

一类具有非单调传染率的 SEIRS 时滞 传染病模型的全局稳定性

周艳丽^{1,2}, 张卫国¹

(1. 上海理工大学 理学院, 上海 200093; 2. 上海医疗器械高等专科学校 基础教学部, 上海 200093)

摘要: 研究了一类具有非单调传染率的 SEIRS 时滞传染病模型的全局稳定性, 通过分析对应的特征方程, 证明了无病平衡点和地方病平衡点的局部稳定性. 当基本再生数 $R_0 \leq 1$ 和 $R_0 > 1$ 时, 通过构造不同的 Lyapunov 泛函分别证明了无病平衡点和地方病平衡点的全局渐近稳定性, 同时对于文中主要结论给出了相应的数值模拟.

关键词: SEIRS 传染病模型; 非单调传染率; 时滞; 稳定性; 李亚普诺夫泛函

中图分类号: O 175.8

文献标志码: A

Global Stability of a Delayed SEIRS Epidemic Model with Non-monotone Incidence Rate

ZHOU Yan-li^{1,2}, ZHANG Wei-guo¹

(1. College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;

2. Basic Teaching Department, Shanghai Medical Instrumentation College, Shanghai 200093, China)

Abstract: The paper presents a SEIRS epidemic model with non-monotone incidence rate and time delay describing a latent period. By analyzing the corresponding characteristic equations, the local stability of a disease-free equilibrium and an endemic equilibrium was established. When the basic reproduction number $R_0 \leq 1$, the global stability of the disease-free equilibrium was proved. When the basic reproduction number $R_0 > 1$, by means of Lyapunov functional, sufficient conditions were obtained for the global asymptotic stability of the endemic equilibrium. Computer simulations were carried out to illustrate the main theory.

Key words: SEIRS epidemic model; non-monotone incidence rate; time delay; stability; Lyapunov functional

1 模型建立

在传染病动力学模型中, 传染率发挥着重要的

作用. 在以往经典的传染病模型中, 通常采用双线性或标准的疾病传染率^[1], 使得这些模型的动力学行为比较简单, 但结果往往不能客观地反映疾病的传

收稿日期: 2013-05-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071164)

第一作者: 周艳丽(1976-), 女, 博士研究生. 研究方向: 生物数学. E-mail: zhouyl@smic.edu.cn

通讯作者: 张卫国(1957-), 男, 教授. 研究方向: 非线性系统的理论与应用. E-mail: zwgzwm@126.com

染机理. Capasso^[2]研究了1973年发生在Bari的霍乱后,引入了饱和传染率 $\frac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)}$,比双线性传染率更符合实际. $S(t)$ 表示 t 时刻未染病但有可能被疾病传染的人数, $I(t)$ 表示 t 时刻已被感染成为病人而且具有传染力的人数, β 为接触率, α 为常数, $\alpha > 0$. 后来, Liu等在文献[3]中提出了更一般的非线性发生率 $\frac{\beta I^p(t)S(t)}{1+\alpha I^q(t)}$, p, q 均为常数, $p, q > 0$.

$\beta I^p(t)$ 度量疾病的传染力, $\frac{1}{1+\alpha I^q(t)}$ 描述易感者采取措施以抑制传染力. 文献[4]研究的是当 $p=2$, $q=2$ 时, 传染病模型的定性分析和分支情况. Xiao和Ruan^[5]提出的非线性发生率为 $\frac{\beta I(t)S(t)}{1+\alpha I^2(t)}$, 更好地体现了 $g(I(t))$ 与 $I(t)$ 之间的变化: 如疾病初期人们没有意识到疾病的危害性, 没有采取有效的措施来阻止疾病的传播, 此时, $g(I(t))$ 是单调增的; 随着染病人数 $I(t)$ 的不断增加, 人们逐渐意识到疾病的危害性, 采取一些有效的措施, 如隔离或减少与患者的接触, 此时, $g(I(t))$ 是单调减的. 这能更好地反映疾病的传染规律, 更符合实际, 能为控制疾病传播提供更有有效的防御策略.

