

非有效市场中趋势驱动资产价格的波动估计

赵佃立

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 建立了具有马氏调制非有效市场趋势驱动的资产价格模型. 利用随机分析和 Volterra 方程的有关理论, 对模型的非线性项为有界函数、幂函数和极限形式幂函数这3种情况下的价格波动进行估计. 结果表明, 投资者整体投资趋势对资产价格的波动估计起到了决定性作用.

关键词: 非有效市场; 均值回复; 马氏切换; 随机扰动

中图分类号: F 830

文献标志码: A

Asymptotic Behaviour of a Markovian Switched Volterra-type Mean Reversion Equation Modelling an Inefficient Market

ZHAO Dian-li

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Based on the discrete speculation model, a trend-driven Markovian-modulated model for an ineffective market was established. By using the theory of stochastic analysis and Volterra equation, the model was analysed in cases of the bounded nonlinear term, the power nonlinear term and the limit form power nonlinear term. The results show that the overall investment trend plays a decisive role on the asset price limited behavior.

Key words: *inefficient market; Volterra-type mean reversion equation; Markovian switching; random item*

资产价格过程是金融市场中的一种复杂现象, 其中, 对资产价格过程的研究是很多学者的主要研究兴趣之一. 在复杂的问题中, 寻找简单而有效的模型来揭示规律, 是一种有效的尝试. Fama 于 1970 年提出了有效市场(EMH)的概念, 认为证券的价格迅速地反映了所有信息, 已经不可能从过去的价格趋势中获得未来盈利的机会. 然而现实中依然存在许多该理论无法解释的现象, 于是通过非有效市场的

简单模型来揭示资产价格的规律成为有效的方法之一. Sornette, Johansen 和 Bouchaud^[1]建立了资产价格的危机模型, 并分析了危机前后资产价格的对数周期行为, 随后 Feigenbaum 和 Freund^[2]通过数据验证了该模型的有效性. 方勇和孙绍荣^[3]研究了投资者情绪对证券投资的影响. 张晓莉和严广乐^[4]对沪深股票市场长程记忆相关性进行了研究. Appleby^[5]提出了非有效市场资产价格的趋势驱动

收稿日期: 2013-02-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11271260)

第一作者: 赵佃立(1979-), 男, 副教授. 研究方向: 金融数学. E-mail: dianli-zhao@163.com

离散模型,并在确定和不确定情况下讨论了资产价格的极限行为. Markov 过程是描述和研究资产价格模型的一个重要成分. Appleby 与其合作者^[6-8]对含有状态切换的金融模型进行研究,取得了一些重要的成果,并在文献[9]中对相关的方程进行了理论分析. 本文基于文献[5]的工作,假设股价服从经典的 Black-Scholes 模型,将随机扰动项推广为含马氏驱动的随机过程,在给定的适当条件下得到价格的极限. 在上述工作的基础上,考虑每个投资者的投资取向,建立含有马氏切换的非有效市场资产价格模型;通过考虑投资者价格取向的整体表现,推导出资产价格的波动边界.

1 模型描述

1.1 模型的建立

Appleby 从投资者的角度建立和分析了一类离散趋势投机模型. 假设资产累计收益

$$X(n+1) = \beta \left[\sum_{j=0}^{N_1} \beta_j g(X(n-j)) - \sum_{j=0}^{N_2} \omega_j g(X(n-j)) \right] + \xi_{n+1} \quad (1)$$

式中, $X(n)$ 为资产收益超过固定增长的部分; $\sum_{j=0}^{N_1} \beta_j g(X(n-j)) - \sum_{j=0}^{N_2} \omega_j g(X(n-j))$ 表示短期收益相对于长期收益的累积加权差,前者大于后者表示近期趋势将会延续,前者小于后者则表示价格将会掉转方向; β_j 和 ω_j 为正实数,代表第 j 个投资者的买卖行为对资产价格所造成的影响程度; N_1 和 N_2 为正整数,表示记忆的长度;函数 $g: R \rightarrow R$ 为股价的效用函数; ξ_{n+1} 是服从标准正态分布的随机扰动项,它代表了新增信息所带来的影响; β 代表整体反应强度.

文献[5-6]讨论了上述模型的特例,并分析了资产价格过程在确定性和随机扰动两种情况下的极限行为.

