

色散项系数为负的 MKdV-Burgers 方程的有界行波解

裴胜兵¹, 张卫国¹, 李 想²

(1. 上海理工大学 理学院, 上海 200093; 2. 上海理工大学 管理学院, 上海 200093)

摘要: 利用平面动力系统理论、假设待定法和齐次化原理研究了色散项系数为负的 MKdV-Burgers 方程的有界行波解, 得到了方程行波解所对应的平面动力系统在不同参数条件下的全局相图以及有界行波解存在的条件和个数. 讨论了该方程有界行波解的波形与耗散系数之间的关系, 给出了表征耗散作用大小的临界值, 该临界值与 Bikbaev 在文献中提出的临界值是不相同的. 求出了该方程的钟状和扭状孤波解, 进一步根据衰减振荡解对应的解轨线在相图中的演化关系, 求得了该方程的衰减振荡解的近似解. 给出了所求衰减振荡近似解与精确解的误差估计, 其误差是以指数形式速降的无穷小量. 最后, 证明了所求衰减振荡解的近似解关于对接点的稳定性.

关键词: MKdV-Burgers 方程; 定性分析; 衰减振荡解; 误差估计; 稳定性

中图分类号: O 175.2 **文献标志码:** A

Bounded Traveling Wave Solutions for MKdV-Burgers Equation with Negative Dispersion Coefficient

PEI Sheng-bing¹, ZHANG Wei-guo¹, LI Xiang²

(1. College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;

2. Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The bounded traveling wave solutions of MKdV-Burgers equation with negative dispersion coefficient were studied with resorting to the theory of planar dynamical systems, undetermined coefficients method and homogenization principle. The global phase portraits under different parameter conditions as well as the existent number and existense conditions were obtained for the dynamical system corresponding to the traveling wave solutions of the MKdV-Burgers equation. The relation between the profiles of bounded traveling wave solutions and dissipation coefficient was investigated, and a critical value, different from the one proposed by Bikbaev in his article was provided, which characterizes the scale of dissipation effect is presented. The bell and kink profile solitary wave solutions are presented for the MKdV-Burgers equation. Moreover, approximate damped oscillatory solutions of the MKdV-Burgers equation are obtained

收稿日期: 2013-07-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071164); 上海市教委重点科研创新资助项目(13ZZ118); 上海市一流学科(系统科学)建设资助项目(XTKX2012)

第一作者: 裴胜兵(1988-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 非线性系统的理论与应用. E-mail: ron7424@126.com

通讯作者: 张卫国(1957-), 男, 教授. 研究方向: 非线性系统的理论与应用. E-mail: zwgzwm@126.com

according to the evolution relation of orbits corresponding to the approximate damped oscillatory solutions in the global phase portraits. This paper also presents the error estimates between exact and approximate solutions for the approximate damped oscillatory solutions. The error is infinitesimal decreasing in exponential form. Finally, the stability at connective points was proved for the approximate damped oscillatory solutions.

Key words: MKdV-Burgers equation; qualitative analysis; damped oscillatory solution; error estimate; stability

1 问题的提出

MKdV 方程^[1-4]

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

可作为描述非谐晶格中声波的一个模型方程,也可用来研究非线性光学中光波的波动和尘埃等离子体中的尘埃孤波问题.许多学者对方程(1)进行了研究.文献[5-11]研究了方程(1)解的存在性和唯一性,文献[12-14]研究了方程(1)的反散射解,文献[15]研究了方程(1)的 Lax 对,文献[16-18]分别用格子 Boltzmann 方法、拟小波方法、修正的 Jacobi 椭圆函数展开法求得了方程(1)的部分孤波解.

色散项系数的正负表征着色散的类型,正的说明色散是扩张型的,负的说明色散是内敛型的,在现实中都较为常见^[19].同时,由于实际问题中耗散是不可避免的,一些作者考虑了较方程(1)更有实际意义的 MKdV-Burgers 方程

$$u_t + 6u^2 u_x + \gamma u_{xxx} = \nu u_{xx}, \quad \nu \geq 0 \quad (2)$$

式中, γ 为色散系数; ν 为耗散系数.

对于方程(2),文献[20]利用推广的 tanh 函数展开法得到了 3 个精确行波解,其中,包含 1 个有界的扭状孤波解.文献[21]用变异参数法得到了更广泛的行波解,而且还得到了一些无界周期行波解. Bikbaev 在文献[22]中利用吸引子解释了方程(2)的冲击波问题,研究了方程(2)的行波解在 $t \rightarrow +\infty$ 时的渐近性质,求出了使冲击波解取单调形状或振荡形状的耗散系数 ν 的临界值 $\nu_0 = 2\sqrt{|\gamma(6u_-^2 - V)|}$ (其中, u_- 表示方程的行波解在自变量趋于负无穷时的渐近值, V 表示行波的波速),并强调这个临界值不依赖于 γ 的符号.对于方程(2)振荡解的求解问题,文献[22]特别指出,它是一个没被解决的开问题.文献[23]研究了 $\gamma, \nu \rightarrow 0$, 而比例系数 $\frac{|\gamma|}{\nu^2}$ 保持为一个常数时,方程(2)的行波解趋于满足数量守恒

定律 $u_t + (u^3)_x = 0$ 的冲击波的问题,该文中指出:当 $\gamma > 0$ 时,方程(2)的相容性冲击波解(文献[23]中将方程(2)在 $\gamma, \nu \rightarrow 0$, 而比例系数 $\frac{|\gamma|}{\nu^2}$ 保持为一个常数时其极限满足数量守恒定律 $u_t + (u^3)_x = 0$ 的冲击波解称为相容性冲击波解)都是满足 Lax 熵条件的,而在 $\gamma < 0$ 时,存在不满足 Lax 熵条件的相容性冲击波解;当 $\gamma > 0$ 时,黎曼问题的解都是与古典解吻合的,而在 $\gamma < 0$ 时,存在一系列初值使得解与古典解不吻合.文献[23]意味着对于方程(2)在 $\gamma < 0$ 情形下的研究似乎是在 $\gamma > 0$ 情形下的研究更有意义.

本文着重研究 $\gamma < 0$ 情形下的 MKdV-Burgers 方程(2)的有界行波解,应用平面动力系统的理论和方法研究方程(2)的有界行波解存在的条件、存在的个数,讨论耗散作用的大小(即 ν 的大小)对行波解波形的影响,更重要的是针对文献[22]中所述的开问题给出方程(2)振荡解的近似解及其误差估计,还给出了这种近似解的稳定性.以下讨论中始终假定 $\gamma < 0$.

2 方程(2)有界行波解的定性分析

假设方程(2)有行波解 $u(x, t) = u(\xi) = u(x - Vt)$, 与文献[24]类似,可知 $u(\xi)$ 满足

$$u''(\xi) + \bar{\nu} u'(\xi) + \bar{b}(u^3(\xi) + pu(\xi) + q) = 0 \quad (3)$$

其中

$$\bar{\nu} = -\frac{\nu}{\gamma}, \bar{b} = \frac{2}{\gamma}, p = -\frac{V}{2}, q = -\frac{g}{2} \quad (4)$$

式中, g 为积分常数.

进一步,令 $x = u(\xi)$ 和 $y = u'(\xi)$, 可以得到等价于方程(3)的平面动力系统

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= y \equiv P(x, y) \\ \frac{dy}{d\xi} &= -\bar{\nu}y - \bar{b}(x^3 + px + q) \equiv Q(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

在 (x, y) 平面上,方程 $f(x) = x^3 + px + q = 0$

实根的个数决定了系统(5)有限远奇点的个数. 设 $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{27g^2 - 2V^3}{432}$, 由于方程 $f(x) = 0$ 根的数量性质和 Δ 的关系与文献[24]中指出的一致, 不再赘述.

由于在 $\Delta > 0$ 情形下, 系统(5)只含有 1 个有限远奇点, 相应的方程(3)不具有有界行波解, 所以, 以下始终假定 $V > 0$ 和 $\Delta \leq 0$. 另外, 为了不致于叙述重复, 始终假定积分常数 $g \geq 0$, 对 $g < 0$ 情况可类似讨论, 并且结论相同或类似.

在上述假定下, 系统(5)有 3 个有限远奇点 $P_i(x_i, 0) (i = 1, 2, 3)$, $x_i (i = 1, 2, 3)$ 是 $f(x) = 0$ 的根, 可设 $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, 则有

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \quad x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = p, \\ x_1 x_2 x_3 &= -q \end{aligned} \quad (6)$$

另外, 系统(5)在有限远奇点 $P_i(x_i, 0) (i = 1, 2, 3)$ 处的雅可比矩阵为

$$J(x_i, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\bar{b}f'(x_i) & -\bar{v} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

则雅可比行列式为

$$\det(J(x_i, 0)) = \bar{b}f'(x_i) = \bar{b}(3x_i^2 + p) \quad (8)$$

利用平面动力系统的理论^[25-26]对系统(5)进行定性分析, 并画出全局相图.

