

基于梯形直觉模糊数的 TOPSIS 多属性决策方法

周晓辉, 姚 俭, 吴天魁

(上海理工大学 管理学院, 上海 200093)

摘要: 针对属性值为梯形直觉模糊数的多准则决策问题,给出了一种基于梯形直觉模糊数的 TOPSIS 多属性决策方法.根据提出的梯形直觉模糊数的 Hamming 距离公式,计算各方案和梯形直觉模糊数正负理想方案的距离,从而求得各方案和正理想解的相对贴近度,基于贴近度大小对方案集进行排序.最后,用数值实例进一步说明了该梯形直觉模糊 TOPSIS 方法的有效性和实用性.

关键词: 多属性决策; 梯形直觉模糊数; Hamming 距离; TOPSIS 方法

中图分类号: C 934 **文献标志码:** A

Multi-attribute Decision-making Based on Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Numbers TOPSIS Method

ZHOU Xiao-hui, YAO Jian, Wu Tian-kui

(Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: For multi-attribute decision-making problems, in which the values of attributes are trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers, a method of TOPSIS multi-attribute decision making based on trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers was proposed. A Hamming distance formula for trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers was defined. By this Hamming distance formula the distances between each program and the positive ideal-solution as well as the negative ideal-solution of the trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers were calculated. The relative closeness to the ideal-solution of alternatives was acquired and the ranking of the alternatives set was conducted by comparing the relative closeness of alternatives. The result of a numerical example further illustrates the practicality and efficiency of the new extended TOPSIS method.

Key words: multi-attribute decision-making; trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers; Hamming distance; TOPSIS method

社会经济生活中,存在大量的多属性决策 (multiple attribute decision making, MCDM) 问题,在实际决策中由于备选方案的复杂性和不确定性及

信息的模糊性,决策者往往很难做出准确的决策,因此对含有多属性的备选方案进行合理准确的排序已成为决策领域研究的热点. Atanassov^[1-2] 提出的直

收稿日期: 2013-05-27

第一作者: 周晓辉(1987-),男,硕士研究生.研究方向:系统工程、模糊决策理论与应用、模糊系统理论.

E-mail: zxhappy521g@163.com

通讯作者: 姚 俭(1960-),男,教授.研究方向:智能控制、模糊系统理论、系统工程、模糊决策理论与应用.

E-mail: yaojian@usst.edu.cn

觉模糊集是模糊集的扩展,它比模糊集在处理模糊性和不确定性方面更具有灵活性和实用性.当前,直觉模糊数引起了越来越多的学者关注. Park 等^[3]将 TOPSIS 方法和直觉模糊集相结合提出了基于直觉模糊集的 TOPSIS 方法. 张茂军等^[4]提出了带有三角直觉模糊数的多属性 TOPSIS 方法,为解决直觉模糊多属性决策提供了新途径. 王坚强等^[5]定义了直觉梯形模糊数的距离公式和直觉梯形模糊数的加权算子,提出一种基于直觉梯形模糊数的信息不完全确定的多准则决策方法. 万树平等^[6]从几何角度利用重心的概念来定义期望值和预期得分,给出了梯形直觉模糊数的排序方法以及有序加权集成和混合集成算子,并提出了多属性群决策的直觉梯形模糊数法. 张伟竞等^[7]将直觉梯形模糊数得分函数和投影模型结合进行多属性决策. TOPSIS 方法是由 Hwang 和 Yoon^[8]提出的一种重要的 MCDM 方法,目前很少见到将 TOPSIS 方法和梯形直觉模糊数相结合处理 MCDM 问题. 因此,本文主要研究目的是基于梯形直觉模糊数提出一种新的 TOPSIS 方法,用于解决属性值是梯形直觉模糊数的 MCDM 问题.

1 梯形直觉模糊数

定义 1^[1,9-10] 设 X 为一非空集合,则称 $\tilde{a} = \{(x, \mu_{\tilde{a}}(x), \nu_{\tilde{a}}(x)) | x \in X\}$ 为 X 上的直觉模糊集,其中 $\mu_{\tilde{a}}(x), \nu_{\tilde{a}}(x)$ 分别为 X 中元素 x 属于 $\tilde{a}$ 的隶属度和非隶属度,即 $\mu_{\tilde{a}}(x): X \rightarrow [0, 1], x \in X \rightarrow \mu_{\tilde{a}}(x) \in [0, 1], \nu_{\tilde{a}}(x): X \rightarrow [0, 1], x \in X \rightarrow \nu_{\tilde{a}}(x) \in [0, 1]$,且满足条件 $0 \leq \mu_{\tilde{a}}(x) + \nu_{\tilde{a}}(x) \leq 1$,任意 $x \in X$.

另 $\pi_{\tilde{a}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{a}}(x) - \nu_{\tilde{a}}(x)$ 为犹豫函数,其值越小代表模糊数越确定. 例如 $[\mu_{\tilde{a}}(x), \nu_{\tilde{a}}(x)] = [0.5, 0.3]$,在投票模型中可解释为 10 人中有 5 人赞成,3 人反对,2 人弃权.

