

高阶差分的值分布

俞伟鹏, 叶亚盛

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 利用亚纯函数值分布理论与差分理论中的一些基本概念、研究方法以及研究成果, 改进了一个关于高阶差分的定理, 考虑并研究了一个 Hayman 猜想的高阶差分对应的值分布, 最后还得到一个唯一性定理.

关键词: 亚纯函数; 高阶差分; 值分布; 唯一性

中图分类号: O 174.52

文献标志码: A

Value Distribution of High-order Difference Operators

YU Wei-peng, YE Ya-sheng

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: By using some fundamental knowledge, research methods and research results, a theorem about high-order difference operators was improved. The value distribution of high-order difference operators of one of Hayman's conjectures was considered and discussed. An uniqueness theorem was obtained finally.

Key words: meromorphic function; high-order difference; value distribution; uniqueness

使用值分布理论的基本概念和标准符号, 参见文献[1]和文献[2]. 设 $f(z)$ 和 $\alpha(z)$ 是两个亚纯函数, 称 $\alpha(z)$ 是 $f(z)$ 的小函数, 如果 $T(r, \alpha) = S(r, f)$, 其中当 $r \rightarrow \infty$ 时, $S(r, f) = o(T(r, f))$, 除去一个有限对数测度集.

在差分理论中, 将 $f'(z)$ 差分模拟定义为 $\Delta_c f(z) = f(z+c) - f(z)$, 以及 $\Delta f(z) = f(qz+c) - f(z)$, 其中 $\Delta_c f(z) \not\equiv 0, \Delta f(z) \not\equiv 0$. 对于 $f^{(k)}(z)$ 的差分模拟, 定义为 $\Delta_c^k f(z) = \Delta_c^{k-1}(\Delta_c f(z))$, 以及 $\Delta^k f(z) = \Delta^{k-1}(\Delta f(z))$. 经过简单的计算, 有

$$\Delta_c^k f(z) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i f(z + (k-i)c)$$

$$\Delta^k f(z) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i f(q^{k-i}z + \sum_{j=1}^{k-i} q^{k-i-j}c)$$

Hayman^[3]提出了如下猜想:

定理 1 设 n 为正整数, f 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的超越亚纯函数, 则 $f^n(z)f'(z)$ 取每个非零有穷复数无穷多次.

上述猜想逐渐得到了证明, Hayman^[1]证明了 $n \geq 3$ 的情形, Mues^[4]证明 $n = 2$ 的情形, Bergweiler 等^[5]证明了 $n = 1$ 的情形.

Hayman^[3]也证明了如下结论:

定理 2 设 $n (\geq 5)$ 为正整数, $a (\neq 0), b$ 为两个有穷复数, f 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数, 如果 $f' -$

收稿日期: 2013-05-20

第一作者: 俞伟鹏(1989-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 复分析. E-mail: weipengyu@outlook.com

通讯作者: 叶亚盛(1960-), 男, 副教授. 研究方向: 复分析. E-mail: yashengye@gmail.com

$af^n \neq b$, 则 f 恒为常数.

最近,国内外很多文章聚焦于复域上的差分方程和 Nevanlinna 理论的差分模拟^[6-11],并且得到许多相关的结论.张继龙等^[12]考虑了定理1的高阶差分对应,证明了如下定理:

定理3 设 f 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的有穷级超越亚纯函数, n, k 为两个正整数, c 为非零有穷复数, 满足 $\Delta_c^k f(z) \neq 0, b(z) (\neq 0, \infty)$ 为 $f(z)$ 的小函数, 如果 $n \geq 3k + 5$, 则 $f^n(z) \Delta_c^k f(z) - b(z)$ 有无穷多个零点, 且 $\bar{N}\left(r, \frac{1}{f^n \Delta_c^k f - b}\right) \geq T(r, f) + S(r, f)$.

首先改进了定理3:

定理4 设 f 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的有穷级超越亚纯函数, n, k 为两个正整数, c 为非零有穷复数, 满足 $\Delta_c^k f(z) \neq 0, b(z) (\neq 0, \infty)$ 为 $f(z)$ 的小函数, 如果 $n \geq k + 4$, 则 $f^n(z) \Delta_c^k f(z) - b(z)$ 有无穷多个零点, 且 $\bar{N}\left(r, \frac{1}{f^n \Delta_c^k f - b}\right) \geq T(r, f) + S(r, f)$.

