

Jaulent-Miodek 方程的 Painlevé 可积性及精确解

刘磊, 胡恒春, 高海潮
(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 利用基于 WTC 方法的 Kruskal 简化法判别了一类特殊的非线性耦合 Jaulent-Miodek 方程在三种情形下具有 Painlevé 可积性, 一种情形下不具有 Painlevé 可积性. 尽管 Jaulent-Miodek 方程在一种情形下不具有 Painlevé 可积性, 仍可以通过推广的 Painlevé 标准截断展开和 Painlevé 非标准截断展开方法求得非线性耦合 Jaulent-Miodek 方程行波形式的精确解.

关键词: Painlevé 可积性; Painlevé 标准截断展开; Jaulent-Miodek 方程; 精确解
中图分类号: O 175 **文献标志码:** A

Painlevé Integrability and Exact Solutions of the Jaulent-Miodek Equation

LIU Lei, HU Heng-chun, GAO Hai-chao
(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The Painlevé integrability of a special coupled Jaulent-Miodek equation was studied by using the Kruskal's simplification of WTC method. The following conclusion was obtained: the Jaulent-Miodek equation is of Painlevé integrability in three cases, and is of no Painlevé integrability in one case. Even though in that case, the equation is of no Painlevé integrability, new exact solutions of the coupled Jaulent-Miodek equation can be constructed by using the Painlevé standard and nonstandard truncation expansion.

Key words: Painlevé integrability; Painlevé standard truncation expansion; Jaulent-Miodek equation; exact solutions

孤立子理论是非线性科学的重要组成部分, 孤立子理论的研究对象大多数是非线性系统, 这些非线性偏微分方程能用来描述流体力学、等离子物理学、非线性光学及环境科学等领域出现的某些非线性现象. 因此, 对非线性偏微分方程精确解的研究在理论上和应用上都具有很重要的价值^[1-2]. 但是, 由

于叠加原理对非线性系统不再有效, 以致对于不同的非线性方程的求解方法也不尽相同. 近五十多年来, 经过数学家和理论物理学家的不懈努力, 提出了许多行之有效的构造非线性偏微分方程精确解的方法, 如反散射方法、贝克隆变换法、双线性法、分离变量法、达布变换法及李群方法等. 在这些方法当中,

收稿日期: 2013-06-07
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11201302, 11071164); 上海市重点学科建设资助项目(XTKX2012)
第一作者: 刘磊(1987-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 孤立子理论与可积系统. E-mail: liulei6854 @163.com

Painlevé 分析法已经被证明是最成功、应用最广泛的方法之一. 由 Weiss, Tabor 和 Carnevale 推广应用于偏微分方程的 Painlevé 分析法, 通常被称为 WTC 方法^[3]. 将 WTC 方法应用到非线性偏微分方程, 不仅可以直接检测该方程是否具有 Painlevé 可积性, 还可以通过 WTC 截断展开推导出非线性系统的其它重要结果, 如拉克斯对、双线性形式、贝克隆变换及施瓦茨形式等^[4-7]. 在应用 WTC 方法证明具有孤立子解的非线性偏微分方程是否具有 Painlevé 性质时, 计算过程非常复杂. 1984 年, Kruskal 等对 WTC 方法进行了简化, 将定义在奇异流形上的函数假设为其中一个变量的线性关系, 从而简化了计算过程. 后来, 为了得到非线性偏微分方程更多的精确解, Pickering^[8], Conte^[9] 和楼森岳^[10] 先后通过不同方法推广了 WTC 方法.