2.1 $v = 0$ 的情况

由平面动力系统理论^[25-26]可知, 若 $\det(J(x_i, 0)) > 0$, 则 $P_i(x_i, 0)$ 为中心; 若 $\det(J(x_i, 0)) < 0$, 则 $P_i(x_i, 0)$ 为鞍点; 若 $\det(J(x_i, 0)) = 0$ 且 $P_i(x_i, 0)$ 的 Poincaré 指数等于 0, 则 $P_i(x_i, 0)$ 是尖点. 综合这些结论和式(6)来分析系统(5)的有限远奇点, 可得如下结论:

a. 在 $q = 0$ 即 $g = 0$ 的情况.

此时有 $\Delta < 0$, 故系统(5)有 3 个不相同的有限远奇点 $P_i(x_i, 0) (i = 1, 2, 3)$, 其中 $x_1 = -x_3 = -\sqrt{-p}$, $x_2 = 0$. P_1 和 P_3 为鞍点, P_2 为中心.

b. 在 $q < 0$ 即 $g > 0$ 的情况.

(a) 当 $\Delta = 0$ 时, $P_1(x_1, 0)$ 与 $P_2(x_2, 0)$ 重合, 记为 $P_{1,2}(x_{1,2}, 0)$, 那么, 系统(5)具有 2 个不相同的有限远奇点 $P_{1,2}(x_{1,2}, 0)$ 和 $P_3(x_3, 0)$, 其中, $x_{1,2} < 0 < x_3$. $P_{1,2}$ 为尖点, P_3 为鞍点.

(b) 当 $\Delta < 0$ 时, 系统(5)具有 3 个不相同的有限远奇点 $P_i(x_i, 0) (i = 1, 2, 3)$. 其中, $x_1 < x_2 < 0 < -x_2 < -x_1 < x_3$. P_1 和 P_3 为鞍点, P_2 为中心.

2.2 $v > 0$ 的情况

这里将 $P_i(x_i, 0)$ 处的特征方程的判别式记为

Δ_i , 则

$$\Delta_i = \bar{v}^2 - 4\bar{b}f'(x_i) = \bar{v}^2 - 4\bar{b}(3x_i^2 + p), \quad i = 1, 2, 3 \quad (9)$$

由平面动力系统理论^[25-26]可知, 若 $\det(J(x_i, 0)) > 0$, $\Delta_i > 0$, 则 $P_i(x_i, 0)$ 为稳定结点; 若 $\det(J(x_i, 0)) > 0$, $\Delta_i < 0$, 则 $P_i(x_i, 0)$ 为稳定焦点; 若 $\det(J(x_i, 0)) = 0$, 易证此时 $P_i(x_i, 0)$ 为鞍结点; 若 $\det(J(x_i, 0)) < 0$, 则 $P_i(x_i, 0)$ 为鞍点. 结合这些结论和式(6)对系统(5)的有限远奇点作分析, 可得下述结论:

a. 在 $q = 0$ 即 $g = 0$ 的情况.

此时系统(5)有 3 个不同的有限远奇点 $P_i(x_i, 0) (i = 1, 2, 3)$, 其中, $x_1 = -x_3 = -\sqrt{-p}$, $x_2 = 0$, P_1 和 P_3 为鞍点, P_2 在 $\Delta_2 > 0$ 时为稳定结点, 在 $\Delta_2 < 0$ 时为稳定焦点.

b. 在 $q < 0$ 即 $g > 0$ 的情况.

(a) 当 $\Delta = 0$ 时, $P_1(x_1, 0)$ 与 $P_2(x_2, 0)$ 重合, 记为 $P_{1,2}(x_{1,2}, 0)$, 且 $x_{1,2} < 0 < x_3$, 易证 $P_{1,2}$ 为鞍结点, P_3 为鞍点.

(b) 当 $\Delta < 0$ 时, 系统(5)有 3 个不同的有限远奇点 $P_i(x_i, 0) (i = 1, 2, 3)$, 且 $x_1 < x_2 < 0 < -x_2 < -x_1 < x_3$. 易证 P_1 和 P_3 为鞍点, P_2 在 $\Delta_2 > 0$ 时为稳定结点, 在 $\Delta_2 < 0$ 时为稳定焦点.

再对系统(5)作 Poincaré 变换, 分析其无穷远奇点的类型可得, 系统(5)仅在 y 轴上含有 2 个无穷远奇点 $A_i (i = 1, 2)$, 其中, A_1 在 y 轴的正半轴上, A_2 在 y 轴的负半轴上, 且 $A_i (i = 1, 2)$ 周围分别存在 1 个椭圆型区域. 除此之外, Poincaré 圆盘的圆周也为轨线.

对于平面动力系统(5), 因为 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -\bar{v}$, 所以, 根据 Bendixson-Dulac 判别法, 可得命题 1 成立.

命题 1 当 $\bar{v} > 0$ 即 $v > 0$ 时, 平面动力系统(5)在 (x, y) 平面上既不具有闭轨线, 也不具有含有限个奇点的奇异闭轨线. 相应地可知, 当 $v > 0$ 时, 方程(2)不存在周期行波解和钟状孤波解.

根据上述分析, 可做出系统(5)在不同参数条件下的全局相图, 如图 1~5 所示(见下页).

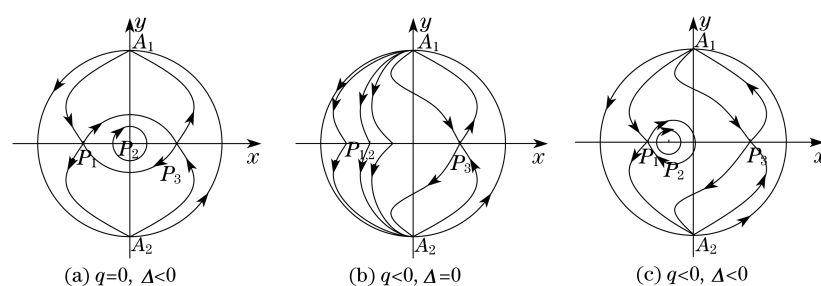
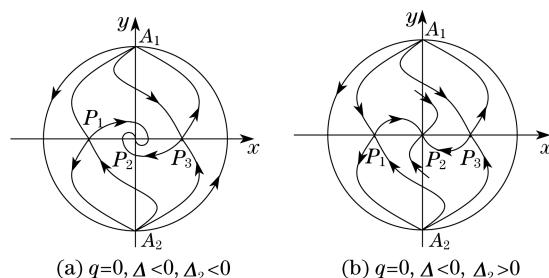
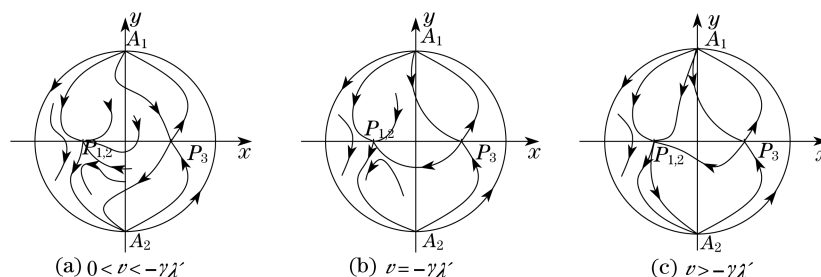
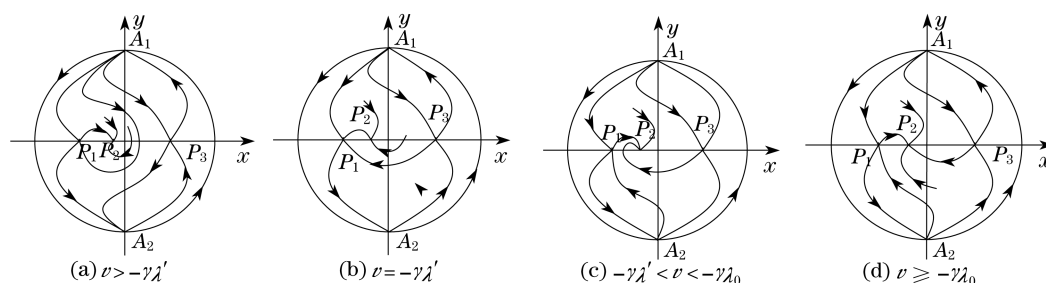
a. 在 $v = 0$ 的情况下(见图 1).

b. 在 $v > 0$ 的情况下(见图 2~4).

相图中的参数 $\lambda', \lambda_0, \lambda^*$ 由式(12)给出.

由全局相图 1~5, 可得命题 2 和命题 3.