定理5 设 f 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的零级超越亚纯函数, n, k 为两个正整数, $c, q (\neq 0, 1)$ 为有穷复数, 满足 $\Delta_c^k f(z) \neq 0, b(z) (\neq 0, \infty)$ 是 $f(z)$ 的小函数, 如果 $n \geq k + 4$, 则 $f^n(z) \Delta_c^k f(z) - b(z)$ 有无穷多个零点, 且 $\bar{N}\left(r, \frac{1}{f^n \Delta_c^k f - b}\right) \geq T(r, f) + S(r, f)$.

利用差分的思想,考虑了定理2的高阶差分模拟.

定理6 设 f 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的有穷级超越亚纯函数, $n, k (n \geq k + 4)$ 为两个正整数, $a (\neq 0), b, c (\neq 0)$ 为3个有穷复数, $\Delta_c^k f(z) \neq b$, 若 $\Delta_c^k f(z) - af^n(z) \neq b$, 则 f 恒为常数.

定理7 设 f 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的零级超越亚纯函数, $n, k (n \geq k + 4)$ 为两个正整数, $a (\neq 0), b, c, q (\neq 0, 1)$ 为4个有穷复数, 若 $\Delta_c^k f(z) - af^n(z) \neq b$, 则 f 恒为常数.

还研究了一个高阶差分的唯一性定理:

定理8 设 f 和 g 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的零级超越亚纯函数, $n (\geq 10)$ 为正整数, $c, q (\neq 0, 1)$ 为两个有穷复数, 如果 $f^n(z) \Delta_c^k f(z)$ 与 $g^n(z) \Delta_c^k g(z)$ 分担非零值 d CM, 则 $f^n(z) \Delta_c^k f(z) \equiv g^n(z) \Delta_c^k g(z)$.

1 引理

为了证明本文的结论,需要如下几个引理:

引理1^[13] 设 f 是有穷级(记为 ρ)超越亚纯函数, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则对于每个 $\epsilon > 0$, 有

$$T(r, f(z+c)) = T(r, f) + O(r^{\rho-1+\epsilon}) + O(\log r)$$

引理2^[14] 设 f 是非常数零级超越亚纯函数,

$q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则

$$T(r, f(qz+c)) = (1+o(1))T(r, f) + O(\log r)$$

在下对数测度为1的集合上成立.

引理3^[14] 设 f 是非常数零级超越亚纯函数,

$q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则

$$N(r, f(qz+c)) = (1+o(1))N(r, f) + O(\log r)$$

在下对数测度为1的集合上成立.

引理4^[6] 设 f 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的有穷级亚纯函数, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}$, 则对于 f 的任意小函数 $a(z)$, 有 $m\left(r, \frac{\Delta_c^n f}{f-a}\right) = S(r, f)$, 对所有的 r 成立,

除去一个有限对数测度集.

引理5^[1] 设 f 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数,

$a_1(z), a_2(z), a_3(z)$ 是 $f(z)$ 的3个小函数, 则

$$T(r, f) \leq \sum_{i=1}^3 \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-a_i(z)}\right) + S(r, f)$$

引理6^[8] 设 f 是非常数零级亚纯函数, $q \in$

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则 $m\left(r, \frac{f(qz)}{f(z)}\right) = o(T(r, f))$, 在对数测度为1的集合上成立.

引理7 设 f 是非常数零级亚纯函数, $c, q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}$, 则对于 f 的任意小函数 $a(z)$, 有 $m\left(r, \frac{\Delta_c^n f}{f-a}\right) = S(r, f)$, 在对数测度为1的集合上成立.

引理8^[15] 设 F 和 G 是两个非常值亚纯函数, 如果 F 与 G 分担1CM, 则下面3个结论必有一个成立:

$$\text{a. } \max\{T(r, F), T(r, G)\} \leq N_2\left(r, \frac{1}{F}\right) +$$

$$N_2(r, F) + N_2\left(r, \frac{1}{G}\right) + N_2(r, G) + S(r, F) + S(r, G);$$

$$\text{b. } F = G;$$

$$\text{c. } F \cdot G = 1;$$

其中, $N_2\left(r, \frac{1}{F}\right)$ 表示 F 的单零点计一次、重零点计两次的计数函数.