1 问题的提出

现主要研究由 Jaulent 和 Miodek 提出的一种特殊类型的非线性耦合偏微分方程^[11], 即 Jaulent-Miodek(JM)方程, 其形式为

$$\left. \begin{aligned} u_t + u_{xxx} + \frac{3}{2}vv_{xxx} + \frac{9}{2}v_xv_{xx} - \\ 6uu_x - 6uvv_x - \frac{3}{2}u_xv^2 = 0 \\ v_t + v_{xxx} - 6u_xv - 6uv_x - \frac{15}{2}v_xv^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

JM 方程涉及物理学许多分支, 如凝聚态物理学、流体动力学及光学等. 当 $u = u(x, t)$, $v = 0$ 时, 方程(1)就是 KdV 方程. 近年来, 许多学者利用多种方法得到 JM 方程的多种形式的精确解, 例如, 用 exp-函数法得到方程的周期解、tanh-coth 方法得到方程的孤子解、符号算法得到方程形如尖角状的奇异孤子解、F-函数法得到方程的行波解^[12-17]等. 本文首先利用 WTC 方法检验 JM 方程的 Painlevé 可积性, 然后采用 Painlevé 标准截断展开和非标准截断展开构造 JM 方程的精确解.

$$\Delta = \begin{bmatrix} (j-1)(j-2)(j-6)\phi_x^3\phi^{j-5} & 3ij(j-3)(j-6)\phi_x^4\phi^{j-5} \\ -12i(j-3)\phi_x^2\phi^{j-4} & (j-3)(j^2-3j+20)\phi_x^3\phi^{j-4} \end{bmatrix}$$

可得矩阵 Δ 的行列式值为

$$\det \Delta = (j+2)(j+1)(j-3) \cdot (j-4)(j-5)(j-6)\phi_x^6\phi^{2j-9} = 0$$

解得

$$j = -1, -2, 3, 4, 5, 6$$

2 验证 JM 方程的 Painlevé 性质

现利用基于 WTC 方法的 Kruskal 简化法证明 JM 方程是否具有 Painlevé 可积性.

首先, 对任意的奇异流形 $\phi(x, t) = 0$, $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$ 作如下的洛朗展开式:

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^{j+\alpha}, \quad v = \sum_{j=0}^{\infty} v_j \phi^{j+\beta} \quad (2)$$

其次, 令

$$u \sim u_0 \phi^\alpha, \quad v \sim v_0 \phi^\beta \quad (3)$$

将式(3)代入方程(1), 由领头项分析可得到如下 4 种情况:

$$\text{a. } \alpha = -2, \beta = -1, u_0 = 2\phi_x^2, v_0^2 = -4\phi_x^2 \quad (4)$$

$$\text{b. } \alpha = -2, \beta = -1, u_0 = \frac{3}{4}\phi_x^2, v_0^2 = -\phi_x^2 \quad (5)$$

$$\text{c. } \alpha = -2, \beta = -1, u_0 = 2\phi_x^2, v_0 = 0 \quad (6)$$

$$\text{d. } \alpha = -2, \beta = -1, u_0 = 0, v_0 = 0 \quad (7)$$

为了证明方程(1)是否具有 Painlevé 性质, 需要找出方程(1)的所有共振项, 并且需要验证所有共振项是否满足相容性条件. 不失一般性, 现给出第一种情况的具体分析过程.

2.1 考虑 $\alpha = -2, \beta = -1, u_0 = 2\phi_x^2, v_0^2 = -4\phi_x^2$ 时的共振项及相容性条件

第 1 步 采用求对称方程的方法求解共振项, 令

$$u \sim u_0 \phi^\alpha + u_j \phi^{j+\alpha}, \quad v \sim v_0 \phi^\beta + v_j \phi^{j+\beta} \quad (8)$$

将式(4)和式(8)代入方程(1), 得到函数 u_j, v_j 的递归关系式

$$\begin{aligned} (j-1)(j-2)(j-6)\phi_x^3\phi^{j-5}u_j + \\ 3ij(j-3)(j-6)\phi_x^4\phi^{j-5}v_j = F_{j-1} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} 1 - 2i(j-3)\phi_x^2\phi^{j-4}u_j + \\ (j-3)(j^2-3j+20)\phi_x^3\phi^{j-4}v_j = G_{j-1} \end{aligned} \quad (10)$$

其中, F_{j-1}, G_{j-1} 是仅依赖于 u_k, v_k ($k = 0, 1, 2, \dots, j-1$) 和 ϕ 导数的复杂函数. 从方程(9)和方程(10)能够得到关于 u_j, v_j 的系数矩阵

在 $j = -1$ 时, 共振项相应于展开函数 ϕ 的任意性; $j = -2$ 不符合共振项的定义, 故舍去.