本文在上述工作的基础上,建立趋势投机者驱动的马氏切换资产价格模型. 记 $R(t)$ 为累积平均收益率,定义 $X(t) = R(t) - \mu t$, μ 为固定收益增长率,则 $X(t)$ 为资产收益超过固定增长的部分. 如果市场存在趋势投机者,则会利用这一趋势进行投机行为. 演化模型为

$$dX(t) = \sum_{j=1}^N \beta_j \left[\alpha_j X(t) + (1 - \alpha_j) \cdot \right.$$

$$\left. \int_{t-v_j(t)}^t s_j(t-u)g(X(u))du - \int_{t-\tau_j(t)}^t l_j(t-u)g(X(u))du \right] + X(t)dY(t) \quad (1)$$

式中, $v_j(t) \leq \tau_j(t)$, $j \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$, 表示记忆的长度; α_j 为正实数,反映了长期和短期之间的比重; N 为正整数,表示投资者个数; s_j 和 l_j 为加权函数; $\alpha_j X(t) + (1 - \alpha_j) \int_{t-v_j(t)}^t s_j(t-u)g(X(u))du$ 代表了第 j 个投资者选取的该资产的短期移动累积收益率; $\int_{t-\tau_j(t)}^t l_j(t-u)g(X(u))du$ 代表了第 j 个投资者选取的该资产的长期移动累积收益率; $Y(t)$ 是随机扰动项.

由于市场总是或多或少地受到一些不确定因素的影响,而且这些因素所在环境可能在不断变换,所以,假设 $Y(t)$ 满足方程

$$dY(t) = f(t, Y(t), \gamma(t))dt + \sigma(\gamma(t))dB(t) \quad (2)$$

式中, $\gamma(t)$ 是有限状态空间 S 上的马氏过程;假设初值 $X(0) = x_0 > 0$; $B(t)$ 是服从标准正态分布的随机扰动项;扰动强度 $\sigma: S \rightarrow R^+$, $f(x, y, t) \in C(R \times R \times R^+, R^+)$.

主要利用随机分析知识和 Volterra 的理论对上述模型进行分析,内容包含了该模型的非线性项在有界性、幂函数、极限限制这 3 种情形下的波动估计.

1.2 基本概念与引理

假设 $B(t)$ 是概率空间 $(\Omega, F, (F(t))_{t \geq 0}, P)$ 的标准布朗运动,其中,域流 $F(t) = \sigma(B(s), \gamma(s); 0 \leq s \leq t)$. $\gamma(t)$ 是有限状态空间 $S = \{1, 2, 3, \dots, K\}$ 上的马氏链, Δt 时间间隔上的生成算子 $\Gamma = (r_{ij})_{N \times N}$ 由

$$P(\gamma(t + \Delta t) = j | \gamma(t) = i) = \begin{cases} r_{ij}\Delta t + o(\Delta t) & i \neq j \\ 1 + r_{ii}\Delta t + o(\Delta t) & i = j \end{cases}$$

给出, $r_{ij} \geq 0$ 是从状态 i 到状态 j 的转移概率,满足 $r_{ii} = - \sum_{j \neq i} r_{ij}$. 假设有唯一稳态分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_N)$. 记 $M_i(n+1) = \inf\{t > M_i(n): \gamma(t) \neq i\} - T_i(n)$, $T_i(n+1) = \inf\{t > T_i(n) + M_i(n+1): \gamma(t) = i\}$, $L_i(n+1) = T_i(n+1) - T_i(n)$. 那么, $L_i(n)$ 对 $n = 1, 2, \dots$ 独立同分布,均值为 r_i , 方差为 $\sigma_{L_i}^2$; $M_i(n)$ 对 $n = 1, 2, \dots$ 也是独立同分布,均值为 m_i , 方差为 $\sigma_{m_i}^2$.

引理 1^[7] 假设 $u, v: R^+ \rightarrow R^+$, 而且 $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \infty$, 那么

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{u(t)}{v(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq t} \frac{\max\{u(s)\}}{v(t)}$$

引理 2^[8] 假设 S 是一个有限不可约状态空间, γ 是一个平稳跳过程, 而且 $\sigma: S \rightarrow R$, 那么

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{t}{2 \log \log t}} \left| \frac{1}{t} \int_0^t \sigma^2(\gamma(s)) ds - \sigma_*^2 \right| \leq \sum_{j \in S} \sigma^2(j) \delta_j, \text{ a. s.}$$

而且

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2 \log \log t}} \max_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s \sigma^2(\gamma(s)) ds - \sigma_*^2 s \right| \leq \sum_{j \in S} \sigma_j^2 \delta_j, \text{ a. s.}$$

其中, $\delta_j = (\sigma_{M_j} + \pi_j \sigma_{L_j}) / \sqrt{r_j}$ 和方差 $\sigma_*^2 = \sum_{j \in S} \sigma^2(j) \pi_j$ 是常量.

引理 3^[8] 假设 Y 是式(2)的唯一连续适应解, 初值 $Y(0) = Y_0$. 如果存在常数 $c > 0$, 使得对任意 $(x, y, t) \in R^+ \times S \times R^+$ 有

$$-\frac{1}{2} < \frac{xf(x, y, t)}{\sigma^2(y)} \leq c \quad (3)$$

那么

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|Y(t)|}{\sqrt{2 \log \log t}} = \sigma_*$$

而且

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\max_{0 \leq s \leq t} |Y(s)|}{\sqrt{2 \log \log t}} = \sigma_*, \text{ a. s.}$$

式中, σ_* 为标准差.