另一方面, 在建立传染病模型时, 考虑时滞能较好地反映传染病的潜伏期、免疫期等因素对传染病动力学的影响, 因此, 对时滞传染病模型的研究受到越来越广泛的重视. 近几十年来, 已有许多学者研究了大量的时滞传染病动力学模型^[6-11]. 文献[7]讨论了一类特殊的具有双时滞的SEIRS(易感者、潜伏者、染病者、恢复者)传染病模型, 并得到了模型无病平衡点的全局稳定性和地方病平衡点的存在性、唯一性和稳定性的充分条件. Xu等^[9]考虑了具有饱和传染率的时滞SEIRS模型, 并通过迭代的方法得到了地方病平衡点全局渐近稳定的充分条件. Beretta和Takeuchi^[6]研究了具有分布时滞的SIR(易感者、染病者、恢复者)传染病模型的全局稳定性.

本文将研究一类具有非单调感染率的SEIRS时滞传染病模型. 设 t 时刻的总人口 $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$, $E(t)$ 表示 t 时刻已经感染疾病, 但不具有传染能力的人数; $R(t)$ 表示 t 时刻从染病者类移出的人数.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \Lambda - \mu S(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I^2(t)} + \delta R(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I^2(t)} - \frac{\beta e^{-\mu\tau} S(t-\tau)I(t-\tau)}{1+\alpha I^2(t-\tau)} - \mu E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{\beta e^{-\mu\tau} S(t-\tau)I(t-\tau)}{1+\alpha I^2(t-\tau)} - (\mu + \gamma)I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I - (\mu + \delta)R(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, $\Lambda, \mu, \beta, \gamma$ 均为正常数; τ, δ 为非负常数; Λ 表示外界对环境的人口迁入, 假设迁入的均为易感者; μ 表示人口的自然死亡率; δ 表示免疫丧失率, $\delta > 0$, 意味着恢复者具有暂时免疫力, $\delta = 0$, 意味着恢复者具有永久免疫力; γ 表示染病者的恢复率; τ 为时滞(即疾病潜伏期).

运用微分动力系统的方法, 研究潜伏期和非单调发生率对系统(1)动力学行为的影响.

2 平衡点和基本再生数

根据实际的生物意义, 系统(1)将基于以下初始条件:

$$\left. \begin{aligned} S(\theta) &= \varphi_1(\theta) E(\theta) = \varphi_2(\theta) \\ I(\theta) &= \varphi_3(\theta) R(\theta) = \varphi_4(\theta) \\ \varphi_i(\theta) &\geq 0, \theta \in [-\tau, 0], i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中, 初始函数 $\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta), \varphi_3(\theta), \varphi_4(\theta)$ 是Banach空间 $C = C([-\tau, 0], \mathbb{R}^4)$ 上的连续函数.

定义系统(1)的可行域

$$\Gamma = \{(S, E, I, R) \in \mathbb{R}^4 : S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, R \geq 0, S + E + I + R \leq \Lambda/\mu\} \quad (3)$$

关于可行域的不变性可得命题1.

命题1 可行域 Γ 是系统(1)的正不变集, 即若满足初始条件式(2), 则当 $t \geq 0$ 时, 系统(1)所有的解 $(S(t), E(t), I(t), R(t))$ 都在可行域 Γ 内.

证明 若 $(S(\theta), E(\theta), I(\theta), R(\theta)) \in \Gamma (\theta \in [-\tau, 0])$, 则由文献[12]可知, 系统(1)的解局部存在且唯一. 注意到, 若对 $-\tau \leq \theta \leq 0$, 有 $I(\theta) \equiv 0$, 则当 $t \geq 0$ 时, $I(t) = 0$ 是系统(1)的第3个方程的解. 由系统(1)可知, 在曲面 $S(t) = 0$ 上, 若 $(0, E(t), I(t), R(t)) \in \Gamma$, 则 $\frac{dS(t)}{dt} > 0$ 成立. 同理, 可以证

得对所有的 $t \geq 0$, 有 $E(t) \geq 0, I(t) \geq 0, R(t) \geq 0$. 由系统(1)的第4个方程可知, 在曲面 $R(t) = 0$ 上, 若 $(S(t), E(t), I(t), 0) \in \Gamma$, 则 $\frac{dR(t)}{dt} \geq 0$; 在曲面 $E(t) = 0$ 上, 若 $(S(t), 0, I(t), R(t)) \in \Gamma$, 则 $\frac{dE(t)}{dt} \geq 0$; 在曲面 $I(t) = 0$ 上, 若 $(S(t), E(t), 0, R(t)) \in \Gamma$, 则 $\frac{dI(t)}{dt} \geq 0$. 所以, 若 $(S(\theta), E(\theta), I(\theta), R(\theta)) \in \Gamma$, 则系统(1)的解不可能从边界 $S(t) = 0, E(t) = 0, I(t) = 0, R(t) = 0$ 跑出区域 Γ .