第 2 步 检验 $j = 3, 4, 5, 6$ 时是否满足相容性条件.

在检查相容性条件之前, 根据 Kruskal 的简化

方法,取

$$\phi = x + \varphi(t) \quad (11)$$

式中, φ 是自变量只为 t 的函数.

由于共振项最大正整数是 $j = 6$, 所以, 有限截断展开式为

$$u = \sum_{j=0}^6 u_j \phi^{j-2}, \quad v = \sum_{j=0}^6 v_j \phi^{j-1} \quad (12)$$

将式(11)和式(12)代入方程(1), 依次比较 φ 的各次幂系数, 可得下面一系列表达式:

$$\begin{aligned} u_0 &= 2, v_0 = 2i, u_1 = v_1 = 0 \\ u_2 &= -\frac{1}{12}\varphi_t, v_2 = -\frac{1}{6}i\varphi_t, u_3 = 0, v_3 = v_3 \\ v_4 &= -v_{3x} - \frac{1}{114}i\varphi_t^2 + \frac{1}{2}iu_4 \\ u_5 &= \frac{1}{4}u_{4x} + \frac{5}{4}iv_{3xx} - \frac{5}{2}iv_5 + \frac{7}{24}i\varphi_t u_3 - \frac{1}{144}\varphi_{tt} \\ v_6 &= -\frac{4}{19}v_{5x} - \frac{7}{114}v_{3xxx} - \frac{1}{114}v_{3t} + \frac{15}{38}iv_3^2 + \\ &\quad \frac{3}{152}i\varphi_t u_4 - \frac{1}{12}v_{3x}\varphi_t - \frac{11}{32 \cdot 832}i\varphi_t^3 - \frac{1}{76}iu_{4xx} \end{aligned}$$

式中, v_3, u_4, v_5, u_6 都是任意函数, $i^2 = -1$.

将式(4)和上述计算结果代入相容性条件式(9)和式(10)中, 发现 4 个共振项完全满足自相容条件. 因此, JM 方程在第一种情况下具有 Painlevé 可积性.

类似地, 其它 3 种情形也可以利用相同方法验证方程(1)是否具有 Painlevé 性质. 本文省略上述计算的具体过程, 只给出其余 3 种情况的具体结果.

2.2 考虑当 $\alpha = -2, \beta = -1, u_0 = \frac{3}{4}\phi_x^2, v_0 = -\phi_x^2$

时的共振项及相容性条件

方程(1)所对应的有关 u_j, v_j 系数展开式的递推关系式为

$$(j-5)(j-4)(j-3)^2(j-1)(j+1) \cdot$$

$$\phi_x^6 \phi^{2j-9} u_j v_j = f_j(\phi_x, \phi_t, \dots, u_k, v_k) = f_j$$

式中, f_j 是仅依赖于 $u_k, v_k (k=0, 1, 2, \dots, j-1)$ 和 ϕ 导数的复杂函数.

不难看出, 所求的共振项为

$$j = -1, 1, 3, 3, 4, 5$$

在 $j = -1$ 时, 共振项仍对应于展开函数 ϕ 的任意性.

现给出 $j = 1, 3, 3, 4, 5$ 时所对应的共振条件.