命题 2 a. 当 $v = 0$ 时, 除去奇点 $P_i (i = 1, 2, 3)$

图 1 系统(5)在 $q=0, \Delta<0; q<0, \Delta=0; q<0, \Delta<0$ 情形下的全局相图Fig.1 Global phase portraits of system (5) in the case of $q=0, \Delta<0; q<0, \Delta=0; q<0, \Delta<0$ 图 2 系统(5)在 $q=0, \Delta<0, \Delta_2>0; q=0, \Delta<0, \Delta_2<0$ 情形下的全局相图Fig.2 Global phase portraits of system (5) in the case of $q=0, \Delta<0, \Delta_2>0; q=0, \Delta<0, \Delta_2<0$ 图 3 系统(5)在 $q<0, \Delta=0$ 情形下的全局相图Fig.3 Global phase portraits of system (5) in the case of $q<0, \Delta=0$ 图 4 系统(5)在 $q<0, \Delta<0, \Delta_2>0, 0<a\leq\bar{A}$ 情形下的全局相图Fig.4 Global phase portraits of system (5) in the case of $q<0, \Delta<0, \Delta_2>0, 0<a\leq\bar{A}$

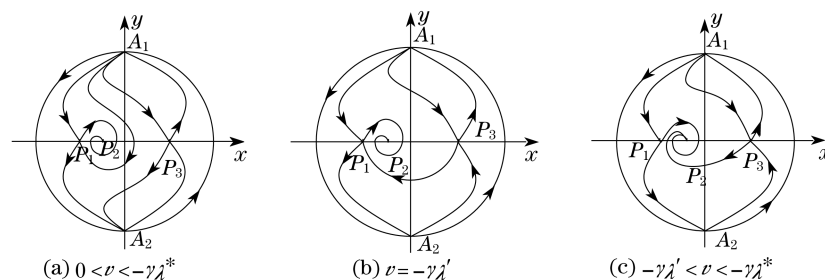
及轨线 $L(P_1, P_3), L(P_3, P_1), L(P_1, P_1)$ 和它周围的闭轨线外, 系统(5)的所有非周期轨线全部是无界的, 并且这些轨线上点的 x 坐标值和 y 坐标值也全部是无界的.

b. 当 $v>0$ 时, 除去奇点 $P_i (i=1, 2, 3)$ 及轨线 $L(P_1, P_2), L(P_3, P_2), L(P_3, P_{1,2}), L(P_3, P_1)$, 系

统(5)的所有非周期轨线全部是无界的, 并且这些轨线上点的 x 坐标值和 y 坐标值也全部是无界的.

以上命题证明类似于文献[24]中命题 2.2 的证明.

命题 3 a. 在 $v=0$ 情形. 当 $q=0$ 时, 系统(5)具有 2 条同宿轨 $L(P_1, P_3), L(P_3, P_1)$, 如图 1(a)

图5 系统(5)在 $q < 0, \Delta < 0, \Delta_2 < 0, \bar{A} < a < 1/2$ 情形下的全局相图Fig.5 Global phase portraits of system (5) in the case of $q < 0, \Delta < 0, \Delta_2 < 0, \bar{A} < a < 1/2$

所示;而当 $q < 0$ 时,系统(5)至多具有 1 条同宿轨 $L(P_1, P_1)$,如图 1(b)和图 1(c)所示.

b. 在 $v > 0$ 情形.当 $q = 0$ 时,系统(5)具有 2 条异宿轨 $L(P_i, P_2)$ ($i = 1, 3$),如图 2 所示;而当 $q < 0$ 时,系统(5)至多具有 2 条异宿轨 $L(P_3, P_{1,2})$ 或 $L(P_1, P_2)$ 或 $L(P_3, P_2)$ 或 $L(P_3, P_1)$,如图 3~5 所示.

由于平面动力系统的同宿轨和闭轨分别对应非线性发展方程中的钟状孤波解和周期行波解,而异宿轨对应振荡行波解或扭状孤波解等,故由命题 2 和命题 3 以及全局相图 1~5 可得定理 1.

定理 1 假设波速 V 与积分常数 g 满足 $27g^2 - 2V^3 \leq 0$,此时 $\Delta \leq 0$.

a. 在 $v = 0$ 情形.当 $q = 0$ 时,方程(2)具有 2 个扭状孤波解,对应图 1(a)中的异宿轨 $L(P_1, P_3)$, $L(P_3, P_1)$;当 $q < 0$ 时,方程(2)具有 1 个钟状孤波解,对应图 1(c)中的同宿轨 $L(P_1, P_1)$.

b. 在 $v > 0$ 情形.当 $q = 0$ 时,方程(2)具有 2 个有界行波解,其中,图 2(b)中异宿轨 $L(P_i, P_2)$ 分别对应于 2 个扭状孤波解,图 2(a)中异宿轨 $L(P_i, P_2)$ 分别对应 2 个振荡解 ($i = 1, 3$);当 $q < 0$ 时,方程(2)至多具有 2 个有界行波解,其中,图 3(b)和 3(c)中异宿轨 $L(P_3, P_{1,2})$,图 4 中异宿轨 $L(P_1, P_2)$,图 4(b)和图 5(b)中异宿轨 $L(P_3, P_1)$,图 4(d)中异宿轨 $L(P_3, P_2)$ 分别对应于 1 个扭状孤波解,图 4(c)中轨线 $L(P_3, P_2)$ 对应 1 个先减后增的有界行波解,图 5 中轨线 $L(P_1, P_2)$ 和图 5(c)中 $L(P_3, P_2)$ 对应 1 个振荡行波解.

3 方程(2)有界行波解的波形与耗散系数 v 之间的关系

讨论方程(2)有界行波解的性态与耗散系数 v 之间的关系.在假定 $\Delta \leq 0$ 下,方程 $f(x) = 0$ 有 3

个实根 x_1, x_2, x_3 ,不妨设 $x_1 \leq x_2 < x_3$,则方程(3)可等价于

$$u''(\xi) + \bar{v}u'(\xi) + \bar{b}(u(\xi) - x_1) \cdot (u(\xi) - x_2)(u(\xi) - x_3) = 0 \quad (10)$$

对方程(10)作变换 $U(\xi) = \frac{u(\xi) - x_1}{x_3 - x_1}$,得

$$U''(\xi) + \bar{v}'U'(\xi) + \bar{b}'U(\xi) \cdot (1 - U(\xi))(U(\xi) - a) = 0 \quad (11)$$

其中, $a = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$, $\bar{b}' = -\bar{b}(x_3 - x_1)^2$.

显然, $P'_1(0, 0)$, $P'_2(a, 0)$ 和 $P'_3(1, 0)$ 是方程(11)对应平面动力系统的奇点,其分别对应于系统(5)的奇点 $P_1(x_1, 0)$, $P_2(x_2, 0)$ 和 $P_3(x_3, 0)$.由于奇点的性质不随线性变换改变,故奇点 P'_i ($i = 1, 2, 3$) 与奇点 P_i ($i = 1, 2, 3$) 具有相同的性质.

由定性分析和命题 1 可知,方程(5)在 $\bar{v} > 0$ 的情形下不具有满足 $u(-\infty) = u(+\infty)$ 的有界解,只可能具有满足下列 3 种情况的有界解:

- (A) $u(-\infty) = x_1, u(+\infty) = x_2$
- (B) $u(-\infty) = x_3, u(+\infty) = x_2$
- (C) $u(-\infty) = x_3, u(+\infty) = x_1$

从而,相应的方程(11)就只可能具有满足下述情况的有界解:

- (A₁) $U(-\infty) = 0, U(+\infty) = a$
- (B₁) $U(-\infty) = 1, U(+\infty) = a$
- (C₁) $U(-\infty) = 1, U(+\infty) = 0$

记

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}), \lambda^* = 2\sqrt{a(1-a)\bar{b}'} \\ \lambda' &= \sqrt{2\bar{b}'}(\frac{1}{2} - a) \\ \lambda_0 &= \begin{cases} \frac{(a+1)\sqrt{\bar{b}'}}{\sqrt{2}}, & 0 \leq a \leq \frac{1}{3} \\ \lambda^*, & \frac{1}{3} < a \leq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

由所给假设和式(6)易知, $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$. 根据计算还易得: 当 $0 \leq a \leq \bar{A}$ 时, $\lambda^* \leq \lambda' \leq \lambda_0$; 当 $\bar{A} < a < \frac{1}{3}$ 时, $\lambda' < \lambda^* < \lambda_0$; 当 $\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{2}$ 时, $\lambda' < \lambda^* = \lambda_0$; 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $\lambda' = 0$, $\lambda^* = \lambda_0$. 根据文献[27-29]中的相关结果, 可以得到引理 1.

引理 1 a. 当 $\bar{v} \geq \lambda^*$ 且 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, 方程(11)有单调上升的解 $U(\xi)$, 满足情况(A₁);

b. 当 $\bar{v} \geq \lambda_0$ 且 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ 时, 方程(11)有单调下降的解 $U(\xi)$, 满足情况(B₁);

c. 当 $\bar{v} = \lambda'$ 且 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ 时, 方程(11)有唯一单调下降的有界解 $U(\xi)$, 满足情况(C₁);

d. 当 $0 < \bar{v} < \lambda^*$ 且 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, 方程(11)有振荡解 $U(\xi)$, 满足情况(A₁);

e. 当 $\lambda' < \bar{v} < \lambda^*$ 且 $\bar{A} < a \leq \frac{1}{2}$ 时, 方程(11)有振荡解 $U(\xi)$, 满足情况(B₁);

f. 当 $\max(\lambda', \lambda^*) < \bar{v} < \lambda_0$ 且 $0 < a < \frac{1}{3}$ 时, 方程(11)具有先单调递减后单调递增的有界解 $U(\xi)$, 本文将这种情况称为拟单调, 满足情况(B₁).