2 资产价格的波动估计

为了讨论的方便, 记 $a = - \sum_{j=1}^N \beta_j \alpha_j$, $k(t) = \sum_{j=1}^N \left[(1 - \alpha_j) s_j(t) I_{\{s \leq v_j(t)\}}(t) + l_j(t) I_{\{s \leq r_j(t) g(t)\}}(t) \right]$, $g(x) = g(x, t)$, $\lambda = a + \frac{1}{2} \sigma_*^2$ 和 $\tilde{\sigma}(t) = \frac{1}{2} \left(\sigma_*^2 t - \int_0^t \sigma^2(\gamma(s)) ds \right)$, 则模型(1)和模型(2)简写为如下马氏调制的 Volterra 型均值回复过程:

$$\left. \begin{aligned} dX(t) &= \left(-aX(t) + \int_0^t k(t-s)g(X(s), s)ds \right) \cdot \\ &\quad dt + X(t)dY(t) \\ dY(t) &= f(t, Y(t), \gamma(t))dt + \\ &\quad \sigma(\gamma(t))dB(t), \quad t \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

引理 4 和引理 5 给出了该模型解的表达式及其非负性质, 其证明省略.

引理 4 假设 $\varphi(t), y(t)$ 满足方程

$$\varphi(t) = 1 - \int_0^t a\varphi(s)ds + \int_0^t \varphi(s)dY(s)$$

$$y(t) = X(0) + \int_0^t \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s k(s-u)g(X(u), u)duds$$

那么, 方程(4)的解可以写成 $X(t) = \varphi(t)y(t)$.

引理 5 假设函数 $g(\cdot, \cdot)$ 和 $k(\cdot)$ 为非负连续函数, X 是方程(4)的解, 那么, $X(0) > 0$ (或 $X(0) \geq 0$) 可以依概率 1 推出 $X(t) > 0$ (或 $X(t) \geq 0$).

2.1 有界函数约束情形的波动估计

假设存在常数 $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, 使得

$$\alpha_1 \leq g(X(t), t) \leq \alpha_2 \quad (5)$$

定理 1 假设 X 是方程(4)具有初值 $X(0) = x_0 > 0$ 的唯一连续适应解, $a > 0$, $k(t) > 0$ 是 $[0, \infty)$ 上的连续函数, 且存在常数 $\beta \in (0, 1)$ 和正数 b, c 使得

$$\frac{\int_0^t k(u)du}{\int_0^{t-1} k(u)du} \leq be^{ct^\beta} \quad (6)$$

如果式(3)和式(5)成立, 那么

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{X(t)}{\int_0^t k(s)ds} = 0, \text{ a. s.}$$

证明 对应 α_i ($i = 1, 2$) 分别做辅助函数 Z_i 满足

$$\begin{aligned} dZ_i(t) &= \left(-aX(t) + \alpha_i \int_0^t k(t-s)ds \right) dt + \\ &\quad Z_i(t)dY(t) \end{aligned} \quad (7)$$

初值 $Z_i(0) = X(0)$. 由引理 4 知方程(7)的解为

$$Z_i(t) = \varphi(t) \left(X(0) + \alpha_i \int_0^t \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s k(u)duds \right)$$

由 $k(t)$, $\varphi(t)$ 和 $X(0)$ 的非负性及式(5)可得

$$Z_1(t) \leq X(t) \leq Z_2(t) \quad (8)$$

当 $i = 2$ 时, 由式(8)得

$$Z_2(t) \leq \varphi(t) \left(X(0) + \alpha_2 \int_0^t \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s k(u)duds \right) \leq$$

$$X(0)\varphi(t) + \alpha_2 \int_0^t \frac{\varphi(t)}{\varphi(s)} \int_0^s k(u)duds \leq$$

$$X(0)\varphi(t) + \alpha_2 \int_0^t k(u)du \cdot$$

$$\int_0^t e^{-\left(a(t-s) + \frac{1}{2} \int_s^t \sigma^2(u)du\right) + Y(t) - Y(s)} ds \leq$$

$$X(0)\varphi(t) + \frac{\alpha_2}{a} e^{Y(t) + \max_{0 \leq s \leq t} \{Y(s)\}} \cdot$$

$$\int_0^t k(u) du \leq 2(X(0)\varphi(t)) \vee$$

$$\left(\frac{2\alpha_2}{a} e^{2 \max_{0 \leq s \leq t} \{Y(s)\}} \int_0^t k(u) du \right) \quad (9)$$

由引理 3, 存在 $T > 0$, 使得当 $t > T$ 时, 有 $\max_{0 \leq s \leq t} |Y(s)| \leq t^{\frac{2}{3}}$, a. s. 进一步推得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left(e^{2 \max_{0 \leq s \leq t} \{Y(s)\}} \int_0^t k(u) du \right)}{t} =$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\int_0^t k(u) du \right)}{t} \geq 0, \text{ a. s.}$$