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{3}{4}, v_0 = i, u_1 = u_1, v_1 = 2iu_1 \\ u_2 &= -u_{1x} + u_1^2, v_2 = -2iu_{1x} - 4iu_1^2 - \frac{1}{3}i\varphi_t \\ u_3 &= u_3, v_3 = v_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_4 &= -7u_{1x}^2 + 4u_1^4 + \frac{1}{12}\varphi_t^2 - \frac{3}{2}iv_{3x} - \\ &\quad 36u_1^2 u_{1x} - \frac{1}{3}u_{1x}\varphi_t + \frac{4}{3}u_1^2 \varphi_t - 2u_3 u_1 - \frac{3}{2}iv_4 - \\ &\quad 10u_1 u_{1xx} + \frac{1}{3}u_{1t} - u_{3x} - \frac{2}{3}u_{1xxx} - 4iu_1 v_3, \\ v_4 &= v_4 \\ v_5 &= -\frac{1}{5}iu_{3xx} + \frac{1}{90}i\varphi_{tt} - \frac{1}{15}iu_{1xxx} + \\ &\quad \frac{2}{15}iu_{1xt} + \frac{8}{5}u_{1x}v_3 + \frac{6}{5}u_1 v_{3x} - \frac{26}{5}iu_{1x}u_{1xx} - \\ &\quad \frac{2}{5}u_1 v_4 + \frac{28}{5}v_3 u_1^2 - \frac{28}{15}iu_1 u_{1x}\varphi_t - \frac{2}{5}v_{4x} - \\ &\quad \frac{34}{15}iu_1 u_{1xxx} - \frac{64}{5}iu_1^5 + \frac{2}{5}iu_5 - \frac{1}{3}iu_{1xx}\varphi_t - \\ &\quad \frac{84}{5}iu_1^2 u_{1xx} + \frac{4}{15}v_3 \varphi_t + \frac{8}{15}iu_1 u_{1t} - \frac{4}{5}iu_1 u_{3x} - \\ &\quad \frac{4}{5}iu_3 u_{1x} - \frac{2}{15}iu_3 \varphi_t - \frac{2}{45}iu_1 \varphi_t^2 - \frac{8}{5}iu_1^3 \varphi_t - \\ &\quad \frac{16}{5}iu_1^2 u_3 - \frac{136}{5}iu_1 u_{1x}^2 - \frac{224}{5}iu_1^3 u_{1x} + \frac{1}{10}v_{3xx} \\ u_5 &= u_5 \end{aligned}$$

式中, u_1, u_3, v_3, v_4, u_5 都是任意函数.

经计算, 共振项完全满足自相容条件, 故 JM 方程在第 2 种情况下具有 Painlevé 可积性. 通过重复运用上述方法, 可以证明当 $\alpha = -2, \beta = -1, u_0 = 2\phi_x^2, v_0 = 0$ 时方程(1)满足相容性条件, 具有 Painlevé 性质; 当 $\alpha = -2, \beta = -1, u_0 = 0, v_0 = 0$, $\phi = x + \varphi(t)$ 时, 方程(1)所对应的有关 u_j, v_j 系数展开式的递推关系式为

$$(j-4)(j-3)^2(j-2)^2(j-1)\phi_x^6 \phi^{2j-9} \cdot$$

$$u_j v_j = f_j(\phi_x, \phi_t, \dots, u_k, v_k) = f_j$$

式中, f_j 是仅依赖于 $u_k, v_k (\phi = 0, 1, 2, \dots, j-1)$ 和 ϕ 导数的复杂函数.

此时, $j = 4, 3, 3, 2, 2, 1$ 不满足共振项的要求. 因此, 方程(1)在式(7)下不具有 Painlevé 可积性.

3 JM 方程的精确解

通过分析检测可知 JM 方程在式(4)~(6)情况下具有 Painlevé 可积性, 尽管在式(7)的情况下 JM 方程不具有 Painlevé 可积性, 但是, 仍可以利用 Painlevé 截断展开求其精确解. 现按照 Conte 展开法给出 JM 方程的精确解. Conte 展开法的形式为

$$u = \sum_{j=0}^N U_j \xi^{j-2}, \quad v = \sum_{j=0}^{\infty} V_j \xi^{j-1} \quad (13)$$

式中, ξ 为任意函数, 且满足

$$\xi_x = \sum_{j=0}^N S_j \xi^j, \quad \xi_t = \sum_{j=0}^N C_j \xi^j \quad (14)$$

显然, 当 $N=2$ 时, 展开式(13)和式(14)为 Pickering 提出的不变展开形式. 不妨取 $N=2$, 令

$$\xi_{N=2} = g = \lambda - \chi, \quad \chi = \left(\frac{\phi_x}{\phi} - \frac{\phi_{xx}}{2\phi_x} \right)^{-1} \quad (15)$$

式中, λ 是任意常数; ϕ 为任意奇异流形.