将系统(1)的各式相加, 得到

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Lambda - \mu N(t) \quad (4)$$

其中

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$$

因此

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{\Lambda}{\mu}$$

所以, $(S(t), E(t), I(t), R(t)) \in \Gamma$, 则 Γ 是系统(1)的正不变集.

定义系统(1)的基本再生数为

$$R_0 = \frac{\Lambda \beta e^{-\mu\tau}}{\mu(\mu + \gamma)}$$

定理1 当 $R_0 \leq 1$ 时, 则系统(1)在 Γ 内有唯一的无病平衡点 $P_0\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$; 当 $R_0 > 1$ 时, 则系统(1)在 Γ 内, 除了无病平衡点 P_0 还存在一个正平衡点 $P^*(S^*, E^*, I^*, R^*)$ (地方病平衡点), 其中

$$S^* = \frac{(\mu + \gamma)(1 + \alpha I^{*2})}{\beta e^{-\mu\tau}}$$

$$E^* = \frac{\beta(1 - e^{-\mu\tau})S^* I^*}{\mu(1 + \alpha I^{*2})}$$

$$R^* = \frac{\gamma}{\mu + \delta} I^*$$

经计算, I^* 由下面的式子决定:

$$\alpha\mu(\mu + \delta)(\mu + \gamma)I^{*2} + [\beta(\mu + \delta)(\mu + \gamma) - e^{-\mu\tau}\delta\gamma]I^{*2} + \mu(\mu + \delta)(\mu + \gamma)(1 - R_0) = 0 \quad (5)$$

方程(5)当且仅当 $R_0 > 1$ 时, 有唯一的正实根 (地方病平衡点).

3 各类平衡点的局部稳定性

利用类似于文献[8-9]的方法, 证明系统(1)的

无病平衡点和地方病平衡点的局部稳定性.

首先讨论系统(1)在无病平衡点 $P_0\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ 处的局部稳定性. 计算系统(1)在无病平衡点 $P_0\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ 处的线性化系统, 并得到相应的特征方程

$$(\lambda + \mu)^2(\lambda + \mu + \delta)\left(\lambda + \mu + \gamma - \beta e^{-\mu\tau} \frac{\Lambda}{\mu} e^{-\mu\lambda}\right) = 0 \quad (6)$$

显然, 方程(6)有3个负实根, $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -\mu$, $\lambda_3 = -(\mu + \delta)$. 方程(6)其余的根由方程

$$\lambda + \mu + \gamma - \beta e^{-\mu\tau} \frac{\Lambda}{\mu} e^{-\mu\lambda} = 0 \quad (7)$$

决定. 令

$$f_1(\lambda) = \lambda + \mu + \gamma - \beta e^{-\mu\tau} \frac{\Lambda}{\mu} e^{-\mu\lambda}$$

若 $R_0 > 1$, 则无病平衡点 P_0 是不稳定的, 因为

$$f_1(0) = \frac{1}{\mu}[\mu(\mu + \gamma) - \beta e^{-\mu\tau}\Lambda] < 0$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} f_1(\lambda) = \lambda + \mu + \gamma - \beta e^{-\mu\tau} \frac{\Lambda}{\mu} e^{-\mu\lambda} = +\infty$$

$$f_1'(\lambda) = 1 + \mu + \gamma + \lambda \beta e^{-\mu\tau} \frac{\Lambda}{\mu} e^{-\mu\lambda} > 0$$

因此, 方程(7)至少有1个正实根, 所以, 若 $R_0 > 1$, 则无病平衡点 P_0 是不稳定的.

若 $R_0 < 1$, 则方程(7)的所有的根均具有负实部 ($\text{Re } \lambda < 0$); 反之, 有 $\text{Re } \lambda \geq 0$ 成立. 由方程(7)得

$$\begin{aligned} \text{Re } \lambda &= -(\mu + \gamma) + \beta \frac{\Lambda}{\mu} e^{-(\text{Re } \lambda)\tau} \cos(\tau \text{Im } \lambda) \leq \\ &= -(\mu + \gamma)(1 - R_0) < 0 \end{aligned}$$

所以, 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 P_0 是局部渐近稳定的.