结合引理 1 和引理 3 推得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\varphi(t))}{t} = - \left(a + \frac{\sigma_*^2}{2} \right) < 0, \text{ a. s.}$$

当 t 充分大时, 由式(9)可得

$$Z_2(t) \leq \frac{2\alpha_2}{a} e^{2 \max_{0 \leq s \leq t} \{Y(s)\}} \int_0^t k(u) du \quad (10)$$

两边取上极限, 可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\frac{Z_2(t)}{\int_0^t k(u) du} \right)}{t} \leq$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\frac{2\alpha_2}{a} e^{2 \max_{0 \leq s \leq t} \{Y(s)\}} \right)}{t} = 0, \text{ a. s.} \quad (11)$$

现在证明反向不等式. 由引理 4 推得

$$Z_1(t) = \varphi(t) \left(X(0) + \right.$$

$$\alpha_1 \int_0^t \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s k(u) du ds \Big) \geq e^{-\lambda t + \widetilde{\sigma}(t) + Y(t)} \cdot$$

$$\int_0^t e^{\lambda s - \widetilde{\sigma}(s) - Y(s)} \int_0^s k(u) du ds \geq$$

$$e^{-2 \max_{0 \leq s \leq t} |\widetilde{\sigma}(s)| - 2 \max_{0 \leq s \leq t} |Y(s)|} \cdot$$

$$\int_0^t e^{-\lambda \langle t-s \rangle} \int_0^s k(u) du ds \geq$$

$$e^{-2 \max_{0 \leq s \leq t} |\widetilde{\sigma}(s)| - 2 \max_{0 \leq s \leq t} |Y(s)|} \cdot$$

$$\int_{t-1}^t e^{-\lambda \langle t-s \rangle} \int_0^{t-1} k(u) du ds \quad (12)$$

由引理 2 和引理 3, 在 $T_1 > 0$, 使得当 $t > T_1$ 时, 有 $\max_{0 \leq s \leq t} |\widetilde{\sigma}(s)| \leq t^{\frac{2}{3}}$ 和 $\max_{0 \leq s \leq t} |Y(s)| \leq t^{\frac{2}{3}}$ 成立, 于是, 有

$$Z_1(t) \geq \alpha_1 e^{-4t^{\frac{2}{3}}} \int_0^{t-1} k(u) du \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda})$$

又由式(6)推得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\int_0^{t-1} k(u) du \right) - \log \left(\int_0^t k(u) du \right)}{t} = 0 \quad (13)$$

结合式(12)和式(13), 有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\frac{Z_1(t)}{\int_0^t k(u) du} \right)}{t} \geq$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left[\alpha_1 e^{-4t^{\frac{2}{3}}} \frac{\int_0^{t-1} k(u) du}{\int_0^t k(u) du} \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda}) \right]}{t} = 0,$$

a. s. (14)

综上, 由式(8)、式(11)和式(14)可得定理 1 成立.

推论 1 假设 X 是方程(4)具有初值 $X(0) = x_0 > 0$ 的唯一连续适应解. $k(t) > 0$ 是 $[0, \infty)$ 上的连续可积函数. 如果式(3)和式(5)成立, 那么

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log X(t) = 0, \text{ a. s.}$$

证明 由于 $k(t)$ 可积, 所以, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \int_0^t k(s) ds}{t} =$

0. 根据定理 1 推得推论 1.

推论 2 假设 X 是方程(4)具有初值 $X(0) = x_0 > 0$ 的唯一连续适应解, $k(t) > 0$ 是 $[0, \infty)$ 上的连续函数, 式(3)和式(5)成立.

a. 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log k(t)}{t} = \zeta \leq 0$, 那么

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{t} = 0, \text{ a. s.}$$

b. 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log k(t)}{t} = \zeta > 0$, 那么

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{t} = \zeta, \text{ a. s.}$$

证明 由 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log k(t)}{t} = \zeta < 0$, 对任意 $\varepsilon \in (0, -\frac{\zeta}{2})$, 存在 $T = T(\varepsilon) > 0$, 使得当 $t > T$ 时, 有 $0 \leq k(t) \leq e^{\langle \zeta + \varepsilon \rangle t}$, 于是

$$\int_0^\infty k(s) ds \leq \int_0^T k(s) ds + \int_T^\infty e^{\langle \zeta + \varepsilon \rangle s} ds \leq$$

$$\int_0^T k(s) ds + \frac{e^{\langle \zeta + \varepsilon \rangle T}}{-(\zeta + \varepsilon)} < \infty$$

由推论 1 可知, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{t} = 0$. 可以断言, 由

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log k(t)}{t} = 0 \text{ 可推出 } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \int_0^t k(s) ds}{t} = 0. \text{ 如}$$