2 定理的证明

由于定理4的证明与定理5的类似,只证明定理4.

2.1 定理4的证明

$$\begin{aligned}
& \text{设 } F(z) = f^n(z) \Delta_c^k f(z), \text{ 则} \\
& nm(r, f) \leq m(r, f^n) + S(r, f) = \\
& m\left(r, \frac{F(z)}{\Delta_c^k f(z)}\right) + S(r, f) \leq \\
& m(r, F(z)) + m\left(r, \frac{1}{\Delta_c^k f(z)}\right) + S(r, f) \quad (1) \\
& nN(r, f) = N(r, f^n) = N\left(r, \frac{F(z)}{\Delta_c^k f(z)}\right) \leq \\
& N(r, F(z)) + N\left(r, \frac{1}{\Delta_c^k f(z)}\right) - \\
& \bar{N}_0(r) - \bar{N}_1(r) \quad (2)
\end{aligned}$$

其中, $\bar{N}_0(r)$ 是 $F(z)$ 和 $\Delta_c^k f(z)$ 的公共零点的精简密指量, $\bar{N}_1(r)$ 是 $F(z)$ 和 $\Delta_c^k f(z)$ 的公共极点的精简密指量. 又由于

$$\begin{aligned}
& \bar{N}(r, F) \leq \bar{N}(r, f) + \bar{N}_1(r) \\
& \bar{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) \leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}_0(r)
\end{aligned}$$

再结合式(1)和式(2)以及引理1、引理5, 得

$$\begin{aligned}
& nT(r, f) \leq T(r, F(z)) + T(r, \Delta_c^k f(z)) + \\
& S(r, f) - \bar{N}_0(r) - \bar{N}_1(r) \leq \bar{N}(r, F) + \\
& \bar{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{F - b(z)}\right) + (k+1) \cdot \\
& T(r, f) + S(r, f) - \bar{N}_0(r) - \bar{N}_1(r) \leq \\
& \bar{N}(r, f) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{F - b(z)}\right) + \\
& (k+1)T(r, f) + S(r, f) \leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{F - b(z)}\right) + \\
& (k+3)T(r, f) + S(r, f)
\end{aligned}$$

$$\text{即 } (n-k-3)T(r, f) \leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{F - b(z)}\right) + S(r, f).$$

由于 $F(z) - b(z)$ 有无穷多个零点, 所以 $n \geq k+4$.

2.2 定理6的证明

假设 f 不是常数, 则令 $\psi(z) = \frac{\Delta_c^k f(z) - b}{af^n}$, 即

$$af^n = \frac{\Delta_c^k f(z) - b}{\psi(z)}, \text{ 于是}$$

$$\begin{aligned}
nm(r, f) &= m(r, f^n) \leq m(r, af^n) + \log^+ \frac{1}{|a|} = \\
&m\left(r, \frac{\Delta_c^k f(z) - b}{\psi(z)}\right) + \log^+ \frac{1}{|a|} \leq \\
&m(r, \Delta_c^k f(z)) + m\left(r, \frac{1}{\psi(z)}\right) + O(1) \leq \\
&m\left(r, \frac{\Delta_c^k f(z)}{f}\right) + m(r, f) + m\left(r, \frac{1}{\psi(z)}\right) + O(1) = \\
&m(r, f) + m\left(r, \frac{1}{\psi}\right) + S(r, f), \text{ 即}
\end{aligned}$$

$$(n-1)m(r, f) \leq m\left(r, \frac{1}{\psi}\right) + S(r, f) \quad (3)$$

另一方面

$$\begin{aligned}
nN(r, f) &= N(r, af^n) = N\left(r, \frac{\Delta_c^k f(z) - b}{\psi(z)}\right) \leq \\
&N\left(r, \frac{1}{\psi(z)}\right) + N(r, \Delta_c^k f(z) - b) - \bar{N}_0(r) - \bar{N}_1(r) \leq \\
&N\left(r, \frac{1}{\psi(z)}\right) + (k+1)N(r, f) - \bar{N}_0(r) - \bar{N}_1(r), \text{ 即} \\
&(n-1)N(r, f) \leq N\left(r, \frac{1}{\psi(z)}\right) + kN(r, f) - \\
&\bar{N}_0(r) - \bar{N}_1(r) \quad (4)
\end{aligned}$$

其中, $\bar{N}_0(r)$ 是 $\Delta_c^k f(z) - b$ 和 $\psi(z)$ 的公共零点的精简密指量, $\bar{N}_1(r)$ 是 $\Delta_c^k f(z) - b$ 和 $\psi(z)$ 的公共极点的精简密指量.

