b_\beta))\varphi = (i_\alpha j_\beta, a_\alpha b_\beta)\varphi = (a_\alpha b_\beta)(i_\alpha j_\beta)$, 经计算得

$$\begin{aligned} a_\alpha b_\beta i_\alpha j_\beta &= a_\alpha 1_\alpha b_\beta i_\alpha j_\beta = a_\alpha i_\alpha 1_\alpha b_\beta i_\alpha j_\beta = \\ &= (a_\alpha i_\alpha) 1_\alpha b_\beta i_\alpha j_\beta = (b_\beta i_\alpha \triangleq b_{\alpha\beta}) = \\ &= (a_\alpha i_\alpha) 1_\alpha 1_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} j_\beta = (a_\alpha i_\alpha) 1_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} j_\beta = \\ &= (a_\alpha i_\alpha) b_{\alpha\beta} j_\beta = (a_\alpha i_\alpha) b_\beta i_\alpha j_\beta = \\ &= (a_\alpha i_\alpha) b_\beta 1_\beta i_\alpha j_\beta = (a_\alpha i_\alpha) b_\beta 1_\beta j_\beta = \\ &= (a_\alpha i_\alpha)(b_\beta j_\beta) = (i_\alpha, a_\alpha)\varphi(j_\beta, b_\beta)\varphi \end{aligned}$$

故 φ 是同构映射.

3 有强带 C -根半群的结构特征

定理 1 设 S 为正则半群, 以下各条件等价:

a. S 为有强带 C -根的半群;

b. $L = J$ 是 S 的半格同余, 且由式(4)给出的关系是 S 上的 C -同余.

证明 (a) $\Rightarrow$ (b) 若 S 为有强带 C -根的半群, 由性质 3 中结论 d, e 即得定理 1 中的结论 b.

(b) $\Rightarrow$ (a) 若 $L = J$ 是 S 的半格同余, 且式(4)给出的关系 ρ 是 S 上的 C -同余, 只需要证 ρ 是 S 上最小 C -同余, 则由引理 2, 性质 3 即知, $\rho = \rho_{cr}$ 是 S 的 C -根且 ρ_{cr} 是强的. 假设 σ 是 S 上 C -同余, $(x, y) \in \rho$, 则有 $x, y \in B_\alpha (\exists \alpha \in Y)$, 或 $x = y$. 若后者成立, 显然 $(x, y) \in \sigma$. 设前者成立, 因为 σ 是 S 上 C -同余, 故有 $x\sigma = 1_\alpha \sigma = y\sigma$, 从而也有 $(x, y) \in \sigma$. 综合得 $\rho \subseteq \sigma$.

参考文献:

- [1] Howie J M. An introduction to semigroup theory [M]. London: Academic Press, 1976.
- [2] Bailes G L. Right inverse semigroups [J]. Journal of Algebra, 1973, 26(3): 492 - 507.
- [3] Liu L J, Li J F, Liu Z N. A construction of left inverse semigroups [J]. Journal of Xiangtan Normal University (Natural Science Edition), 2003, 25(4): 10 - 13.
- [4] 朱聘瑜, 郭聿琦. 左 C -半群的特征与结构 [J]. 中国科学, 1991, 21(6): 582 - 590.
- [5] Fountain J B. Adequate semigroups [J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1979, 22(2): 113 - 125.
- [6] 郭聿琦, 任学明, 岑嘉评. 左 C -半群的又一结构 [J]. 数学进展, 1995, 24(1): 39 - 43.

(编辑: 金 虹)