若不然,存在常数 $\eta > 0$,使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \int_0^t k(s) ds}{t} = \eta$. 由极限的性质,存在单调递增实数序列 $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \int_0^{t_n} k(s) ds}{t_n} = \eta$. 取 $\epsilon_0 = \frac{\eta}{2}$, 则存在 $N_1 = N_1(\epsilon) > 0$, 使得当 $n > N_1$ 时, $\int_0^{t_n} k(s) ds > e^{\frac{\eta t_n}{2}}$, 进一步推得

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{t_n} k(s) ds}{e^{\frac{\eta t_n}{2}}} \geq 1 \quad (15)$$

另一方面,由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log k(t)}{t} = 0$, 所以,对 $\epsilon_1 = \frac{\eta}{4}$, 存在 $T_2 = T_2(\epsilon) > 0$, 使得当 $t > T_2$ 时, 有 $k(t) \leq e^{\frac{\eta}{4}t}$, 于是

$$\int_0^t k(s) ds \leq \int_{T_2}^t k(s) ds + \int_0^{T_2} k(s) ds \leq \int_{T_2}^t e^{\frac{\eta}{4}s} ds + \int_0^{T_2} k(s) ds \leq \int_0^{T_2} k(s) ds + \frac{4}{\eta} e^{\frac{\eta}{4}t - \frac{\eta}{4}T_2}$$

记 $N_2 = \inf\{n+1: t_n \geq T_2\}$, 则当 $n > N_2$ 时, 有 $\int_0^{t_n} k(s) ds \leq \int_0^{T_2} k(s) ds + \frac{4}{\eta} e^{\frac{\eta}{4}t_n - \frac{\eta}{4}T_2}$, 由此推得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{t_n} k(s) ds}{e^{\frac{\eta t_n}{2}}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{T_2} k(s) ds + \frac{4}{\eta} e^{\frac{\eta}{4}t_n - \frac{\eta}{4}T_2}}{e^{\frac{\eta t_n}{2}}} = 0 < 1 \quad (16)$$

比较式(15)和式(16)可知,结论与

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{t_n} k(s) ds}{e^{\frac{\eta t_n}{2}}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{t_n} k(s) ds}{e^{\frac{\eta t_n}{2}}}$$

矛盾,所以,a得证.

现证明 b. 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log k(t)}{t} = \zeta > 0$, 则对任意 $\epsilon \in (0, \frac{\zeta}{2})$, 存在 $T_3 = T_3(\epsilon) > 0$, 使得当 $t > T_3$ 时, $e^{(\zeta-\epsilon)t} \leq k(t) \leq e^{(\zeta+\epsilon)t}$, 于是

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \int_0^t k(s) ds}{t} \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \int_{T_3}^t k(s) ds}{t} \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log e^{(\zeta-\epsilon)(t-T_3)}}{t} = \zeta - \epsilon$$

而且

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \int_0^t k(s) ds}{t} &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\int_{T_3}^t k(s) ds + \int_0^{T_3} k(s) ds \right)}{t} \leq \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\int_{T_3}^t k(s) ds + \frac{e^{(\zeta+\epsilon)(t-T_3)}}{\zeta + \epsilon} \right)}{t} &= \zeta + \epsilon \end{aligned}$$

令 $\epsilon \rightarrow 0$, 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \int_0^t k(s) ds}{t} = \zeta$. 由定理 1

推得结论 b.

由上述结论可知,如果 $k(t)$ 可积,那么,李雅谱诺夫指数为 0,即非指数增长. 定理 2 给出了更精确的增长边界估计.

定理 2 假设 X 是方程(4)具有初值 $X(0) = x_0 > 0$ 的唯一连续适应解, $k(t) > 0$ 是 $[0, \infty)$ 上的连续可积函数. 如果式(3)和式(5)成立,那么,有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{\sqrt{t \log \log t}} \leq 2\sigma_*$$

而且

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{\sqrt{t \log \log t}} \geq - (2\sigma_* + \sum_{j \in S} \sigma^2(j) \beta_j)$$

成立.

证明 由式(10)可知, $Z_2(t) \leq \frac{2\alpha_2}{a}$.

$e^{2 \max_{0 \leq s \leq t} \{Y(s)\}} \int_0^\infty k(u) du$. 由于 $k(t) > 0$ 是 $[0, \infty)$ 上的连续可积函数, 所以, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \int_0^\infty k(s) ds}{\sqrt{t \log \log t}} = 0$, 于是, 由引理 3 可知

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{\sqrt{t \log \log t}} \leq 2\sigma_*$$

现证另一个不等式. 当 t 充分大时, 由式(12)

$$X(t) \geq e^{-2 \max_{0 \leq s \leq t} \{\tilde{\sigma}(s)\} - 2 \max_{0 \leq s \leq t} \{Y(s)\}} \cdot \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \int_0^1 k(s) ds$$

由 $k(t) > 0$ 是 $[0, \infty)$ 上的连续可积函数推得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \int_0^1 k(s) ds}{\sqrt{t \log \log t}} = 0, \text{ 于是, 由引理 3 可知}$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{\sqrt{t \log \log t}} \geq - (2\sigma_* + \sum_{j \in S} \sigma^2(j) \beta_j)$$