当 $R_0 = 1$ 时, 无病平衡点 P_0 是退化的, 因为, 若 $R_0 = 1$, 对于方程(6)有唯一的零根和3个负根.

由以上分析得到定理2.

定理2 a. 若 $R_0 < 1$, 则系统(1)的无病平衡点 P_0 是局部渐近稳定的;

b. 若 $R_0 = 1$, 则系统(1)的无病平衡点 P_0 是退化的;

c. 若 $R_0 > 1$, 则系统(1)的无病平衡点 P_0 是不稳定的.

计算系统(1)在地方病平衡点 $P^*(S^*, E^*, I^*, R^*)$

处的线性化系统,并得到相应的特征方程

$$(\lambda + \mu)(\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 + [q_2\lambda^2 + q_1\lambda + q_0]e^{-\lambda\tau}) = 0$$

显然,有1个根, $\lambda = -\mu$,其余的根由下面的式子决定:

$$\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 + [q_2\lambda^2 + q_1\lambda + q_0]e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (8)$$

其中

$$p_2 = 3\mu + \gamma + \delta + \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^{*2}}$$

$$p_1 = 3\mu^2 + (2\mu\gamma + 2\mu\delta + \delta\gamma) +$$

$$(2\mu + \gamma + \delta) \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^{*2}}$$

$$p_0 = \mu(\mu + \delta)(\mu + \gamma) + (\mu + \delta)(\mu + \gamma) \cdot$$

$$\frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^{*2}}$$

$$q_2 = \frac{(\mu + \gamma)(\alpha I^{*2} - 1)}{1 + \alpha I^{*2}}$$

$$q_1 = (2\mu + \delta)(\mu + \gamma) \frac{\alpha I^{*2} - 1}{1 + \alpha I^{*2}}$$

$$q_0 = \mu(\mu + \delta)(\mu + \gamma) \frac{\alpha I^{*2} - 1}{1 + \alpha I^{*2}} - \frac{\delta\gamma\beta I^* e^{-\mu\tau}}{1 + \alpha I^{*2}}$$

当 $\tau = 0$ 时,方程(8)变为

$$\lambda^3 + (p_2 + q_2)\lambda^2 + (p_1 + q_1)\lambda + p_0 + q_0 = 0 \quad (9)$$

如果 $R_0 > 1$,通过计算可得

$$p_2 + q_2 = 3\mu + \gamma + \delta + \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^{*2}} + \frac{(\mu + \gamma)(\alpha I^{*2} - 1)}{1 + \alpha I^{*2}} = 2\mu + \delta + (\mu + \gamma) \cdot$$

$$\frac{2\alpha I^{*2}}{1 + \alpha I^{*2}} + \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^{*2}} > 0$$

$$p_1 + q_1 = 3\mu^2 + (2\mu\gamma + 2\mu\delta + \delta\gamma) +$$

$$(2\mu + \gamma + \delta) \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^{*2}} + (2\mu + \delta) \cdot$$

$$(\mu + \gamma) \frac{\alpha I^{*2} - 1}{1 + \alpha I^{*2}} =$$

$$\mu^2 + \mu\delta + (2\mu^2 + 2\mu\gamma + \mu\delta + \delta\gamma) +$$

$$(2\mu^2 + 2\mu\gamma + \mu\delta + \delta\gamma) \frac{\alpha I^{*2} - 1}{1 + \alpha I^{*2}} +$$

$$(2\mu + \gamma + \delta) \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^{*2}} =$$

$$\mu^2 + \mu\delta + (2\mu^2 + 2\mu\gamma + \mu\delta + \delta\gamma) \frac{2\alpha I^{*2}}{1 + \alpha I^{*2}} +$$

$$(2\mu + \gamma + \delta) \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^{*2}} > 0$$

$$p_0 + q_0 = \mu(\mu + \delta)(\mu + \gamma) + (\mu + \delta)(\mu + \gamma) \cdot$$

$$\frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^{*2}} + \mu(\mu + \delta)(\mu + \gamma) \frac{\alpha I^{*2} - 1}{1 + \alpha I^{*2}} -$$

$$\frac{\delta\gamma\beta I^*}{1 + \alpha I^{*2}} = \mu(\mu + \delta)(\mu + \gamma) \frac{2\alpha I^{*2}}{1 + \alpha I^{*2}} +$$

$$(\mu^2 + \mu\delta + \mu\gamma) \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^{*2}} > 0$$