由于 $\Delta_c^k f(z) - af^n \neq b$, 则 $\psi(z) \neq 1$.

$$\text{又 } \bar{N}(r, \psi(z)) \leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}_1(r),$$

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{\psi(z)}\right) \leq \bar{N}(r, f(z)) + \bar{N}_0(r)$$

则由式(3)和式(4)及第一、第二基本定理, 得

$$\begin{aligned}
& (n-1)T(r, f) \leq T\left(r, \frac{1}{\psi(z)}\right) + kN(r, f) + \\
& S(r, f) - \bar{N}_0(r) - \bar{N}_1(r) \leq T(r, \psi(z)) + \\
& kN(r, f) + S(r, f) - \bar{N}_0(r) - \bar{N}_1(r) \leq \\
& \bar{N}(r, \psi(z)) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{\psi(z)}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{\psi(z) - 1}\right) + \\
& kN(r, f) + S(r, f) - \bar{N}_0(r) - \bar{N}_1(r) \leq \\
& \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}_1(r) + \bar{N}(r, f(z)) + \bar{N}_0(r) + \\
& kN(r, f) + S(r, f) - \bar{N}_0(r) - \bar{N}_1(r) \leq \\
& \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}(r, f(z)) + kN(r, f) + S(r, f) \leq \\
& (k+2)T(r, f) + S(r, f)
\end{aligned}$$

即 $(n-k-3)T(r, f) \leq S(r, f)$, 这与 $n \geq k+4$ 矛盾. 因此, f 恒为常数.

2.3 定理7的证明

假设 f 不是常数, 则令

$$\psi(z) = \frac{\Delta_c^k f(z) - b}{af^n}, \text{ 即 } af^n = \frac{\Delta_c^k f(z) - b}{\psi(z)}$$

以下考虑两种情形:

情形1 $\Delta_c^k f(z) \equiv b$. 此种情况必有 $b \neq 0$.

当 $q \neq 1$ 时, $\Delta^k f(z) = \Delta(\Delta^{k-1} f(z)) = \Delta^{k-1} f(qz + c) - \Delta^{k-1} f(z)$, 则 $z = \frac{c}{1-q}$ 是 $\Delta^k f(z)$

的零点,这与 $\Delta^k f(z) \equiv b \neq 0$ 矛盾;

当 $q=1$ 时, $f(z)$ 不存在极点,否则若存在,记为 z_0 ,那么 $z_0+c, z_0+2c, \dots, z_0+kc$ 中至少有一个是 $f(z)$ 的极点,从而 f 的级至少是 1,这又和条件矛盾,所以 $f(z)$ 是零级超越整函数,于是 $\Delta^k f(z) - af^n(z) \equiv b - af^n(z)$ 也是零级超越整函数,则 $\Delta^k f(z) - af^n(z)$ 取每个有穷复数无穷多次,这与条件矛盾.

情形 2 $\Delta^k f(z) \not\equiv b$.

这种情形与定理 6 的证明类似,此处省略. 因此 f 恒为常数.