由于在本文的假设条件下, $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ 自然成立, 根据引理 1, 可得方程(2)在 $\Delta \leq 0$ 条件下行波解的波形与耗散系数 v 之间关系的定理 2.

定理 2 设波速 V 与积分常数 g 满足 $27g^2 - 2V^3 < 0$.

a. 当 $v \geq -\gamma\lambda^*$ 时, 方程(2)具有单调上升的扭状孤波解 $u(\xi)$, 对应图 2(b), 图 4 中轨线 $L(P_1, P_2)$; 当 $0 < v < -\gamma\lambda^*$ 时, 方程(2)具有振荡行波解 $u(\xi)$, 对应图 2(a), 图 5 中轨线 $L(P_1, P_2)$. 这里的 $u(\xi)$ 均满足 $u(-\infty) = x_1$ 和 $u(+\infty) = x_2$.

b. 当 $v \geq -\gamma\lambda_0$ 时, 方程(2)具有单调下降的扭状孤波解 $u(\xi)$, 对应图 2(b), 图 4(d) 中轨线 $L(P_3, P_2)$ 和图 3(c) 中轨线 $L(P_3, P_{1,2})$. 这里的 $u(\xi)$ 均满足 $u(-\infty) = x_3$ 和 $u(+\infty) = x_2$.

c. 当 $v = -\gamma\lambda'$ 时, 方程(2)具有唯一单调下降的扭状孤波解 $u(\xi)$, 对应于图 4(b), 图 5(b) 中轨线 $L(P_3, P_1)$ 和图 3(b) 中轨线 $L(P_3, P_{1,2})$. 这里 $u(\xi)$ 满足 $u(-\infty) = x_3$ 和 $u(+\infty) = x_1$.

d. 当 $-\gamma\lambda' < v < -\gamma\lambda^*$ 且 $\bar{A} < a \leq \frac{1}{2}$ 时, 方程

(2) 具有振荡行波解 $u(\xi)$, 对应于图 2(a), 5(c) 中轨线 $L(P_3, P_2)$. 这里 $u(\xi)$ 满足 $u(-\infty) = x_3$ 和 $u(+\infty) = x_2$.

e. 当 $-\gamma\max\{\lambda', \lambda^*\} < v < -\gamma\lambda_0$ 且 $0 < a < \frac{1}{3}$ 时, 方程(2)具有先减后增的有界行波解 $u(\xi)$, 对应于图 4(c) 中轨线 $L(P_3, P_2)$. 这里 $u(\xi)$ 满足 $u(-\infty) = x_3$ 和 $u(+\infty) = x_2$.

当 $q = 0$ 时, 有 $x_1 = -x_3$, $x_2 = 0$, $a = \frac{1}{2}$, 此时 $\lambda' = 0$. 故图 2(a) 中轨线 $L(P_3, P_2)$ 对应的条件等价于 $0 < v < -\gamma\lambda^*$.

进一步, 类似于文献[24]中定理 3.2 的证明, 可证明定理 2 中的振荡行波解具有衰减性. 以图 2(a) 中的振荡行波解为例给出定理 3. 为节省篇幅, 其证明省略.

定理 3 设波速 V 与积分常数 g 满足 $27g^2 - 2V^3 < 0$.

a. 当 $0 < v < -\gamma\lambda^*$ 时, 方程(2)对应于轨线 $L(P_1, P_2)$ 的振荡行波解 $u(\xi)$ 具有最大值点 $\hat{\rho}_1$, 使在 $\hat{\rho}_1$ 的左侧, $u(\xi)$ 具有单调递增性, 而在其右侧, $u(\xi)$ 具有衰减振荡性, 即在 ξ 轴上具有无穷可数个极大值点 $\hat{\rho}_i (i = 1, 2, \dots, +\infty)$ 和极小值点 $\check{\rho}_i (i = 1, 2, \dots, +\infty)$, 满足

$$-\infty < \dots < \hat{\rho}_1 < \check{\rho}_1 < \dots < \hat{\rho}_n < \check{\rho}_n < +\infty \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\rho}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \check{\rho}_n = +\infty$$

$$u(-\infty) < u(\check{\rho}_1) < \dots < u(\check{\rho}_n) < \dots < u(+\infty) < \dots < u(\hat{\rho}_n) < \dots < u(\hat{\rho}_1) \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(\hat{\rho}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(\check{\rho}_n) = u(+\infty)$$

并且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{\rho}_n - \hat{\rho}_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\check{\rho}_n - \check{\rho}_{n+1}) = \frac{-4\pi\gamma}{\sqrt{-4\gamma(6x_1^2 - V) - v^2}} \quad (15)$$

b. 当 $-\gamma\lambda' < v < -\gamma\lambda^*$ 时, 方程(2)对应于轨线 $L(P_3, P_2)$ 的振荡行波解 $u(\xi)$ 具有最小值点 $\check{\rho}_1$, 使在 $\check{\rho}_1$ 的左侧具有单调递减性, 而在其右侧具有衰减振荡性, 即在 ξ 轴上具有无穷可数个极大值点 $\hat{\rho}_i (i = 1, 2, \dots, +\infty)$ 和极小值点 $\check{\rho}_i (i = 1, 2, \dots, +\infty)$, 满足

$$\left. \begin{aligned} -\infty < \dots < \check{\rho}_1 < \hat{\rho}_1 < \dots < \check{\rho}_n < \hat{\rho}_n < +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\rho}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \check{\rho}_n = +\infty \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} u(\check{\rho}_1) < \dots < u(\check{\rho}_n) < \dots < u(+\infty) < \dots < \\ u(\hat{\rho}_n) < \dots < u(\hat{\rho}_1) < u(-\infty) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u(\hat{\rho}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(\check{\rho}_n) = u(+\infty) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

并且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{\rho}_n - \hat{\rho}_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\check{\rho}_n - \check{\rho}_{n+1}) = \frac{-4\pi\gamma}{\sqrt{-4\gamma(6x_3^2 - V) - v^2}} \quad (18)$$

因行波解 $u(\xi)$ 在 ξ 轴上作平行移动不改变波的形状和速度,故不失一般性,可设 $\hat{\rho}_1 = 0$ 或 $\check{\rho}_1 = 0$. 这样,定理3描述的衰减振荡解可由图6表示.

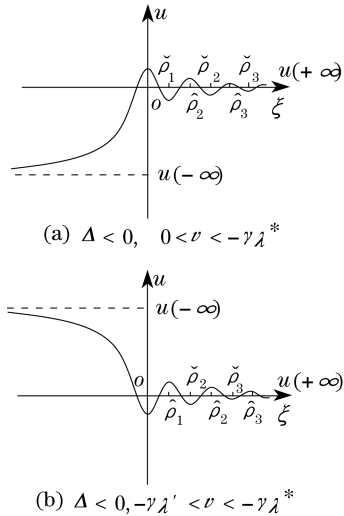


图6 衰减振荡解的波形图

Fig.6 Waveform chart of damped oscillatory solutions

由引理1、定理2和定理3可知, $-\gamma\lambda^*$ 起到了描述耗散作用大小临界值的作用. 当 $v \geq -\gamma\lambda^*$ 时, 行波解的波形呈现单调或拟单调的形式; 而当 $0 < v < -\gamma\lambda^*$ 时, 在 $q=0$ 情形下, 方程(2)的2个有界行波解都是衰减振荡的, 在 $q < 0$ 情形下, 方程(2)的1个有界行波解是衰减振荡的; 而当 $\bar{A} < a \leq \frac{1}{2}$, $-\gamma\lambda' < v < -\gamma\lambda^*$ 时, 方程(2)的2个有界行波解都是衰减振荡的.

现在来考察临界值 $\bar{v}_0 = -\gamma\lambda^*$.

$$\bar{v}_0 = -\gamma\lambda^* = -\gamma 2\sqrt{a(1-a)\bar{b}'} = 2\sqrt{(-\gamma)2(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)} =$$

$$2\sqrt{\gamma(6u_+^2 - V)} \neq 2\sqrt{\gamma(6u_-^2 - V)} = v_0 \quad (19)$$

故其与 Bikbaev 在文献[22]中提出的 v_0 是不一致的, 式(19)中 u_+ , u_- 分别是行波解 $u(\xi)$ 当 $\xi \rightarrow \pm\infty$ 时的渐近值.

4 方程(2)的孤波解和方程(2)的衰减振荡解的近似解

4.1 方程(2)的孤波解

根据文献[30]中有关定理, 可求得方程(2)有下列扭状孤波解和钟状孤波解.