2.2 幂函数约束情形的波动估计

现主要讨论 $g(x, t) = x^\rho$ ($\rho > 0$) 的情形. 方程

(1)可以写成

$$dX(t) = \left(-aX(t) + \int_0^t k(t-s)X^\rho(s)ds \right) dt + X(t)dY(t) \quad (17)$$

由引理 4, 将 $g(x, t) = x^\rho$ 代入解的表达式, 可得

$$X(t) = \varphi(t) \left(X(0) + \int_0^t \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s k(s-u)\varphi^\rho(u)y^\rho(u)duds \right)$$

定理 3 假设 X 是方程(4)具有初值 $X(0) = x_0 > 0$ 的唯一连续适应解, $k(t) > 0$ 是 $[0, \infty)$ 上的连续函数, $g(x, t) = x^\rho, \rho > 0$. 如果式(3)成立, 那么, 有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{t} \geq -\lambda\rho + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \int_0^{t-1} k(s)e^{\lambda s} ds}{t}$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{t} \leq \frac{1}{1-\rho} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \int_0^t k(s)e^{\lambda s} ds}{t}$$

证明 由 $y(t)$ 的定义可知, $y(t)$ 单调递增而且

$$X(0) \leq y(t) \leq X(0) + y^\rho(t) \int_0^t \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s k(s-u)\varphi^\rho(u)duds \quad (18)$$

结合 $\varphi(t)$ 的定义和式(18)推得

$$X(t) \geq \varphi(t) \left(X(0) + X^\rho(0) \cdot \int_0^t \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s k(s-u)\varphi^\rho(u)duds \right) \geq X^\rho(0)\varphi(t) \cdot \int_0^t \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s k(s-u)\varphi^\rho(u)duds \geq X^\rho(0)e^{-\lambda t + \widetilde{\sigma}(t) + Y(t)} \cdot \int_0^t e^{\lambda s - \widetilde{\sigma}(s) - Y(s)} \int_0^s k(s-u)e^{-\lambda u + \rho \widetilde{\sigma}(u) + \rho Y(u)} duds$$

$$\text{其中, } \widetilde{\sigma}(t) = \frac{1}{2} \left(\sigma_*^2 t - \int_0^t \sigma^2(\gamma(s))ds \right).$$

由引理 2 和引理 3, 当 t 充分大时, 有

$$X(t) \geq X^\rho(0)e^{-\lambda t + \langle 4+2\rho \rangle t^{\frac{2}{3}}} \cdot \int_0^t e^{\lambda s} \int_0^s k(s-u)e^{-\lambda u} duds$$

整理可得

$$X(t) \geq X^\rho(0)e^{-\lambda t - \langle 4+2\rho \rangle t^{\frac{2}{3}}} \cdot \int_0^t e^{\lambda \langle 1-\rho \rangle s} \int_0^s k(v)e^{\lambda \rho v} dv ds \geq$$

$$X^\rho(0)e^{-\lambda t - \langle 4+2\rho \rangle t^{\frac{2}{3}}} \cdot \int_{t-1}^t e^{\lambda \langle 1-\rho \rangle s} \int_0^{t-1} k(v)e^{\lambda \rho v} dv ds = X^\rho(0)e^{-\lambda \rho t - \langle 4+2\rho \rangle t^{\frac{2}{3}}} \frac{1 - e^{-\lambda \langle 1-\rho \rangle}}{1-\rho} \cdot \int_0^{t-1} k(v)e^{\lambda \rho v} dv$$

取下极限, 推得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{t} \geq -\lambda\rho + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\int_0^{t-1} k(v)e^{\lambda \rho v} dv \right)}{t}$$

现证明关于上极限的不等式. 结合引理 2、引理 3 和式(18), 推得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\int_0^t \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s k(s-u)\varphi^\rho(u)duds \right)}{t} \geq \lambda(1-\rho) + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\int_0^1 k(v)e^{\lambda \rho v} dv \right)}{t} \geq \lambda(1-\rho) > 0$$

在式(18)两边取极限

$$0 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log y(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left(y^\rho(t) \int_0^t \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s k(s-u)\varphi^\rho(u)duds \right)}{t} \quad (19)$$

由于对任意 $t > 0$, 有

$$\int_0^t \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s k(s-u)\varphi^\rho(u)duds \leq \int_0^t e^{\lambda \langle 1-\rho \rangle s} \int_0^s k(v)e^{\lambda \rho v} dv ds \leq \int_0^t e^{\lambda \langle 1-\rho \rangle s} ds \int_0^t k(v)e^{\lambda \rho v} dv$$

又由式(19)推得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log y(t)}{t} \leq \lambda + \frac{1}{1-\rho} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\int_0^t k(s)e^{\lambda s} ds \right)}{t}$$