当选择 $\lambda=0$ 时, 展开式(13)中的函数 ξ 被函数 χ 替换后得到的展开式恰好是常说的 Conte 展开式. 由式(15)可知

$$g_x = -1 + \frac{S}{2}(\lambda - g)^2$$

$$g_t = C - C_x(\lambda - g) + \frac{1}{2}(C_{xx} - CS)(\lambda - g)^2$$

式中

$$S = \frac{3}{2} \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x} \right)^2 - \frac{\phi_{xxx}}{\phi_x}, \quad C = -\frac{\phi_t}{\phi_x}$$

S 和 C 是 Möbius 变换下的不变量. 通过直接验证, 不难发现相容性条件, $g_{tx} = g_{xt}$.

当展开式(13)中的函数被函数 g 替换后, 对应的标准截断展开式为

$$u = \frac{U_0}{g^2} + \frac{U_1}{g} + U_2, \quad v = \frac{V_0}{g} + V_1$$

将标准截断展开式代入 JM 方程并提取所有各阶 g 的系数, 可以得到一系列复杂的由函数 $U_0, U_1, U_2, V_0, V_1, S$ 和 C 定义的表达式, 此时, 要想得到 JM 方程的精确解是很困难的. 然而, 如果仅仅是为了得到相对简单的孤子解, 可以将 S 和 C 选择为常数. 由此得到 2 组不同的非平凡解.

a. 第 1 组非平凡解.

$$U_0 = 2 - 2S\lambda^2 + \frac{1}{2}S^2\lambda^4, \quad U_1 = 2S\lambda - S^2\lambda^3$$

$$U_2 = \frac{3S^2\lambda^2 - S - C}{6}, \quad V_0^2 = -(S\lambda^2 - 2)^2$$

$$V_1 = -iS\lambda, \quad C = 2S$$

式中, S 为任意常数.

此时

$$g = \lambda + \sqrt{\frac{2}{S}} \tanh \left[\frac{\sqrt{2S}}{2} (-x + Ct - C_1) \right]$$

$$u = \frac{4 - 4S\lambda^2 + S^2\lambda^4}{2g^2} + \frac{2S\lambda - S^2\lambda^3}{g} + \frac{3S^2\lambda^2 - S - C}{6}$$

$$v = \frac{i(S\lambda^2 - 2)}{g} - iS\lambda$$

式中, C_1 为积分常数.

b. 第 2 组非平凡解.

$$C = -3iV_1S\lambda + \frac{3}{4}S^2\lambda^2 + \frac{S}{2} - 3V_1^2$$

$$U_0 = \frac{3(S\lambda^2 - 2)^2}{16}$$

$$U_1 = -\frac{1}{4}iV_1S\lambda^2 + \frac{1}{2}iV_1 - \frac{S^2\lambda^3}{4} + \frac{S\lambda}{2}$$

$$U_2 = \frac{1}{8}S^2\lambda^2 - \frac{1}{4}S - \frac{1}{4}V_1^2$$

$$V_0 = \frac{1}{2}i(S\lambda^2 - 2), \quad V_1 = V_1$$

式中, V_1, S, λ 为任意常数.

$$u = \frac{3(S\lambda^2 - 2)^2}{16g^2} - \frac{V_1iS\lambda^2 - 2iV_1 + S^2\lambda^3 - 2S\lambda}{4g} +$$

$$\frac{1}{8}S^2\lambda^2 - \frac{1}{4}S - \frac{1}{4}V_1^2$$

$$v = \frac{i(S\lambda^2 - 2)}{2g} + V_1$$

当展开式(13)中的函数被函数 g 替换后, 对应的非标准展开式为

$$u = \frac{U_0}{g^2} + \frac{U_1}{g} + U_2 + U_3g + U_4g^2$$

$$v = \frac{V_0}{g} + V_1 + V_2g$$

将非标准展开式代入 JM 方程并提取所有各阶 g 的系数, 同样得到一系列复杂的由函数 $U_0, U_1, U_2, V_0, V_1, S$ 和 C 定义的表达式, 这时求 JM 方程的精确解也相当困难. 为了简化计算, 依然将 S 和 C 选择成常数, 得到 5 组非平凡解.