命题4 设 $\gamma < 0$, 波速 V 和积分常数 g 满足 $27g^2 - 2V^3 \leq 0$, x_i ($i=1, 2, 3$) 是 $2x^3 - Vx - g = 0$ 的实解.

a. 若 $g=0$, 则 $v=0$ 时方程(2)有对称的扭状孤波解

$$u^\pm(\xi) = \pm \sqrt{\frac{V}{2}} \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2V}{\gamma}}\xi\right) \quad (20)$$

可以验证式(20)中 $u^\pm(\xi)$ 分别对应图1(a)中两条异宿轨 $L(P_1, P_3)$ 和 $L(P_3, P_1)$.

b. 若 $g > 0$, $27g^2 - 2V^3 < 0$, 则 $v=0$ 时方程(2)有钟状孤波解

$$u(\xi) = \frac{\frac{6x_1^2 - V}{\sqrt{V - 2x_1^2}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\gamma}(V - 6x_1^2)}\xi\right)}{2 - \left(1 + \frac{2x_1}{\sqrt{V - 2x_1^2}}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\gamma}(V - 6x_1^2)}\xi\right)} + x_1 \quad (21)$$

式(21)中 $u(\xi)$ 对应图1(c)中同宿轨 $L(P_1, P_1)$.

c. 设 $v^2 + 6\gamma V < 0$, 若 $x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6\gamma V + v^2}{3\gamma}} - \frac{v}{6\sqrt{-\gamma}}$ 或 $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6\gamma V + v^2}{3\gamma}} - \frac{v}{6\sqrt{-\gamma}}$ 是方程 $x^3 - \frac{V}{2}x - \frac{g}{2} = 0$ 的实根, 则方程(2)有扭状孤波解

$$u^+(\xi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6\gamma V + v^2}{3\gamma}} \cdot \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{6\gamma V + v^2}{3\gamma^2}}\xi\right) - \frac{v}{6\sqrt{-\gamma}} \quad (22a)$$

$$u^-(\xi) = -u^+(\xi) \quad (22b)$$

式(22a)中 $u^+(\xi)$ 对应图2和图4中异宿轨 $L(P_1, P_2)$. 式(22a)中 $u^+(\xi)$ 反映的是 $g > 0$ 情形下的解, 而式(22b)中 $u^-(\xi)$ 反映的是相应条件下 $g < 0$ 时的解.

d. 当 $v = 3\sqrt{-\gamma}(x_2 + x_3)$ 时, 方程(2)有扭状孤波解

$$u(\xi) = -\frac{x_3 - x_2}{2}.$$

$$\tanh\left[\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{\gamma}}(x_3 - x_2)\xi\right] + \frac{x_3 + x_2}{2} \quad (23)$$

式(23)中 $u(\xi)$ 对应图 2 和图 4 中异宿轨 $L(P_3, P_2)$.

e. 当 $v = -\gamma\lambda' = 3\sqrt{-\gamma}(x_1 + x_3)$ 时, 方程(2)有扭状孤波解

$$u(\xi) = \frac{x_3 - x_1}{1 + e^{\sqrt{-\frac{1}{\gamma}}(x_3 - x_1)\xi}} + x_1 = -\frac{x_3 - x_1}{2}.$$

$$\tanh\left[\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{\gamma}}(x_3 - x_1)\xi\right] + \frac{x_3 + x_1}{2} \quad (24)$$

式(24)中 $u(\xi)$ 对应图 3(b) 中异宿轨 $L(P_3, P_{1,2})$, 图 4(b) 和图 5(b) 中异宿轨 $L(P_3, P_1)$.

对于命题 4 需作如下说明:

a. 命题 4 的 c 和 d 中的式(22a)的 $u^+(\xi)$ 和式(23)的 $u(\xi)$ 分别对应图 2 和图 4 中异宿轨 $L(P_1, P_2)$ 和 $L(P_3, P_2)$. 只需验证式(22a)中的 $u^+(\xi)$ 满足 $\Delta_2 > 0$ 或 $v > -\gamma\lambda^*$. 实际上, 当 $x =$

$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6\gamma V + v^2}{3\gamma}} - \frac{v}{6\sqrt{-\gamma}}$ 是 $x^3 - \frac{V}{2}x - \frac{g}{2} = 0$ 的解

时, 可得到 $x^3 - \frac{V}{2}x - \frac{g}{2} = 0$ 的另外 2 个根为

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6\gamma V + v^2}{3\gamma}} - \frac{v}{6\sqrt{-\gamma}}, \quad \frac{v}{3\sqrt{-\gamma}}$$

按大小可依次把 3 个根记为 x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$). 由式(22a)可知, $u_- = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} u^+(\xi) = x_1, u_+ =$

$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} u^+(\xi) = x_2$, 有 $x_1 + x_2 = -\frac{v}{3\sqrt{-\gamma}}$, 即有

$$v = 3\sqrt{-\gamma}[-(x_1 + x_2)]$$

又临界值

$$\bar{v}_0 = -\gamma\lambda^* = -\gamma 2\sqrt{a(1-a)\bar{b}'} = 2\sqrt{(-\gamma)2(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$v^2 - \bar{v}_0^2 = (-\gamma)[9(x_1 + x_2)^2 - 8(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)] = (-\gamma)(x_1 + 5x_2)^2 > 0$$

即有 $v > \bar{v}_0 = -\gamma\lambda^*$. 故式(22a)中的 $u^+(\xi)$ 是耗散作用较大(即耗散满足 $v > \bar{v}_0 = -\gamma\lambda^*$)情况下的扭状孤波解, 且对应于图 2 中异宿轨 $L(P_1, P_2)$.

同理, 说明式(23)中的 $u(\xi)$ 是耗散系数满足 $v = 3\sqrt{-\gamma}(x_2 + x_3) > \bar{v}_0 = -\gamma\lambda^*$ 情况下的扭状孤波解, 且对应于图 2 中异宿轨 $L(P_3, P_2)$. 命题 4 中其它有关结论的说明可类似作出.

b. 对于图 4 中异宿轨 $L(P_3, P_2)$, 此时有 $v =$

$3\sqrt{-\gamma}(x_2 + x_3)$, 由 a 可知, $v = 3\sqrt{-\gamma}(x_2 + x_3) >$

$\bar{v}_0 = -\gamma\lambda^*$. 另一方面,

$$-\gamma\frac{(1+a)\sqrt{\bar{b}'}}{\sqrt{2}} = -\gamma\sqrt{-\frac{1}{\gamma}}(x_3 - x_1).$$

$$\left(1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\right) = \sqrt{-\gamma}(x_3 + x_2 - 2x_1) =$$

$$3\sqrt{-\gamma}(x_2 + x_3)$$

所以, 有 $v = -\gamma\frac{(1+a)\sqrt{\bar{b}'}}{\sqrt{2}}$, 进而据式(12)可得 $v \geq -\gamma\lambda_0$.

c. 根据文献[23], 判别方程(2)的相容性冲击

波是否为 Lax 冲击波的条件等价于 $-\frac{1}{2} \leq \frac{u_+}{u_-} < 1$,

其中, u_+, u_- 分别是相容性冲击波正、负方向的渐近值. 又由命题 4 可知, 在 $v > 0$ 的情形下, 方程(2)的有界行波解有式(22a)、式(23)和式(24), 其相容性冲击波的渐近值与有界行波解的渐近值是相同的. 由式(6)可知, $x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 x_2 x_3 = -q \geq 0$, 则在 $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ 且不同时为零的假定下, 有

$$x_1 < 0, \quad x_2 \leq 0, \quad x_3 > 0$$

(a) 在 $x_1 < x_2 < x_3$ 的情形下, 有

$$0 < \frac{x_2}{x_1} < 1, \quad -\frac{1}{2} < \frac{x_2}{x_3} < 0, \quad \frac{x_1}{x_3} < -\frac{1}{2}$$

(b) 在 $x_1 = x_2 < x_3$ 的情形下, 有 $x_3 = -2x_1$, 即有

$$x_1/x_3 = -1/2$$

结合(a), (b) 和 Lax 冲击波的条件可得, 在 $x_1 < x_2 < x_3$ 的情形下, 与图 2 和图 4 中异宿轨 $L(P_1, P_2), L(P_3, P_2)$ 相对应的相容性冲击波都是 Lax 冲击波, 与图 4(b) 和图 5(b) 中异宿轨 $L(P_3, P_1)$ 相对应的相容性冲击波不是 Lax 冲击波; 在 $x_1 = x_2 < x_3$ 的情形下, 与图 3(b) 中异宿轨 $L(P_3, P_{1,2})$ 相对应的相容性冲击波是 Lax 冲击波. 可以看出, 在 $\gamma < 0$ 时, 方程(2)既存在满足 Lax 熵条件的相容性冲击波, 也存在不满足 Lax 熵条件的相容性冲击波.

4.2 方程(2)的衰减振荡解的近似解

现要求出图 2(a)、图 5 中鞍-焦轨线对应的方程(2)的衰减振荡解的近似解. 不妨以图 2(a) 中鞍-焦轨线 $L(P_3, P_2)$ 对应的情形为例, 其余可用类似的方法求出.