显然

$$(p_2 + q_2)(p_1 + q_1) - (p_0 + q_0) > 0$$

因此,方程(9)当 $R_0 > 1$ 和 $\tau = 0$ 时,所有的根均具有负实部。

如果 $i\omega (\omega > 0)$ 是方程(9)的解,代入方程(9)并分离实部和虚部,得到如下结果:

$$\omega p_1 - \omega^3 = (q_0 - q_2\omega^2)\sin \omega\tau - q_1\omega\cos \omega\tau$$

$$p_2\omega^2 - p_0 = (q_0 - q_2\omega^2)\cos \omega\tau + q_1\omega\sin \omega\tau$$

对以上两式两端平方后加在一起并整理,可得

$$\omega^6 + (p_2^2 - 2p_1 - q_2^2)\omega^4 + (p_1^2 - 2p_0p_2 + 2q_0q_2 - q_1^2)\omega^2 + p_0^2 - q_0^2 = 0 \quad (10)$$

通过计算可得

$$p_0 - q_0 = \mu(\mu + \delta)(\mu + \gamma) +$$

$$(\mu + \delta)(\mu + \gamma) \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^{*2}} -$$

$$\mu(\mu + \delta)(\mu + \gamma) \frac{\alpha I^{*2} - 1}{1 + \alpha I^{*2}} + \frac{\delta\gamma\beta I^*}{1 + \alpha I^{*2}} =$$

$$\mu(\mu + \delta)(\mu + \gamma) \frac{2\alpha I^{*2}}{1 + \alpha I^{*2}} + (\mu + \delta)(\mu\gamma) \cdot$$

$$\frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^{*2}} + \frac{\delta\gamma\beta I^* e^{-\mu\tau}}{1 + \alpha I^{*2}} > 0$$

$$p_2^2 - 2p_1 - q_1^2 = 2\mu^2 + 2\mu + \delta + \delta^2 +$$

$$2\mu \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^{*2}} + \frac{(\beta I^*)^2}{(1 + \alpha I^{*2})^2} +$$

$$2(\mu + \gamma)^2 \frac{4\alpha I^*}{(1 + \alpha I^{*2})^2} > 0$$

同理,可得

$$p_1^2 - 2p_0p_2 + 2q_0q_2 - q_1^2 =$$

$$(\mu + \delta)^2 \left(\mu + \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^{*2}} \right)^2 +$$

$$(\mu + \gamma)^2 \left[(\mu + \delta)^2 + \left(\mu + \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^{*2}} \right)^2 \right] +$$

$$\frac{2(\mu + \gamma)\delta\gamma\beta I^* e^{-\mu\tau}}{(1 + \alpha I^{*2})^2} - \frac{(\mu + \gamma)^2(1 - \alpha I^{*2})^2}{(1 + \alpha I^{*2})^2} \cdot$$

$$[(\mu + \delta)^2 + \mu^2] > 0$$

通过以上分析可知,当 $R_0 > 1$ 时,式(10)不存在正实根,所以,当 $R_0 > 1$ 时,系统(1)的地方病平

衡点存在且局部渐近稳定.

通过以上分析得到定理3.

定理3 若 $R_0 > 1$, 则系统(1)的地方病平衡点 $P^*(S^*, E^*, I^*, R^*)$ 是局部渐近稳定的.

4 无病平衡点的全局稳定性

进一步讨论系统(1)的无病平衡点 $P_0\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$

在 Γ 内的全局稳定性.

定理4 若 $R_0 \leq 1$, 则系统(1)的无病平衡点 $P_0\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ 是全局渐近稳定的.