a. 第 1 组非平凡解.

$$U_0 = \frac{1}{2}S^2\lambda^4 - 2S\lambda^2 + 2, \quad U_1 = -S\lambda(S\lambda^2 - 2)$$

$$U_2 = \frac{5}{4}\lambda^2S^2 - \frac{1}{6}C - \frac{5}{3}S, \quad U_3 = -\lambda S^2, \quad U_4 = \frac{1}{2}S^2$$

$$V_0 = i(S\lambda^2 - 2), \quad V_1 = -iS\lambda, \quad V_2 = iS, \quad C = 2S = \frac{4}{\lambda^2}$$

此时

$$u = \frac{1 - 12C_1\lambda h(x, t) + 4\lambda^2 C_1^2 h^2(x, t)}{\lambda^2 (1 + 2C_1\lambda h(x, t))^2}$$

$$v = \frac{-2i(2C_1\lambda h(x, t) - 1)}{\lambda(1 + 2C_1\lambda h(x, t))}, \quad h(x, t) = e^{\frac{-2(4t - x\lambda^2)}{\lambda^3}}$$

b. 第 2 组非平凡解.

$$C = \frac{3}{2}\lambda^2S^2 - S, \quad U_0 = \frac{3}{16}(S\lambda^2 - 2)^2$$

$$U_1 = -\frac{1}{4}S\lambda(S\lambda^2 - 2), \quad U_2 = \frac{1}{8}\lambda^2S^2 - \frac{1}{4}S$$

$$U_3 = -\frac{1}{4}S^2\lambda, \quad U_4 = \frac{3}{16}S^2, \quad V_0 = \frac{1}{2}i(S\lambda^2 - 2)$$

$$V_1 = 0, V_2 = \frac{1}{2}iS$$

$$u = \frac{3(S\lambda^2 - 2)^2}{16g^2} - \frac{S\lambda(S\lambda^2 - 2)}{4g} +$$

$$\frac{1}{8}\lambda^2 S^2 - \frac{1}{4}S - \frac{1}{4}S^2\lambda g + \frac{3}{16}S^2g^2,$$

$$v = \frac{i(S\lambda^2 - 2)}{2g} + \frac{1}{2}iSg$$

c. 第3组非平凡解.

$$C = 2S, U_0 = \frac{3(S\lambda^2 - 2)^2}{16}, U_1 = \frac{S\lambda(S\lambda^2 - 2)}{4}$$

$$U_2 = \frac{S(S\lambda^2 - 2)}{8}, U_3 = -\frac{S^2\lambda}{4}, U_4 = \frac{3S^2}{4}$$

$$V_0 = -\frac{i}{2}(S\lambda^2 - 2), V_1 = 0, V_2 = \frac{1}{2}iS$$

$$u = \frac{3(S\lambda^2 - 2)^2}{16g^2} + \frac{S\lambda(S\lambda^2 - 2)}{4g} +$$

$$\frac{S(S\lambda^2 - 2)}{8} - \frac{S^2\lambda g}{4} + \frac{3S^2}{4}g^2$$

$$v = -\frac{i(S\lambda^2 - 2)}{2g} + \frac{1}{2}iSg$$

d. 第4组非平凡解.