根据平面动力系统理论可知, 图 2(a) 中鞍-焦轨线 $L(P_3, P_2)$ 是在耗散作用下(也就是耗散系数

v 满足 $0 < v < -\gamma\lambda^*$ 时),由图 1(a)中的鞍-鞍轨线 $L(P_3, P_1)$ 破裂而产生的,具有一部分是扭状、另一部分是衰减振荡状的结构,所以,方程(2)对应鞍-焦轨线 $L(P_3, P_2)$ 的衰减振荡解的非振荡部分可以用命题 4 的 a 中的扭状孤波解

$$u_1(\xi) = -\sqrt{\frac{V}{2}} \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2V}{\gamma}}\xi\right), \quad \xi \in (-\infty, \xi'_0] \quad (25)$$

来表示. $u_1(\xi)$ 是(20)式中 $u^-(\xi)$ 在 $(-\infty, \xi'_0]$ 上的部分,其中, $\xi'_0 \in (0, \frac{\pi}{B})$. 为了获得衰减振荡解的衰减振荡部分的近似表达式,选用下列形式的解

$$u(\xi) = e^{\beta\xi} (A_1 \cos(B\xi) - A_2 \sin(B\xi)) + C, \quad \xi \in (\xi'_0, +\infty) \quad (26)$$

式中, A_1, A_2, B, C, β 是待定系数.

之所以选用式(26),是因为式(26)既具有衰减性也具有振荡性,其中, $e^{\beta\xi}$ 具有衰减性, $A_1 \cos(B\xi) - A_2 \sin(B\xi)$ 具有振荡性.

将式(26)代入方程(3),略去含 $e^{\beta\xi}$ 的二次项和三次项(高阶无穷小量)后,可得

$$\left. \begin{aligned} B^2 &= \frac{-v^2 + 4\gamma(6C^2 - V)}{4\gamma^2} \\ \beta &= \frac{v}{2\gamma} \\ 2C^3 - VC - g &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

为了构造整个衰减振荡解的近似解,两部分的解还需满足对接条件.取对接条件为

$$\frac{d^i}{d\xi^i} u(\xi'_0) = \frac{d^i}{d\xi^i} u_1(\xi'_0), \quad i = 0, 1$$

即

$$\left. \begin{aligned} e^{\beta\xi'_0} (A_1 \cos(B\xi'_0) - A_2 \sin(B\xi'_0)) + x_2 &= u_1(\xi'_0) \\ \beta e^{\beta\xi'_0} (A_1 \cos(B\xi'_0) - A_2 \sin(B\xi'_0)) - \\ B e^{\beta\xi'_0} (A_1 \sin(B\xi'_0) + A_2 \cos(B\xi'_0)) &= u'_1(\xi'_0) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

由式(28)可知

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= e^{-\beta\xi'_0} [(u_1(\xi'_0) - x_2)(\cos(B\xi'_0) + \\ &\quad \frac{\beta}{B} \sin(B\xi'_0)) - \frac{1}{B} \sin(B\xi'_0) u'_1(\xi'_0)] \\ A_2 &= A_1 \cot(B\xi'_0) - \frac{(u_1(\xi'_0) - x_2)e^{-\beta\xi'_0}}{\sin(B\xi'_0)} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

当 $\xi \rightarrow +\infty$ 时,由于式(26)趋于 x_2 ,故 $C = x_2$. 进一步,由式(27)中第一式得

$$B^2 = \frac{-v^2 + 4\gamma(6x_2^2 - V)}{4\gamma^2} \quad (30)$$

因为,无论 B 取正还是负, $A_1 \cos(B\xi'_0) - A_2 \sin(B\xi'_0)$ 的值都是相同的,所以,后面一致地假设

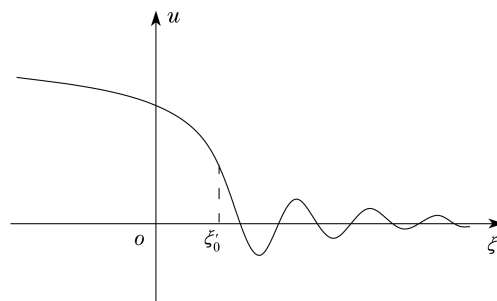


图7 对接点 ξ'_0 的位置

Fig.7 Location of the connective point ξ'_0

$B > 0$.

依照上面的方法,可以得到定理 4.

定理 4 设 $g = 0, V > 0, x_i$ 是 $2x^3 - Vx = 0$ 的实解, $x_1 < x_2 < x_3$, 则

a. 当 $0 < v < -\gamma\lambda^*$ 时,方程(2)有对应于图 2(a)中鞍-焦轨线 $L(P_3, P_2)$ 的衰减振荡解,它的近似解为

$$u(\xi) \approx \begin{cases} \sqrt{\frac{V}{2}} \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2V}{\gamma}}\xi\right), & \xi \in (-\infty, \xi'_0] \\ e^{\frac{\beta}{2}\xi} (A_1 \cos(B\xi) - A_2 \sin(B\xi)) + x_2, & \xi \in (\xi'_0, +\infty) \end{cases} \quad (31)$$

其中

$$B = \sqrt{\frac{-v^2 + 4\gamma(6x_2^2 - V)}{4\gamma^2}}, \quad \beta = \frac{v}{2\gamma}$$

A_1, A_2 由式(29)给出.

b. 当 $0 < v < -\gamma\lambda^*$ 时,方程(2)有对应于图 2(a)中鞍-焦轨线 $L(P_1, P_2)$ 的衰减振荡解,它的近似解为

$$u(\xi) \approx \begin{cases} \sqrt{\frac{V}{2}} \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2V}{\gamma}}\xi\right), & \xi \in (-\infty, \xi'_0] \\ e^{\frac{\beta}{2}\xi} (A_1 \cos(B\xi) - A_2 \sin(B\xi)) + x_2, & \xi \in (\xi'_0, +\infty) \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{\frac{-v^2 + 4\gamma(6x_2^2 - V)}{4\gamma^2}}, \quad \beta = \frac{v}{2\gamma} \\ A_1 &= e^{-\beta\xi'_0} [(u_2(\xi'_0) - x_2)(\cos(B\xi'_0) + \\ &\quad \frac{\beta}{B} \sin(B\xi'_0)) - \frac{1}{B} \sin(B\xi'_0) u'_2(\xi'_0)] \\ A_2 &= A_1 \cot(B\xi'_0) - \frac{(u_2(\xi'_0) - x_2)e^{-\beta\xi'_0}}{\sin(B\xi'_0)} \end{aligned}$$

$$u_2(\xi) = \sqrt{\frac{V}{2}} \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2V}{\gamma}}\xi\right), \quad \xi \in (-\infty, \xi'_0]$$

依照上面的讨论,可得定理 5 和定理 6.

定理 5 设 x_i 是 $2x^3 - Vx - g = 0$ 的实解,且 $x_1 < x_2 < x_3$, 则当 $-\gamma\lambda' < v < -\gamma\lambda^*$ 时,方程(2)有

对应于图 5(c) 中鞍-焦轨线 $L(P_3, P_2)$ 的衰减振荡解, 它的近似解为

$$u(\xi) \approx \begin{cases} -\frac{x_3 - x_1}{2} \tanh\left[\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{\gamma}}(x_3 - x_1)\xi\right] + \\ \frac{x_3 + x_1}{2}, \xi \in (-\infty, \xi'_0] \\ e^{\frac{\nu}{2\gamma}\xi}(A_1 \cos(B\xi) - A_2 \sin(B\xi)) + \\ x_2, \xi \in (\xi'_0, +\infty) \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{\frac{-\nu^2 + 4\gamma(6x_2^2 - V)}{4\gamma^2}}, \beta = \frac{\nu}{2\gamma} \\ A_1 &= e^{-\beta\xi'_0}[(u_3(\xi'_0) - x_2)(\cos(B\xi'_0) + \\ &\quad \frac{\beta}{B}\sin(B\xi'_0)) - \frac{1}{B}\sin(B\xi'_0)u'_3(\xi'_0)] \\ A_2 &= A_1 \cot(B\xi'_0) - \frac{(u_3(\xi'_0) - x_2)e^{-\beta\xi'_0}}{\sin(B\xi'_0)} \\ u_3(\xi) &= -\frac{x_3 - x_1}{2} \tanh\left[\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{\gamma}}(x_3 - \right. \\ &\quad \left. x_1)\xi\right] + \frac{x_3 + x_1}{2}, \xi \in (-\infty, \xi'_0] \end{aligned}$$