证明 考虑 Lyapunov 泛函

$$V(t) = I(t) + \beta e^{-\mu\tau} \int_{t-\tau}^t \frac{S(\theta)I(\theta)}{1 + \alpha I^2(\theta)} d\theta$$

显然, 在 Γ 内部有 $V\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right) = 0$ 和 $V(S(t), I(t)) > 0$ 成立. 若 $R_0 \leq 1$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \Big|_{(1)} &= \frac{dI(t)}{dt} + \beta e^{-\mu\tau} \left(\frac{S(t)I(t)}{1 + \alpha I^2(t)} - \frac{S(t-\tau)I(t-\tau)}{1 + \alpha I^2(t-\tau)} \right) = \\ &= \frac{\beta e^{-\mu\tau} S(t-\tau)I(t-\tau)}{1 + \alpha I^2(t-\tau)} - (\mu + \gamma)I(t) + \\ &+ \beta e^{-\mu\tau} \left(\frac{S(t)I(t)}{1 + \alpha I^2(t)} - \frac{S(t-\tau)I(t-\tau)}{1 + \alpha I^2(t-\tau)} \right) \leq \\ &\leq \beta e^{-\mu\tau} S(t)I(t) - (\mu + \gamma)I(t) \leq \\ &\leq \left[\beta e^{-\mu\tau} \frac{\Lambda}{\mu} - (\mu + \gamma) \right] I(t) = \\ &= \frac{1}{\mu + \gamma} (R_0 - 1) I(t) \leq 0 \end{aligned}$$

当 $R_0 \leq 1$ 时, $\frac{dV}{dt} \leq 0$, 且等号成立的充分必要

条件是 $R_0 = 1$ 或 $I = 0$. 当 $I = 0$ 时, 有 $\frac{dI}{dt} = 0$, $\frac{dE}{dt} = -\mu E$ 和 $\frac{dR}{dt} = -(\mu + \delta)R$. 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 有 $E \rightarrow 0$

和 $R \rightarrow 0$, 故使得 $\frac{dV}{dt} = 0$ 的最大正向不变集为

$(S, E, I, R) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$, 由李亚普诺夫-拉塞尔不变集定理^[13]可知, 系统(1)的无病平衡点 $P_0\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ 在 Γ 内是全局渐近稳定的.

5 地方病平衡点的全局稳定性

系统(1)的第1,3,4式中不含 $E(t)$, 所以, 只需要研究下面的子系统:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \Lambda - \mu S(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I^2(t)} + \delta R(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{\beta e^{-\mu\tau} S(t-\tau)I(t-\tau)}{1 + \alpha I^2(t-\tau)} - (\mu + \gamma)I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) - (\mu + \delta)R(t) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

令 $u_1 = S(t) - S^*$, $u_2 = I(t) - I^*$, $u_3 = R(t) - R^*$, 并在 $(0, 0, 0)$ 处线性化, 得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_1(t)}{dt} &= -(\mu + A)u_1(t) - Bu_2(t) + \delta u_3(t) \\ \frac{du_2(t)}{dt} &= e^{-\mu\tau} A u_1(t-\tau) + e^{-\mu\tau} B \cdot u_2(t-\tau) - (\mu + \gamma)u_2(t) \\ \frac{du_3(t)}{dt} &= \gamma u_2 - (\mu + \delta)u_3(t) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^{*2}} \\ B &= \frac{\beta(1 - \alpha I^{*2})S^*}{1 + \alpha I^{*2}} \end{aligned}$$

$\tilde{P}^*(S^*, I^*, R^*)$ 是系统(11)的地方病平衡点. 显然, 系统(11)的 $\tilde{P}^*(S^*, I^*, R^*)$ 的稳定性等价于系统(12)中零点的稳定性.

定理5 若 $R_0 > 1$, 同时满足 $m_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$), 则系统(11)的地方病平衡点 $\tilde{P}^*(S^*, I^*, R^*)$ 是全局渐近稳定的, 其中

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= 2(\mu + A) - \delta - e^{-\mu\tau} A \\ m_2 &= \mu - 2e^{-\mu\tau} A - 2e^{-\mu\tau} B \\ m_3 &= \mu - \gamma \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

证明 令

$$V_1(t) = u_1^2(t)$$

计算 V_1 沿系统(12)的导数为

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= -2(\mu + A)u_1^2(t) - Bu_1(t)u_2(t) + \\ &+ \delta u_1(t)u_3(t) \leq -2(\mu + A)u_1^2(t) + \\ &+ Bu_1^2(t) + Bu_2^2(t) + \delta(u_1^2(t) + u_3^2(t)) \end{aligned}$$