$$C = -3V_1^2 - 6V_1V_2\lambda - 6V_2^2\lambda^2 - 2iV_2, S = 2iV_2$$

$$U_0 = -\frac{3}{2}iV_2\lambda^2 - \frac{3V_2^2\lambda^4}{4} + \frac{3}{4}$$

$$U_1 = -\frac{1}{2}iV_1 + iV_2\lambda - \frac{V_1V_2\lambda^2}{2} + V_2^2\lambda^3$$

$$U_2 = -\frac{1}{2}iV_2 - \frac{V_1^2}{4} - \frac{V_2^3\lambda^2}{2}$$

$$U_3 = -\frac{1}{2}V_1V_2 + V_2^2\lambda, U_4 = -\frac{3V_2^2}{4}$$

$$V_0 = i + V_2\lambda^2, V_1 = V_1, V_2 = V_2$$

$$u = \frac{3 - 3V_2^2\lambda^4 - 6iV_2\lambda^2}{4g^2} -$$

$$\frac{iV_1 - 2iV_2\lambda + V_1V_2\lambda^2 - V_2^2\lambda^3}{2g} - \frac{1}{2}iV_2 -$$

$$\frac{V_1^2}{4} - \frac{V_2^3\lambda^2}{2} + (V_2^2\lambda - \frac{1}{2}V_1V_2)g + -\frac{3V_2^2}{4}g^2$$

$$v = \frac{i + V_2\lambda^2}{g} + V_1 + V_2g$$

式中 V_1, V_2 是任意常数.

e. 第5组非平凡解.

$$C = \frac{28}{27\lambda^2}, S = \frac{2}{9\lambda^2}, U_0 = \frac{16}{27}, U_1 = 0, U_2 = -\frac{1}{27\lambda^2}$$

$$U_3 = -\frac{4}{81\lambda^3}, U_4 = \frac{2}{81\lambda^4}, V_0 = \frac{8}{9}i, V_1 = -\frac{2i}{9\lambda}$$

$$V_2 = \frac{2i}{9\lambda^2}, u = \frac{16}{27g^2} - \frac{1}{27\lambda^2} - \frac{4g}{81\lambda^3} + \frac{2g^2}{81\lambda^4}$$

$$v = \frac{8i}{9g} - \frac{2i}{9\lambda} + \frac{2ig}{9\lambda^2}$$

式中, λ 为任意非零常数.

显然,通过标准截断展开和非标准截断展开得到的精确解不同.

4 结 论

借助 Weiss, Tabor 和 Carnevale 提出的 Painlevé 分析法检测了 JM 方程的 Painlevé 可积性,并利用标准截断展开和非标准截断展开构造了 JM 方程的精确解.接下来要考虑的问题是如何通过其它求解方法,如点李变换、CK 直接法来构造 JM 方程新的精确解,以及检测整个 JM 方程族是否具有 Painlevé 可积性,这将是作者今后研究工作的一个重要内容.

参考文献:

- [1] 张玲,桑本文,胡恒春.耦合 MKdV 系统的非奇异正子解、负子解及复子解[J].上海理工大学学报,2012,34(1):76-80.
- [2] 张卫国,东春彦.广义组合 KdV 方程与广义组合 KdV-Burgers 方程孤波解的条件稳定性[J].上海理工大学学报,2006,28(4):307-316.
- [3] Weiss J, Tabor M, Carnevale G. The Painlevé property for partial differential equations [J]. Journal of Mathematical Physics, 1983, 24(3):522-527.
- [4] Estévez P G, Gordoa P R. Darboux transformations via Painlevé analysis[J]. Inverse Problems, 1997, 13(3):939-957.
- [5] Estévez P G, Hernández G A. Non-isospectral problem in (2+1) dimensions[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2000, 33(10):2131-2143.
- [6] Hu H C, Liu Q P. New Darboux transformation for Hirota-Satsuma coupled KdV system [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2003, 17(5):921-928.
- [7] Alagesan T, Uthayakumar A, Porsezian K. Painlevé analysis and Bäcklund transformation for a three-dimensional Kadomtsev-Petviashvili equation [J]. Chaos Solitons and Fractals, 1997, 8(6):893-895.
- [8] Pickering A. A new truncation in Painlevé analysis [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1993, 26(17):4395-4405.
- [9] Conte R. Invariant Painlevé analysis of partial differential equations[J]. Physics Letters A, 1989, 140(7):383-390.