定理 6 设 x_i 是 $2x^3 - Vx - g = 0$ 的实解, 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 则当 $0 < \nu < -\gamma\lambda^*$ 时, 方程(2)有对应于图 5(c) 中鞍-焦轨线 $L(P_1, P_2)$ 的衰减振荡解, 它的近似解为

$$u(\xi) \approx \begin{cases} \frac{6x_1^2 - V}{\sqrt{V - 2x_1^2}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\gamma}}(V - 6x_1^2)\xi\right) + \\ 2 - \left(1 + \frac{2x_1}{\sqrt{V - 2x_1^2}}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\gamma}}(V - 6x_1^2)\xi\right) + \\ x_1, \xi \in (-\infty, \xi'_0] \\ e^{\frac{\nu}{2\gamma}\xi}(A_1 \cos(B\xi) - A_2 \sin(B\xi)) + x_2, \xi \in (\xi'_0, +\infty) \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{\frac{-\nu^2 + 4\gamma(6x_2^2 - V)}{4\gamma^2}}, \beta = \frac{\nu}{2\gamma} \\ A_1 &= e^{-\beta\xi'_0}[(u_4(\xi'_0) - x_2)(\cos(B\xi'_0) + \\ &\quad \frac{\beta}{B}\sin(B\xi'_0)) - \frac{1}{B}\sin(B\xi'_0)u'_4(\xi'_0)] \\ A_2 &= A_1 \cot(B\xi'_0) - \frac{(u_4(\xi'_0) - x_2)e^{-\beta\xi'_0}}{\sin(B\xi'_0)} \\ u_4(\xi) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{6x_1^2 - V}{\sqrt{V - 2x_1^2}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\gamma}}(V - 6x_1^2)\xi\right) + \\ &2 - \left(1 + \frac{2x_1}{\sqrt{V - 2x_1^2}}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\gamma}}(V - 6x_1^2)\xi\right) + \\ &x_1, \xi \in (-\infty, \xi'_0] \end{aligned}$$

方程(2)对应图 5(a) 和图 5(b) 中鞍-焦轨线

$L(P_1, P_2)$ 的衰减振荡解的近似解与图 5(c) 中鞍-焦轨线 $L(P_1, P_2)$ 的衰减振荡解的近似解一致.

为节省篇幅, 这里不加证明, 用类似文献[24]中方法可证: 以上所求衰减振荡解的近似解与其相应的精确解间的误差是以指数形式速降的无穷小量. 例如, 方程(2)对应图 2(a) 中鞍-焦轨线 $L(P_3, P_2)$ 的衰减振荡解的近似解式(31)与其精确解间的误差不超过 $\varepsilon(\xi) = T_3 e^{\frac{\nu}{2\gamma}\xi}$.

5 衰减振荡解的近似解关于对接点的稳定性

现研究衰减振荡解的近似解关于对接点的稳定性. 以图 2(a) 中鞍-焦轨线 $L(P_3, P_2)$ 对应的衰减振荡解的近似解式(31)为例, 其余可用类似的方法证明. 为清楚起见, 将以 ξ'_1 为对接点的衰减振荡解的近似解记为 $u(\xi, \xi'_1)$, 而将式(31)记为 $u(\xi, \xi'_0)$.

按照求解图 2(a) 鞍-焦轨线 $L(P_3, P_2)$ 对应的衰减振荡解的近似解式(31)的方法, 当对应的衰减振荡解的近似解以 $\xi'_1 \left(\xi'_1 \in \left(0, \frac{\pi}{B}\right) \right)$ 为对接点时, 在 $(-\infty, \xi'_1]$ 上仍可用式(25)近似代替(只需在式(25)中将 ξ 取值的区间用 $(-\infty, \xi'_1]$ 替换即可), 而在 $(\xi'_1, +\infty)$ 上对应于振荡部分的解采用如下形式:

$$u(\xi) = e^{\sigma\xi}(A_3 \cos(B_1\xi) - A_4 \sin(B_1\xi)) + C_1, \quad \xi \in (\xi'_1, +\infty) \quad (32)$$

将式(32)代入方程(3), 略去 $e^{\sigma\xi}$ 的高阶无穷小量后, 可得

$$\left. \begin{aligned} B_1^2 &= \frac{-\nu^2 + 4\gamma(6C_1 - V)}{4\gamma^2} \\ \sigma &= \frac{\nu}{2\gamma} \\ 2C_1^3 - VC_1 - g &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

当 $\xi \rightarrow +\infty$ 时, 由于式(32)趋于 x_2 , 故 $C_1 = x_2$.

同时, 对接条件为

$$\frac{d^i}{d\xi^i} u(\xi'_1) = \frac{d^i}{d\xi^i} u_1(\xi'_1), \quad i = 0, 1$$

这里仍用 $u_1(\xi)$ 表示式(20)中 $u^-(\xi)$ 在 $(-\infty, \xi'_1]$ 上的部分, 即

$$e^{\sigma\xi'_1}(A_3 \cos(B_1\xi'_1) - A_4 \sin(B_1\xi'_1)) + x_2 = u_1(\xi'_1)$$

$$\sigma e^{\sigma\xi'_1}(A_3 \cos(B_1\xi'_1) - A_4 \sin(B_1\xi'_1)) - B_1 e^{\sigma\xi'_1} \cdot (A_3 \sin(B_1\xi'_1) + A_4 \cos(B_1\xi'_1)) = u'_1(\xi'_1)$$

解之得

$$A_3 = e^{-\sigma\xi'_1}[(u_1(\xi'_1) - x_2)(\cos(B_1\xi'_1) +$$

$$\frac{\sigma}{B_1} \sin(B_1 \xi'_1) - \frac{1}{B_1} \sin(B_1 \xi'_1) u'_1(\xi'_1) \quad (34)$$

$$A_4 = A_3 \cot(B_1 \xi'_1) - \frac{(u_1(\xi'_1) - x_2) e^{-\sigma \xi'_1}}{\sin(B_1 \xi'_1)} \quad (35)$$

综上所述,选取一般的对接点 ξ'_1 的衰减振荡解的近似解的表达式为

$$u(\xi) \approx \begin{cases} -\sqrt{\frac{V}{2}} \tanh\left(\frac{1}{2\gamma} \sqrt{-\frac{2V}{\gamma}} \xi\right), \xi \in (-\infty, \xi'_1] \\ e^{\frac{\sigma}{2\gamma} \xi} (A_3 \cos(B_1 \xi) - A_4 \sin(B_1 \xi)) + x_2, \xi \in (\xi'_1, +\infty) \end{cases} \quad (36)$$

其中, A_3, A_4 分别由式(34)和式(35)给出.

$$B_1 = B = -\frac{1}{2\gamma} \sqrt{4\gamma(6x_2^2 - V) - v^2}, \sigma = \beta = \frac{v}{2\gamma}$$

为探求衰减振荡解的近似解式(31)关于对接点的稳定性,考察 $u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0)$.

a. 在 $\xi'_1 < \xi'_0$ 情形.

在 $(-\infty, \xi'_1)$ 上,

$$u(\xi, \xi'_1) = u(\xi, \xi'_0) = -\sqrt{\frac{V}{2}} \tanh\left(\frac{1}{2\gamma} \sqrt{-\frac{2V}{\gamma}} \xi\right)$$

在 $[\xi'_1, \xi'_0]$ 上,

$$u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0) = e^{\frac{\sigma}{2\gamma} \xi} (A_3 \cos(B_1 \xi) - A_4 \sin(B_1 \xi)) + x_2 - \left[-\sqrt{\frac{V}{2}} \tanh\left(\frac{1}{2\gamma} \sqrt{-\frac{2V}{\gamma}} \xi\right) \right] \quad (37)$$

由于 $\xi'_1 \leq \xi \leq \xi'_0$, $\xi'_1 \rightarrow \xi'_0$ 时必有 $\xi \rightarrow \xi'_0$, 又式(37)中 ξ'_1 和 ξ'_0 都属于 $(0, \frac{\pi}{B})$, 根据连续函数的性质,有 $A_3 \rightarrow A_1, A_4 \rightarrow A_2$ (当 $\xi'_1 \rightarrow \xi'_0$), 故得

$$\lim_{\xi'_1 \rightarrow \xi'_0} [u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0)] = e^{\frac{\sigma}{2\gamma} \xi} [A_1 \cos(B_1 \xi'_0) - A_2 \sin(B_1 \xi'_0)] + x_2 - u_1(\xi'_0) = 0 \quad (38)$$

于是, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 当 $-\delta_1 < \xi'_1 - \xi'_0 < 0$ 时, 在 $[\xi'_1, \xi'_0]$ 内

$$|u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (39)$$

在 $(\xi'_0, +\infty)$ 上,

$$u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0) = e^{\frac{\sigma}{2\gamma} \xi} [(A_3 - A_1) \cos(B\xi) - (A_4 - A_2) \sin(B\xi)] \quad (40)$$

b. 在 $\xi'_1 > \xi'_0$ 情形.