令

$$V_2(t) = u_2^2(t)$$

计算 V_2 沿系统(12)的导数为

$$\begin{aligned} \frac{dV_2(t)}{dt} &= e^{-\mu\tau} A u_1(t-\tau) u_2(t) + \\ &e^{-\mu\tau} B u_2(t-\tau) u_2(t) - (\mu + \gamma) u_2^2(t) \leq \\ &e^{-\mu\tau} A (u_1^2(t-\tau) + u_2^2(t)) + \\ &e^{-\mu\tau} B (u_2^2(t-\tau) + u_2^2(t)) - (\mu + \gamma) u_2^2(t) \end{aligned}$$

令

$$V_3(t) = u_3^2(t)$$

计算 V_3 沿系统(12)的导数为

$$\begin{aligned} \frac{dV_3(t)}{dt} &= \gamma u_2(t) u_3(t) - (\mu + \delta) u_3^2(t) \leq \\ &\gamma (u_2^2(t) + u_3^2(t)) - (\mu + \delta) u_3^2(t) \end{aligned}$$

令

$$V_4(t) = e^{-\mu\tau} A \int_{t-\tau}^t u_1^2(v) dv + e^{-\mu\tau} B \int_{t-\tau}^t u_2^2(v) dv$$

计算 V_4 沿系统(12)的导数为

$$\begin{aligned} \frac{dV_4(t)}{dt} &= e^{-\mu\tau} A (u_1^2(t) - u_1^2(t-\tau)) + \\ &e^{-\mu\tau} B (u_2^2(t) - u_2^2(t-\tau)) \end{aligned}$$

定义 Lyapunov 泛函

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t)$$

其正定性显然, V 沿系统(12)的导数为

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -m_1 u_1^2(t) - m_2 u_2^2(t) - m_3 u_3^2(t)$$

其中

$$\begin{aligned} m_1 &= 2(\mu + A) - \delta - e^{-\mu\tau} A \\ m_2 &= \mu - 2e^{-\mu\tau} A - 2e^{-\mu\tau} B \\ m_3 &= \mu - \gamma \end{aligned}$$

由 $m_i > 0 (i=1, 2, 3)$, 得 $\frac{dV(t)}{dt}$ 负定, 所以, 地

方病平衡点 $P^*(S^*, E^*, I^*, R^*)$ 在 Γ 内是全局渐近稳定的.

6 讨论和数值模拟

通过数值仿真验证本文所得主要结论. 在图 1 中, 取 $\Lambda = 2, \beta = 0.1, \alpha = 6, \gamma = 0.5, \mu = 0.2, \delta = 0.2, \tau = 2$, 使得 $R_0 = 0.9576 < 1$, 满足定理 4 的条件. 从图 1 中可以看到, 系统(1)的无病平衡点 $P_0(10, 0, 0, 0)$ 是全局渐近稳定的, 这与定理 4 的结论吻合. 在图 2 中, 取 $\Lambda = 5, \beta = 0.8, \alpha = 6, \gamma = 0.2, \mu = 0.4, \delta = 0.2, \tau = 2$, 使得 $R_0 = 7.488 > 1$, 且

$m_1 = 0.7853, m_2 = 5.4248, m_3 = 0.2$, 满足定理 5. 从图 2 中可以看到, 系统(1)的地方病平衡点 $P^*(10.477, 1.724, 0.9378, 0.3126)$ 是全局渐近稳定的, 这与定理 5 的结论一致.

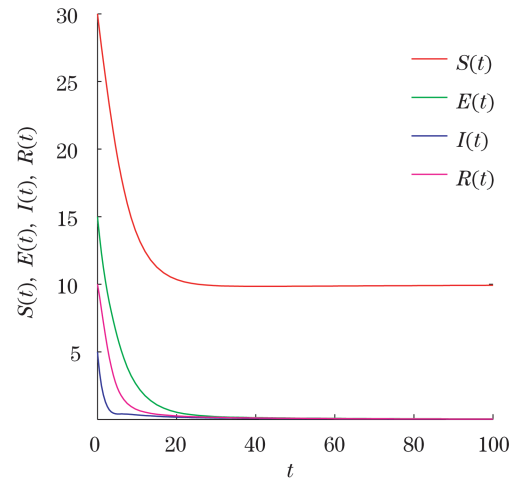


图 1 系统(1)无病平衡点的渐近行为

Fig.1 Asymptotic behavior of the disease-free equilibrium in system (1)