利用关系式 $X(t) = \varphi(t)y(t)$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(t)}{t} =$

$-\lambda$, 可知

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(t)}{t} +$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log y(t)}{t} \leq \frac{1}{1-\rho} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\int_0^t k(s)e^{\lambda s} ds \right)}{t}$$

推论 3 假设 X 是方程(4)具有初值 $X(0) =$

$x_0 > 0$ 的唯一连续适应解, $k(t) > 0$ 是 $[0, \infty)$ 上的连续函数, $g(x, t) = x^\rho, \rho > 0$. 条件式(3)成立, 则有下列的关系成立:

a. 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log k(t)}{t} = \zeta \leq -\lambda\rho$, 那么, $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{t} \leq 0$, 而且, $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{t} \geq -\lambda\rho$;

b. 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log k(t)}{t} = \zeta > -\lambda\rho$, 那么, $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{t} \leq \frac{\zeta + \lambda\rho}{1 - \rho}$, 而且, $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{t} \geq \zeta$.

证明 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log k(t)}{t} = \zeta < -\lambda\rho$, 那么,

$\int_0^t k(s)e^{\lambda\rho s} ds < \infty$, 于是, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\int_0^t k(s)e^{\lambda\rho s} ds\right)}{t} = 0$. 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log k(t)}{t} = \zeta = -\lambda\rho$, 那么, 类似于式

(14) 可证明 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\int_0^t k(s)e^{\lambda\rho s} ds\right)}{t} = 0$. 由定理 3 可知 a 成立.

现证明 b. 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log k(t)}{t} = \zeta > -\lambda\rho$, 那么, 类似于定理 2 中 b 的证明, 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\int_0^t k(s)e^{\lambda\rho s} ds\right)}{t} = \zeta + \lambda\rho$$

由定理 3 可知 b 成立.

2.3 极限限制情形的波动估计

假设存在正数 β 和 $\rho \in (0, 1)$, 使得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x, t)}{x^\rho} = \beta \quad (20)$$

定理 4 假设 X 是方程(4)具有初值 $X(0) = x_0 > 0$ 的唯一连续适应解, $k(t) > 0$ 是 $[0, \infty)$ 上的连续函数, $a > 0$, 式(3)和式(20)成立, 则有以下结论:

a. 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log k(t)}{t} = \zeta \leq 0$, 那么, $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{t} \leq \frac{\lambda\rho}{1 - \rho}$, 而且, $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{t} \geq -\lambda\rho$;

b. 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log k(t)}{t} = \zeta > 0$, 那么, $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{t} \leq \frac{\zeta + \lambda\rho}{1 - \rho}$, 而且, $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{t} \geq \zeta$.

证明 先证明关于下极限的情形. 由式(20), 对任意 $\varepsilon \in (0, \beta)$, 存在 $K = K(\varepsilon) > 0$, 使得当 $x > K$ 时, 有 $|g(x, t) - \beta x^\rho| \leq \varepsilon |x^\rho|$; 又由方程的解非负可

知, 对任意 $t > 0$, 存在 $L = L(\varepsilon) > 0$, 使得 $g(x, t) < (\beta + \varepsilon)x^\rho + L(\varepsilon)$. 由引理 4 推得, $X(t) = \varphi(t)y(t)$, 而且

$$X(0) \leq y(t) \leq X(0) + \int_0^t \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s k(s-u) \cdot [(\beta + \varepsilon)\varphi^\rho(u)y^\rho(u) + L] du ds$$

由定理 3 的证明易得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{t} \geq -\lambda\rho + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \int_0^t \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s k(s) e^{\lambda\rho s} ds}{t}$$

于是, 由推论 3 可知以下关系成立:

a. 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log k(t)}{t} = \zeta \leq -\lambda\rho$, 那么,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{t} \geq -\lambda\rho;$$

b. 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log k(t)}{t} = \zeta > -\lambda\rho$, 那么,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{t} \geq \zeta.$$

现证明关于上极限的结论. 由 $y(t)$ 的单调性推得

$$y(t) \leq X(0) + (\beta + \varepsilon)y^\rho(t) \cdot \int_0^t \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s k(s-u)\varphi^\rho(u) du ds + L \int_0^t \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s k(v) dv ds$$

由引理 2 和引理 3 推得, 当 t 充分大时, 有

$$\int_0^t \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s k(s-u)\varphi^\rho(u) du ds = \int_0^t e^{\lambda s - \widetilde{\sigma}(s) - Y(s)} \int_0^s k(s-u) e^{-\lambda \rho u + \rho \widetilde{\sigma}(u) + \rho Y(u)} du ds \leq e^{2(1+\rho)t^{\frac{2}{3}}} \int_0^t e^{\lambda(1-\rho)s} ds \int_0^t k(v) e^{\lambda \rho v} dv \quad (21)$$