在 $(-\infty, \xi'_0)$ 上,

$$u(\xi, \xi'_1) = u(\xi, \xi'_0) = -\sqrt{\frac{V}{2}} \tanh\left(\frac{1}{2\gamma} \sqrt{-\frac{2V}{\gamma}} \xi\right)$$

在 $[\xi'_0, \xi'_1]$ 上,

$$u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0) = -\sqrt{\frac{V}{2}} \tanh\left(\frac{1}{2\gamma} \sqrt{-\frac{2V}{\gamma}} \xi\right) - [e^{\frac{\sigma}{2\gamma} \xi} (A_1 \cos(B\xi) - A_2 \sin(B\xi)) + x_2]$$

当 $\xi'_1 \rightarrow \xi'_0$ 时, 必有 $\xi \rightarrow \xi'_0$, 又因 $u_1(\xi)$ 是连续可微函数, 有

$$\lim_{\xi'_1 \rightarrow \xi'_0} [u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0)] = u_1(\xi'_0) - [e^{\frac{\sigma}{2\gamma} \xi} (A_1 \cos(B\xi'_0) - A_2 \sin(B\xi'_0)) + x_2] = 0 \quad (41)$$

即有 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$, 当 $0 < \xi'_1 - \xi'_0 < \delta_2$ 时, 在 $[\xi'_0, \xi'_1]$ 内

$$|u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (42)$$

在 $(\xi'_1, +\infty)$ 上, $u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0)$ 如表达式(40).

由 a 和 b 的讨论可知, 为考察 $|u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0)|$ 的大小, 可在 $[\xi'_1, \xi'_0]$ 及 $(\xi'_0, +\infty)$, 或在 $[\xi'_0, \xi'_1]$ 及 $(\xi'_1, +\infty)$ 上分别估计, 为明确起见, 不妨设 $\xi'_1 > \xi'_0$, 此时在 $(\xi'_0, +\infty)$ 上

$$|u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0)| \leq |u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0)|_{[\xi'_0, \xi'_1]} + |u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0)|_{(\xi'_1, +\infty)} \quad (43)$$

在式(43)的右半部中, 第一项表示 $u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0)$ 在 $[\xi'_0, \xi'_1]$ 的绝对值, 第二项表示 $u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0)$ 在 $(\xi'_1, +\infty)$ 的绝对值; 显然, 在 $(-\infty, \xi'_0]$ 上 $|u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0)| = 0$, 所以, 式(43)在 $(-\infty, +\infty)$ 上都成立. 根据式(40)可得

$$|u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0)|_{(\xi'_1, +\infty)} \leq |(A_3 - A_1) \cos(B\xi) - (A_4 - A_2) \sin(B\xi)| \leq \sqrt{(A_3 - A_1)^2 + (A_4 - A_2)^2} \quad (44)$$

$$\lim_{\xi'_1 \rightarrow \xi'_0} A_3 = e^{-\sigma \xi'_0} \left[(u(\xi'_0) - x_2) \left(\cos(B\xi'_0) + \frac{\sigma}{B} \sin(B\xi'_0) \right) - \frac{1}{B} \sin(B\xi'_0) u'(\xi'_0) \right] = A_1 \quad (45)$$

$$\lim_{\xi'_1 \rightarrow \xi'_0} A_4 = \lim_{\xi'_1 \rightarrow \xi'_0} \left[A_3 \cot(B\xi'_0) - \frac{(u(\xi'_0) - x_2) e^{-\sigma \xi'_0}}{\sin(B\xi'_0)} \right] = A_2 \quad (46)$$

由式(44)~(46)即可推知, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0$, 当 $0 < \xi'_1 - \xi'_0 < \delta'$ 时,

$$|u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0)|_{(\xi'_0, +\infty)} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (47)$$

由于在 $[\xi'_0, \xi'_1]$ 上, 有式(42)成立, 结合式(42)和式(47), 有 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \min(\delta_2, \delta') > 0$, 当 $0 < \xi'_1 - \xi'_0 < \delta$ 时,

$$|u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0)| < \varepsilon \quad (48)$$

用类似方法可证, 当 $\xi'_0 > \xi'_1$ 时, 有 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < \xi'_0 - \xi'_1 < \delta$ 时,

$$|u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0)| < \varepsilon \quad (49)$$

故定理4中式(31)表示的衰减振荡解(扭状头部振荡尾巴)关于对接点 ξ'_0 是稳定的.

又因对于 ξ'_0 领域内的对接点 ξ'_1 都有 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} u(\xi, \xi'_1) = x_2$, 而 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} u(\xi, \xi'_0) = x_2$, 从而有 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} |u(\xi, \xi'_1) - u(\xi, \xi'_0)| = 0$, 所以, 得衰减振荡解的近似解式(31)关于对接点 ξ'_0 还是渐近稳定的.

6 结论

利用平面动力系统理论、假设待定法和齐次化原理研究了色散项系数为负的 MKdV-Burgers 方程的有界行波解, 得到了该方程有界行波解存在的条件和个数的相关结论. 讨论了该方程有界行波解的波形与耗散系数之间的关系, 给出了表征耗散作用大小的临界值. 求出了该方程的钟状和扭状孤波解, 进一步根据衰减振荡解所对应的解轨线在全局相图中的演化关系, 求得了该方程的衰减振荡解的近似解. 文中给出了所求衰减振荡近似解与精确解的误差估计, 其误差是以指数形式速降的无穷小量. 最后, 证明了所求衰减振荡解的近似解关于对接点的稳定性.

值得指出的是:

a. 本文实际上给出了一个求解在耗散作用下非线性发展方程衰减振荡近似解的方法, 即对所研方程先作定性分析, 再求出无耗散作用情况下的解, 而后再根据衰减振荡对应的解轨线在相图中的演化关系求出衰减振荡解的近似解. 该方法还可应用于其它许多非线性发展方程衰减振荡近似解的求解.

b. 从本文、文献[22]和文献[24]的讨论可知, 方程(2)在色散系数 $\gamma < 0$ 和 $\gamma > 0$ 这两种情形的有界行波解有下列不同点: (a) 当耗散系数 $\nu = 0$ 时, 色散系数 $\gamma < 0$ 时的方程(2)既有钟状孤波解, 又有扭状孤波解, 而 $\gamma > 0$ 时的方程(2)只有钟状孤波解. (b) 当耗散系数 ν 较小时, 色散系数 $\gamma < 0$ 时的方程(2)既有钟状头部振荡尾巴、又有扭状头部振荡尾巴的衰减振荡解, 色散系数 $\gamma > 0$ 时的方程(2)只有钟状头部振荡尾巴的衰减振荡解. (c) 色散系数 $\gamma < 0$ 时方程(2)耗散作用大小的临界值为 $\bar{\nu}_0 = -\gamma\lambda^* = 2\sqrt{\gamma(6u_+^2 - V)}$, 而色散系数 $\gamma > 0$ 时方程(2)耗散作用大小的临界值为 $\nu_0 = 2\sqrt{\gamma(6u_-^2 - V)}$, 其中, u_+ , u_- 分别表示方程(2)的行波解在自变量趋于正、负无穷时的渐近值, V 表示行波的波速.

参考文献:

- [1] Wadati M. The modified Korteweg-de Vries equation [J]. J Phys Soc Japan, 1973, 34(5): 1289 - 1296.
- [2] Miura R M. Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation [J]. J Math Phys, 1968, 9(8): 1202 - 1204.
- [3] El-shamy E F. Dust-ion-acoustic solitary waves in a hot magnetized dusty plasma with charge fluctuations [J]. Chaos Solitons & Fractals, 2005, 25(3): 665 - 674.
- [4] Agrawal G P. Nonlinear fiber optics [M]. Boston: Academic Press, 1989.
- [5] Beals R, Deift P, Tomei C. Direct and inverse scattering on the line, mathematical surveys and monographs 28 [M]. Providence R I: Amer Math Soc, 1988.
- [6] Ginibre J, Tsutsumi Y. Existence and uniqueness of solutions for the generalized Korteweg-de Vries equation [J]. SIAM J Math Anal, 1989, 20(6): 1388 - 1425.
- [7] Kametaka Y. Korteweg-de Vries equation IV. Simplest generalization [J]. Proc Japan Acad, 1969, 45(8): 661 - 665.
- [8] Kato T. On the Korteweg-de Vries equation [J]. Manuscripta Math, 1979, 28(1/2/3): 89 - 99.
- [9] Kato T. On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation [J]. Adv Math Suppl, 1983, 8: 93 - 128.
- [10] Kruzhkov S N, Faminskii A V. Generalized solutions of the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation [J]. Math USSR Sb, 1984, 48(2): 391 - 421.
- [11] Tsutsumi M. On global solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation [J]. Publ Res Inst Math Sci, 1972, 7: 329 - 344.
- [12] Ohmura M. On the generalized soliton solutions of the modified Korteweg-de Vries equation [J]. Osaka J Math, 1974, 11(1): 61 - 71.
- [13] Tanaka S. Non-linear Schrödinger equation and modified Korteweg-de Vries equation; construction of solutions in terms of scattering data [J]. Publ Res Inst Math Sci, 1975, 10: 329 - 357.
- [14] 赵申琪, 徐宝智. MKdV 方程的反散射解 [J]. 高校应用数学学报, 1989, 4(3): 398 - 402.
- [15] Tanaka S. Some remarks on the modified Korteweg-de Vries equation [J]. Publ Res Inst Math Sci, 1972, 8(9): 429 - 437.

(下转第 222 页)