

分担小函数的整函数唯一性

侯 彬, 王新利
(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 针对整函数与其导数在不同条件下分担值或小函数的唯一性, 研究了整函数与其导数分担小函数的唯一性问题, 将整函数与其导数分担有限值的唯一性定理推广到分担小函数, 得到整函数 3 种可能的形式.

关键词: 整函数; 分担小函数; 唯一性

中图分类号: O 174.52 **文献标志码:** A

Uniqueness of Entire Function Sharing a Small Function with Its Derivatives

HOU Bin, WANG Xin-li
(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: For the uniqueness of sharing finite values or small functions under different condition between entire function and its derivatives, the problem of entire function sharing small function with its derivatives was studied. The finite value was replaced by small function to improve the uniqueness theory, and three possible forms about entire function were provided.

Key words: entire function; small function sharing; uniqueness

1 主要结果

设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为开平面内的两个非常数整函数, a 为一有穷复数, 称 $f(z)$ 与 $g(z)$ 以 a 为 IM 分担值, 是指 $f(z) - a$ 与 $g(z) - a$ 的零点相同; 称 $f(z)$ 与 $g(z)$ 以 a 为 CM 分担值, 是指 $f(z) - a$ 与 $g(z) - a$ 的零点相同且零点的重数也相同.

采用 Nevanlinna 理论^[1] 常用符号: $T(r, f)$,

$m(r, f), N(r, f), S(r, f)$, 其中 $S(r, f) = o(T(r, f))$, 当 $r \rightarrow \infty$ 时, 可能除去一个测度有穷的集合. $a(z)$ 称为 f 的小函数是指 $T(r, a) = S(r, f)$.

1977 年, Rubel^[2] 证明了若 f 与 f' CM 分担两个有穷复数, 则 f 与 f' 恒等. Yang^[3] 研究了 f 与 $f^{(k)}$ CM 分担两个有限值, 得到 $f \equiv f^{(k)}$. Li 等^[4] 对函数分担有限值作了进一步研究. 另一方面, 将函数与其导数分担有限值推广到分担小函数成为唯一性理论研究的重要课题, 并取得了许多成果, 如文献[5-6]. 同时, 对 f 与 $f', f^{(k)} (k \geq 2)$ 分担有限值或小函

收稿日期: 2013-07-05
第一作者: 侯 彬(1987-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 复分析. E-mail: qinglang1987@sina.cn
通讯作者: 王新利(1975-), 女, 讲师. 研究方向: 复分析. E-mail: xlwang602@163.com

数问题的研究也取得了很多结果.

定理 1^[7] 设 f 是非常数整函数, a 是一个有穷复数. 如果 f 和 f' 分担 a , 当 $f(z) = a$ 时, $f'(z) = a$, 则 $f(z) \equiv f'(z)$.

定理 2^[8] 设 f 为非常数整函数, a 是有穷值, $n (\geq 2)$ 是正整数. 如果 f, f' 与 $f^{(n)}$ CM 分担 a , 则 $f(z) = be^{cz} + a - a/c$, b, c 是非零常数, 且 $c^{n-1} = 1$.

定理 3^[9] 设 f 为非常数整函数, a 是一个有穷值, $k (\geq 2)$ 是正整数, 如果 f 与 f' CM 分担 a , 当 $f(z) = a$ 时, $f^{(k)}(z) = a$, 则 $f(z) = Ae^{\lambda z} + a - a/\lambda$, $\lambda^{k-1} = 1$.

常建明等^[10-11]将定理 1 和定理 2 推广到小函数. Li 等^[12]将定理 3 推广到小函数, 并得到 f 的 3 种可能的形式.

王建平^[9]研究得到以下分担有限值的唯一性定理:

定理 4 设 f 是非常数整函数, a 是一个非零有限值, n 和 m 均是正整数, 且 $m > n$. 如果 f 与 f' CM 分担 a , $f(z) = a \Rightarrow f^{(m)}(z) = f^{(n)}(z) = a$, 则 $f(z) = Ae^{\lambda z} + a - a/\lambda$, 其中 $A (\neq 0)$, λ 是常数, 且有 $\lambda^{n-1} = 1, \lambda^{m-1} = 1$.

考虑, 定理 4 中的有限值 a 能否被小函数 $a(z)$ 代替, 本文研究了分担小函数情况, 并得

定理 5 设 f 是非常数整函数, a 是有限级亚纯函数, 满足 $T(r, a) = S(r, f)$, n, m 均是正整数, $m > n \geq 2$. 如果 f 与 f' CM 分担 a , 当 $f(z) = a$ 时, $f^{(m)}(z) = f^{(n)}(z) = a$, 则 f 为以下其中一种形式:

a. $f(z) = a + c \exp\{\int_0^z e^{a(t)} dt\}$, $a' = a$, c 是非零常数, a 为整函数;

b. $f(z) = \lambda e^{cz} + a - a/c$, a 是常数, λ, c 是非零常数, 且有 $c^{m-n} = 1$;

c. $f(z) = \lambda e^z$, λ 是非零常数.