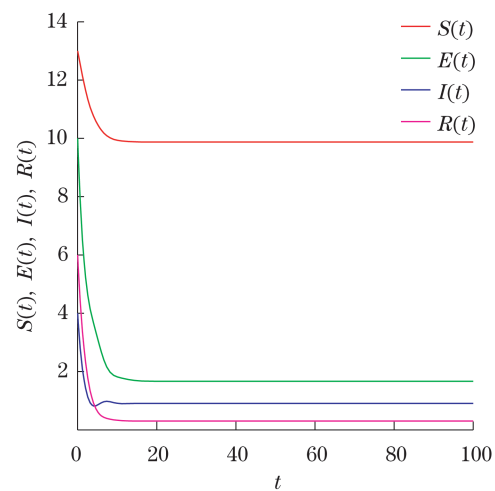


图 2 系统(1)地方病平衡点的渐近行为

Fig.2 Asymptotic behavior of the endemic equilibrium in system (1)

本文的疾病传染率虽然与文献[10]的疾病传染率不同, 但有着相类似的结论. 本文结合实际情况, 考虑到疾病初期对人们的影响较小, 人们没有采取积极的措施来控制疾病的传播, 这时疾病的传染力会增大. 随着疾病的不断传播, 人们逐渐意识到疾病的危害性, 人们会采取有效的措施减少与染病者的接触, 同时社会上的有关卫生部门也会对染病者采取隔离等一些措施以减少疾病的传播, 这时疾病的

传染力会变小,这样的传染率更符合实际,体现了人们的心理作用和社会行为. 本文的基本再生数与文献[10]相同,同时得到,当 $R_0 \leq 1$ 时,无病平衡点是全局渐近稳定的;当 $R_0 > 1$ 时,地方病平衡点全局稳定性的充分条件.

文献[10]主要研究的是传染率具有饱和性且带有时滞的 SEIRS 模型.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \Lambda - \mu S(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} + \delta R(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} - \frac{\beta e^{-\mu\tau} \beta S(t-\tau)I(t-\tau)}{1 + \alpha I(t-\tau)} - \mu E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{\beta S(t-\tau)I(t-\tau)}{1 + \alpha I(t-\tau)} - (\mu + \gamma)I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I - (\mu + \delta)R(t) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

作者在以后的工作中还可以进一步研究更一般的非线性发生率 $\frac{\beta I^p(t) S(t)}{1 + \alpha I^q(t)}$ ($p, q > 0$), 推出参数 p, q 对传染病模型稳定性的影响.

参考文献:

- [1] 周艳丽,王贺桥.具有隔离和接种策略的传染病模型稳定性分析[J].上海理工大学学报,2010,32(3):249-252.
- [2] Capasso V. A generalization of the Kermack-Mckendrick deterministic epidemic model [J]. Mathematical Biosciences,1978,42(1/2):41-61.
- [3] Liu W M, Levin S A, Iwasa Y. Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemio-logical models[J]. J Math Biol,1986,23(2):187-204.
- [4] Ruan S G, Wang W D. Dynamical behavior of an epidemic model with a nonlinear incidence rate[J]. Journal of Differential Equations, 2003, 188(1): 135-163.
- [5] Xiao D M, Ruan S G. Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate [J]. Math Biosci,2007,208(2):419-429.
- [6] Beretta E, Takeuchi Y. Global stability of an SIR epidemic model with time delays[J]. Math Biol,1995, 33(3):250-260.
- [7] Cooke K L, Van den Driessche P. Analysis of an SEIRS epidemic model with two delays[J]. J Math Biolo, 1996,35(2):240-260.
- [8] Beretta E, Hara T, Ma W B, et al. Global asymptotic stability of an SIR epidemic model with distributed time delay[J]. Nonlinear Analysis,2001,47(6):4107-4115.
- [9] Xu R, Ma Z E. Global stability of an SIR epidemic model with nonlinear incidence rate and time delay [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2009,10(5):3175-3189.
- [10] Xu R, Ma Z E. Global stability of a delayed SEIRS epidemic model with saturation incidence rate [J]. Nonlinear Dynamics,2010,61(1/2):229-239.
- [11] Gao S J, Chen L S, Teng Z D. Impulsive vaccination of an SEIRS model with time delay and varying total population size[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2007,69(2):731-745.
- [12] Hale J K, Lunel S M V. Introduction to functional differential equations [M]. New York: Springer-Verlag,1993.
- [13] Miller R K, Michel A N. Ordinary differential equations [M]. New York:Academic Press,1982.

(编辑:石 瑛)