和

$$\int_0^t \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s k(v) dv ds \leq \int_0^t e^{\lambda s - \widetilde{\sigma}(s) - Y(s)} \int_0^s k(v) dv ds \leq e_{0 \leq s \leq t}^{\max} |\widetilde{\sigma}(s)| + \max_{0 \leq s \leq t} |Y(s)| \int_0^t e^{\lambda s} ds \int_0^t k(v) dv \leq e^{2t^{\frac{2}{3}}} \int_0^t e^{\lambda s} ds \int_0^t k(v) dv \quad (22)$$

如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log k(t)}{t} = \zeta \leq -\lambda\rho$, 那么, 由式(21)

推得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{\log e^{2(1+\rho)t^{\frac{2}{3}}} \int_0^t e^{\lambda(1-\rho)s} ds \int_0^t k(v) e^{\lambda \rho v} dv}{t} =$$

$$\lambda(1-\rho) + \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{\log \int_0^t k(v) e^{\lambda \rho v} dv}{t} = \lambda(1-\rho)$$

同时,由式(22)推得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{\log e^{t^{\frac{2}{3}}} \int_0^t e^{\lambda s} ds \int_0^t k(v) dv}{t} = \lambda$$

结合

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(t)}{t} = -\left(a + \frac{\sigma_*^2}{2}\right) < 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(0)}{t} = 0, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log y(t)}{t} \geq 0$$

比较可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{\log X(t)}{t} \leq -\lambda + \frac{\lambda}{1-\rho} = \frac{\lambda \rho}{1-\rho}$$

如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log k(t)}{t} = \zeta \in (-\lambda \rho, 0]$, 那么, 由式

(21)和式(22)推得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{\log e^{2(1+\rho)t^{\frac{2}{3}}} \int_0^t e^{\lambda(1-\rho)s} ds \int_0^t k(v) e^{\lambda \rho v} dv}{t} = \lambda + \zeta$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{\log e^{t^{\frac{2}{3}}} \int_0^t e^{\lambda s} ds \int_0^t k(v) dv}{t} \leq \lambda$$

于是

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{\log X(t)}{t} \leq -\lambda + \frac{\lambda}{1-\rho} = \frac{\lambda \rho}{1-\rho}$$

如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log k(t)}{t} = \zeta > 0$, 那么, 由式(21)和式

(22)推得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{\log e^{2(1+\rho)t^{\frac{2}{3}}} \int_0^t e^{\lambda(1-\rho)s} ds \int_0^t k(v) e^{\lambda \rho v} dv}{t} = \lambda + \zeta$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{\log e^{t^{\frac{2}{3}}} \int_0^t e^{\lambda s} ds \int_0^t k(v) dv}{t} = \lambda + \zeta$$

于是

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{\log X(t)}{t} \leq \frac{\zeta + \lambda \rho}{1-\rho}$$

3 结 论

构造了具有马氏调制的非有效市场趋势驱动的

资产价格模型. 利用随机分析和 Volterra 方程的有关理论, 对该模型在多种情况下的波动范围进行估计. 在给定的条件下, 资产价格的增长的边界估计依赖于反映投资者投资趋势的取向函数, 马氏切换的引入打破了原有的价格增长边界. 本文的理论结果推广了已有文献的有关结论.

参考文献:

- [1] Sornette D, Johansen A, Bouchaud J. Stock market crashes, precursors and replicas[J]. J Phys I (France), 1996(6):167-175.
- [2] Feigenbaum J A, Freund P. Discrete scale invariance in stock markets before crashes[J]. Int J Modern Phys B, 1996(10):3737-3745.
- [3] 方勇, 孙绍荣. 影响证券投资者情绪的因素分析[J]. 上海理工大学学报, 2008, 30(2):157-161.
- [4] 张晓莉, 严广乐. 沪深股票市场长程记忆相关性研究[J]. 上海理工大学学报, 2006, 28(3):237-241.
- [5] Appleby J A D, Rodkina A, Swords C. Fat tails and bubbles in a discrete time model of an inefficient financial market [C]// Proceedings of the 5th International Conference on Dynamic Systems and Applications. Atlanta: DYNAMIC PUBLISHERS INC, 2007.
- [6] Appleby J A D, Swords C. Asymptotic behaviour of a nonlinear stochastic difference equation modelling an inefficient financial market[J]. Adv Stud Pure Math, 2009(53):23-33.
- [7] Appleby J A D, Wu H. Solutions of stochastic differential equations obeying the law of the iterated logarithm with applications to financial markets [J]. Electron J Probabil, 2009(14):912-959.
- [8] Appleby J A D, Lynch T, Mao X, et al. The size of the largest fluctuations in a market model with Markovian switching[J]. Communications in Applied Analysis, 2009(13):135-166.
- [9] Appleby J A D, Reynolds D W. On the non-exponential convergence of asymptotically stable solutions of linear scalar Volterra integro-differential equations [J]. J Integral Equ Appl, 2002, 14(2):109-118.

(编辑:石 瑛)