- [10] Lou S Y. Extended Painlevé expansion, nonstandard truncation and special reductions of nonlinear evolution equations[J]. Zeitschrift für Naturforschung A, 1998, 53(8): 251 – 258.
- [11] Jaulent M, Miodek I. Nonlinear evolution equations associated with energy-dependent Schrödinger potentials [J]. Letters in Mathematical Physics, 1976, 1(3): 243 – 250.
- [12] Wazwaz A M. The tanh-coth and the sech methods for exact solutions of the Jaulent-Miodek equation [J]. Physics Letters A, 2007, 366(1): 85 – 90.
- [13] He J H, Zhang L N. Generalized solitary solution and compacton-like solution of the Jaulent-Miodek equations using the Exp-function method [J]. Physics Letters A, 2008, 372(7): 1044 – 1047.
- [14] 杜兴华. 用试探方程法求 Jaulent-Miodek 方程的新的精确行波解[J]. 数学的实践与认识, 2010, 40(6): 204 – 208.
- [15] 冯大河, 李继彬. Jaulent-Miodek 方程的行波解分支 [J]. 应用数学和力学, 2007, 28(8): 894 – 900.
- [16] Fan E G. Uniformly constructing a series of explicit exact solutions to nonlinear equations in mathematical physics [J]. Chaos Solitons and Fractals, 2003, 16(5): 819 – 839.
- [17] Kavitha L, Sathishkumar P, Nathiyaa T, et al. Cusp-like singular soliton solutions of Jaulent-Miodek equation using symbolic computation [J]. Physica Scripta, 2009, 79(3): 035403, 1 – 5.

(编辑: 石 瑛)

(上接第 216 页)

- [16] 李华兵, 黄兵花, 刘慕仁, 等. 用格子 Boltzmann 方法模拟 MKdV 方程 [J]. 物理学报, 2001, 50(5): 837 – 840.
- [17] 唐驾时, 刘铸永, 李学平. MKdV 方程的拟小波解 [J]. 物理学报, 2003, 52(3): 522 – 525.
- [18] 石玉仁, 郭鹏, 吕克璞, 等. 修正 Jacobi 椭圆函数展开法及其应用 [J]. 物理学报, 2004, 53(10): 3265 – 3269.
- [19] Zakharov V E, Manakov S V, Novikov S P, et al. Theory of solitons; the inverse problem [M]. Moskva; Nauka, 1980.
- [20] Bekir A. On travelling wave solutions to combined KdV-mKdV equation and modified Burgers-KdV equation [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2009, 14(4): 1038 – 1042.
- [21] Feng Z S. On travelling wave solutions to modified Burgers-Korteweg-de-Vries equation [J]. Phys Lett A, 2003, 318(6): 522 – 525.
- [22] Bikbaev R F. Shock waves in the modified Korteweg-de-Vries-Burgers equation [J]. J Nonlinear Sci, 1995, 5(1): 1 – 10.
- [23] Jacobs D, McKinney B, Shearer M. Travelling wave solutions of the modified Korteweg-deVries-Burgers Equation [J]. J Differential Equations, 1995, 116(2): 448 – 467.
- [24] 张卫国, 徐晋, 李想, 等. MKdV-Burgers 方程衰减振荡解的近似解和误差估计 [J]. 上海理工大学学报, 2012, 34(5): 409 – 418.
- [25] Nemytskii V V, Stepanov V V. Qualitative theory of differential equations [M]. New York: Dover, 1989.
- [26] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1985.
- [27] Aronson D G, Weinberger H F. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics [J]. Advances in Mathematics, 1978, 30(1): 33 – 76.
- [28] Fife P C. Mathematical aspects of reacting and diffusing systems [M]. New York: Springer-Verlag, 1979.
- [29] 叶其孝, 李正元. 反应扩散方程引论 [M]. 北京: 科学出版社, 1990.
- [30] Zhang W G, Chang Q S, Jiang B G. Explicit exact solitary-wave solutions for compound KdV-type and compound KdV Burgers-type equations with nonlinear term of any order [J]. Chaos Solitons and Fractals, 2002, 13(2): 311 – 319.

(编辑: 石 瑛)