2.4 定理 8 的证明

令 $F = \frac{f^n(z)\Delta^k f(z)}{d}, G = \frac{g^n(z)\Delta^k g(z)}{d}$, 则

F 和 G 分担 1CM, 于是由引理 8, 得

$$\begin{aligned} T(r, F) &\leq N_2\left(r, \frac{1}{F}\right) + N_2\left(r, \frac{1}{G}\right) + S(r, F) + \\ S(r, G) &\leq 2N\left(r, \frac{1}{f}\right) + 2N\left(r, \frac{1}{\Delta^k f}\right) + \\ 2N\left(r, \frac{1}{g}\right) &+ 2N\left(r, \frac{1}{\Delta^k g}\right) + S(r, f) + S(r, g) \leq \\ 2N\left(r, \frac{1}{f}\right) &+ 2T(r, \Delta^k f) + 2N\left(r, \frac{1}{g}\right) + \\ 2T(r, \Delta^k g) &+ S(r, f) + S(r, g) \leq \\ 4T(r, f) &+ 4T(r, g) + S(r, f) + S(r, g), \text{ 又} \\ nT(r, f(z)) &= T(r, f^n(z)) = T\left(r, \frac{Fd}{\Delta^k f(z)}\right) \leq \\ T(r, F) &+ T(r, \Delta^k f(z)) + O(1) \leq \\ T(r, F) &+ T(r, f) + S(r, f), \text{ 则} \\ (n-1)T(r, f) &\leq T(r, F) + S(r, f) \leq \\ 4T(r, f) &+ 4T(r, g) + S(r, f) + S(r, g), \text{ 即} \\ (n-5)T(r, f) &\leq 4T(r, g) + S(r, f) + S(r, g), \text{ 同理} \\ (n-5)T(r, g) &\leq 4T(r, f) + S(r, f) + S(r, g). \end{aligned}$$

两式相加, 并整理, 有

$$(n-9)(T(r, f) + T(r, g)) \leq S(r, f) + S(r, g)$$

这与 $n \geq 10$ 矛盾. 因此, 由引理 8 有 $F = G$ 或 $FG = 1$.

如果 $F \cdot G = 1$, 则 $f^n(z)\Delta^k f(z)g^n(z) \cdot \Delta^k g(z) = d^2$. 由于 g 是整函数, 则零级超越整函数 f 与 $\Delta^k f(z)$ 没有零点, 于是 $f(z)$ 与 $\Delta^k f(z)$ 是非零常数. 而由 f 是非零常数可知, $\Delta^k f(z)$ 恒为零, 矛盾. 所以 $F = G$, 即 $f^n(z)\Delta^k f(z) = g^n(z)\Delta^k g(z)$.

参考文献:

- [1] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.
- [2] 杨乐. 值分布理论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1995.
- [3] Hayman W K. Picard values of meromorphic functions and their derivatives [J]. Ann Math, 1959, 70 (1): 9-42.
- [4] Mues E. Über ein problem von Hayman [J]. Math Z, 1979, 164(3): 239-259.
- [5] Bergweiler W, Eremenko A. On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order [J]. Rev Mat Iberoamericana, 1995, 11(2): 355-373.
- [6] Halburd R G, Korhonen R J. Nevanlinna theory for the difference operator [J]. Ann Acad Sci Fenn, 2006, 31(2): 463-478.
- [7] Halburd R G, Korhonen R J. Difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative with applications to difference equations [J]. J Math Anal Appl, 2006, 314(2): 477-487.
- [8] Barnett D C, Halburd R G, Korhonen R J, et al. Nevanlinna theory for the q-difference operator and meromorphic solutions of q-difference equations [J]. Proc Math Roy Soc Edinb, Sect A, 2007, 137 (3): 457-474.
- [9] Bergweiler W, Langley J K. Zeros of differences of meromorphic functions [J]. Math Proc Camb Philos Soc, 2007, 142(1): 133-147.
- [10] Chen Z X, Shon K H. Estimates for the zeros of differences of meromorphic functions [J]. Sci China Ser A, 2009, 52(11): 2447-2458.
- [11] Chen Z X, Huang Z B, Zheng X M. On properties of difference polynomials [J]. Acta Math Sinica Engl Ser, 2011, 31(2): 627-633.
- [12] Zhang J L, Gao Z S, Li S. Distribution of zeros and shared values of difference operators [J]. Ann Polo Math, 2011, 102(3): 213-221.
- [13] Chiang Y M, Feng S J. On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane [J]. Ramanujan J, 2008, 16 (1): 105-129.
- [14] Xu J F, Zhang X B. The zeros of q-shift difference polynomial of meromorphic functions [J]. Adva in Diff Equa, 2012, 2012(1): 200.
- [15] Yang C C, Hua X H. Uniqueness and value sharing of meromorphic functions [J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 1997, 22(2): 395-406. (编辑: 金虹)