2 定理 5 的证明

由定理条件, $f(z)$ 与 $f'(z)$ CM 分担 a , 得

$$f'(z) - a = e^{\alpha} (f(z) - a) \quad (1)$$

其中, α 是整函数.

(a) $a' = a$. 由式(1), 得

$$f(z) = a + c \exp\{\int_0^z e^{\alpha(t)} dt\}$$

其中, c 为常数; α 为整函数.

(b) $a' \equiv a$. 令 $g = f - a$, 则 $g' = f' - a'$, 由

式(1), 得

$$g' = e^{\alpha} g + a - a' \quad (2)$$

令

$$\varphi = \frac{(a - a')g^{(n)} - (a - a^{(n)})g'}{g} \quad (3)$$

$$\psi = \frac{(a - a')g^{(m)} - (a - a^{(m)})g'}{g} \quad (4)$$

由式(2)可知, g 的 $k (\geq 2)$ 重零点 $a - a'$ 的 $k - 1$ 重零点, 因此

$$N_{(2)}(r, \frac{1}{g}) \leq 2N(r, \frac{1}{a - a'}) \leq$$

$$2T(r, a - a') = S(r, f)$$

由式(3)可得 g 的单零点不是 $\varphi(z)$ 的极点, 故有 $N(r, \varphi) = S(r, f)$. 由对数导数引理得到, $m(r, \varphi) = S(r, f)$, 所以 $T(r, \varphi) = S(r, f)$. 类似方法可得, $T(r, \psi) = S(r, f)$. 令

$$P_1 = e^{\alpha}, Q_0 = a - a'$$

则式(2)可改写为

$$g' = P_1 g + Q_0 \quad (5)$$

对式(5)两端求 $k - 1$ 阶导, 并通过数学归纳法, 得

$$g^{(k)}(z) = P_k(e^{\alpha})g(z) + Q_{k-1}(e^{\alpha}), k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

其中, $P_k(e^{\alpha}), Q_k(e^{\alpha})$ 是关于 e^{α} 的 k 次多项式, 满足

$$P_{k+1}(e^{\alpha}) = P_k(e^{\alpha})e^{\alpha} + (P_k(e^{\alpha}))', k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

$$Q_k(e^{\alpha}) = (a - a')P_k(e^{\alpha}) + (Q_{k-1}(e^{\alpha}))', k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

由式(3)和式(6), 得

$$(P_n(e^{\alpha}) - \frac{(a - a^{(n)})e^{\alpha}}{a - a'} - \frac{\varphi}{a - a'})g = -Q_{n-1}(e^{\alpha}) + a - a^{(n)} \quad (9)$$

由式(4)和式(6), 得

$$(P_m(e^{\alpha}) - \frac{(a - a^{(m)})e^{\alpha}}{a - a'} - \frac{\psi}{a - a'})g = -Q_{m-1}(e^{\alpha}) + a - a^{(m)} \quad (10)$$

对于式(9), 当 $P_n(e^{\alpha}) - \frac{(a - a^{(n)})e^{\alpha}}{a - a'} - \frac{\varphi}{a - a'} \equiv 0$

时, 由参考文献[12]可知, 这种情况不成立. 同样的,

对于式(10), 当 $P_m(e^{\alpha}) - \frac{(a - a^{(m)})e^{\alpha}}{a - a'} - \frac{\psi}{a - a'} \equiv 0$

时也不成立. 所以

$$P_n(e^{\alpha}) - \frac{(a - a^{(n)})e^{\alpha}}{a - a'} - \frac{\varphi}{a - a'} \equiv 0 \quad (11)$$

$$P_m(e^{\alpha}) - \frac{(a - a^{(m)})e^{\alpha}}{a - a'} - \frac{\psi}{a - a'} \equiv 0 \quad (12)$$

由式(9)和式(11),得

$$-Q_{n-1}(e^a) + a - a^{(n)} \equiv 0 \quad (13)$$

由式(10)和式(12),得

$$-Q_{m-1}(e^a) + a - a^{(m)} \equiv 0 \quad (14)$$

由式(13)和式(14),由参考文献[12]证明方法可得, e^a 是非零常数.令 $e^a = c, b = a - a'$,由式(7),得

$$P_k(c) = P_{k-1}(c)c = P_{k-2}(c)c^2 = \cdots = P_1 c^{k-1} = c^k$$

又由式(8),得

$$Q_k(e^a) = bP_k(e^a) + (bP_{k-1}(e^a))' + \cdots + (bP_1(e^a))(k-1) + b^{(k)}, (k=1,2,\cdots) \quad (15)$$

将 $e^a = c, P_k = c^k$ 代入式(15),得

$$Q_k(c) = bc^k + b'c^{k-1} + \cdots + b^{(k-1)}c + b^{(k)} \quad (16)$$

因为 $a - a^{(n)} = (a - a') + (a' - a'') + \cdots + (a^{(n-1)} - a^{(n)}) = b + b' + \cdots + b^{(n-1)}$,再由式(13)和式(16),得

$$b(c^{n-1} - 1) + b'(c^{n-2} - 1) + \cdots + b^{(n-2)}(c - 1) = 0 \quad (17)$$

由式(14)和式(16),得

$$b(c^{m-1} - 1) + b'(c^{m-2} - 1) + \cdots + b^{(m-2)}(c - 1) = 0 \quad (18)$$

将 $e^a = c, b = a - a'$ 代入式(2)得 $b = g' - cg$.将该结果分别代入式(17)和式(18),得

$$(c-1) \sum_{k=1}^{n-1} g^{(k)} - c(c^{n-1} - 1)g = 0 \quad (19)$$

$$(c-1) \sum_{k=1}^{m-1} g^{(k)} - c(c^{m-1} - 1)g = 0 \quad (20)$$

由式(19)和式(20),得

$$(c-1) \sum_{k=n}^{m-1} g^{(k)} - c(c^{m-1} - c^{n-1})g = 0 \quad (21)$$

同理,将 $b = a - a'$ 分别代入式(17)和式(18),得

$$(c-1) \sum_{k=n}^{m-1} c^{m-1-k} a^{(k)} - (c^{m-1} - c^{n-1})a = 0 \quad (22)$$

当 $c \neq 1$ 时,解微分方程式(21),得

$$g = \sum_{j=0}^{k_1-1} c_{1,j} z^j e^{\lambda_1 z} + \sum_{j=0}^{k_2-1} c_{2,j} z^j e^{\lambda_2 z} + \cdots + \sum_{j=0}^{k_t-1} c_{t,j} z^j e^{\lambda_t z}$$

其中, $\lambda_i (i=1,2,\cdots,t)$ 是特征方程 $\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \cdots + \lambda^n = \frac{c(c^{m-1} - c^{n-1})}{c-1}$ 的根, $c_{i,j} (i=1,2,\cdots,t)$ 是任意常数.设每个特征根的重数分别对应为 $k_i (i=1,2,\cdots,t)$,满足 $k_1 + k_2 + \cdots + k_t = m-1$.此时

g 是指数型函数;同理,解微分方程式(22)可得, a 是指数型函数.因为 a 是 g 的小函数,故 a 是非零常数.由式(22)得, $c^{m-1} = c^{n-1}$,即 $c^{m-n} = 1$,再由式(1)得, $f(z) = \lambda e^{cz} + a - a/c$,其中 λ 是非零常数, $c^{m-n} = 1$.

当 $c=1$ 时,由式(1)得, $f=f'$,因此 $f(z) = \lambda e^z, \lambda$ 是非零常数.

定理5证明完毕.

参考文献:

- [1] Hayman W K. Meromorphic function [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.
- [2] Rubel, Yang C C. Values shared by an entire function and its derivative[J]. Lecture Notes in Mathematics, 1977(599):101-103.
- [3] Yang L Z. Entire functions that share finite value with their derivatives[J]. Bull Austral Math Soc, 1990, 41(3):337-342.
- [4] Li P, Yang C C. When an entire function and its linear polynomial share two values[J]. Illinois Journal of Mathematics, 2000, 44(2):349-362.
- [5] Zhang J L. Entire functions sharing a small function with their derivatives[J]. Computational Methods and Function Theory, 2009, 9(2):379-389.
- [6] Wang J, Li X M. The uniqueness of an entire function sharing a small entire function with its derivatives[J]. J Math Anal Appl, 2009(354):478-489.
- [7] Jank G, Mues E, Volkman L. Meromorphe funktionen die mit ihrer ersten und zweiten Ableitung einen endlichen Wert teilen[J]. Complex Variables Theory and Appl Ication, 1986, 6(1):51-71.
- [8] Li P, Yang C C. Uniqueness theorems on entire functions and their derivatives[J]. J Math Anal Appl, 2001, 253(1):50-57.
- [9] Wang J P, Yi H X. Entire functions that share one value CM with derivatives [J]. J Math Appl, 2003, 277(1):155-163.
- [10] Chang J M, Fang M L. Uniqueness of entire functions [J]. J Math Anal Appl, 2003, 288(1):97-111.
- [11] Chang J M, Fang M L. Entire functions that share a small function with their derivatives[J]. Complex Var Theory Appl, 2004, 49(12):871-895.
- [12] Li P, W W J. Entire function that share a small function with its derivative [J]. J Math Appl, 2007, 328(1):743-751.

(编辑:金虹)