定义 2^[9-10] 设 $\tilde{a} = \langle (a_L, a_1, a_2, a_U); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 上的一个直觉模糊集,其隶属函数和非隶属函数分别为

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a_L}{a_1 - a_L} w_{\tilde{a}}, & a_L \leq x < a_1 \\ w_{\tilde{a}}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_U - x}{a_U - a_2} w_{\tilde{a}}, & a_2 < x \leq a_U \\ 0, & x < a_L, x > a_U \end{cases} \quad (1)$$

和

$$\nu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{a_1 - x + u_{\tilde{a}}(x - a_L)}{a_1 - a_L}, & a_L \leq x < a_1 \\ u_{\tilde{a}}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{x - a_2 + u_{\tilde{a}}(a_U - x)}{a_U - a_2}, & a_2 < x \leq a_U \\ 1, & x < a_L, x > a_U \end{cases} \quad (2)$$

式中, $w_{\tilde{a}}$ 和 $u_{\tilde{a}}$ 分别表示 $\tilde{a}$ 的最大隶属度和最小非隶属度,且满足条件 $0 \leq w_{\tilde{a}} \leq 1, 0 \leq u_{\tilde{a}} \leq 1$ 和 $0 \leq w_{\tilde{a}} + u_{\tilde{a}} \leq 1$,则称 $\tilde{a}$ 为梯形直觉模糊数,曲线图如图 1 所示. 梯形直觉模糊数 $\tilde{a} = \langle (a_L, a_1, a_2, a_U); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle$ 表示闭区间 $[a_1, a_2]$ 的近似范围,即模糊量 $\tilde{a}$ 用介于 a_L, a_U 之间的任意实数表示. 其中, a_L 表示模糊量 $\tilde{a}$ 的最小值, a_U 表示模糊量 $\tilde{a}$ 的最大值,且每个实数具有不同的隶属度和非隶属度. 模糊量 $\tilde{a}$ 最可能的值是闭区间 $[a_1, a_2]$ 上的任意实数,其中, a_1, a_2 分别表示模糊量 $\tilde{a}$ 最可能值的最小值与最大值,其隶属度和非隶属度分别为 $w_{\tilde{a}}$ 和 $u_{\tilde{a}}$. 模糊量 $\tilde{a}$ 最不可能的值是 a_L, a_U ,其隶属函数和非隶属函数分别为 0 和 1,在开区间 (a_L, a_U) 内的任意值 x 的隶属函数与非隶属函数分别为 $\mu_{\tilde{a}}(x)$ 和 $\nu_{\tilde{a}}(x)$.

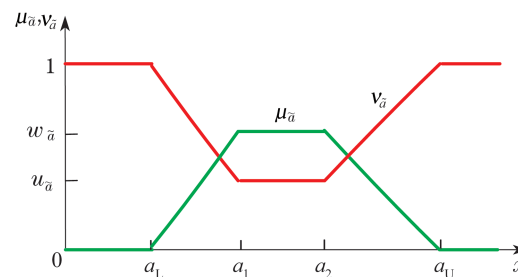


图 1 梯形直觉模糊数曲线图

Fig.1 Trapezoidal intuitionistic fuzzy number graph

显然,当 $w_{\tilde{a}} = 1$ 和 $u_{\tilde{a}} = 0$ 时, $\mu_{\tilde{a}}(x) + \nu_{\tilde{a}}(x) = 1$,则梯形直觉模糊数 $\tilde{a} = \langle (a_L, a_1, a_2, a_U); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle$ 退化为 $\tilde{a} = \langle (a_L, a_1, a_2, a_U); 1, 0 \rangle$,这正是模糊集理论中定义的梯形模糊数. 因此,梯形直觉模糊数是梯形模糊数的推广,而梯形模糊数是梯形直觉模糊数的特殊情况.

文献[9]中定义的梯形直觉模糊数的运算法则如定义 3 所示.

定义 3^[9] 设 $\tilde{a} = \langle (a_L, a_1, a_2, a_U); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle$ 和 $\tilde{b} = \langle (b_L, b_1, b_2, b_U); w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{b}} \rangle$ 为两个梯形直觉模糊数. 其中, b_1, b_2 分别表示模糊量 $\tilde{b}$ 最可能值的最小值与最大值; b_L 表示模糊量 $\tilde{b}$ 的最小值; b_U 表示模糊量 $\tilde{b}$ 的最大值; $\gamma \neq 0$ 是任意实数,则

$$\tilde{a} + \tilde{b} = \langle (a_L + b_L, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_U + b_U); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle \quad (3)$$

$$\tilde{a} - \tilde{b} = \langle (a_L - b_L, a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_U - b_U); w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle \quad (4)$$

$$\tilde{a} \times \tilde{b} = \begin{cases} \langle (a_L b_L, a_1 b_1, a_2 b_2, a_U b_U); \\ w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle (\tilde{a} > 0, \tilde{b} > 0) \\ \langle (a_L b_U, a_1 b_2, a_2 b_1, a_U b_L); \\ w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle (\tilde{a} < 0, \tilde{b} > 0) \\ \langle (a_U b_U, a_2 b_2, a_1 b_1, a_L b_L); \\ w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle (\tilde{a} < 0, \tilde{b} < 0) \end{cases} \quad (5)$$

$$\tilde{a} \div \tilde{b} = \begin{cases} \langle (a_L/b_U, a_1/b_2, a_2/b_1, a_U/b_L); \\ w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle (\tilde{a} > 0, \tilde{b} > 0) \\ \langle (a_U/b_U, a_2/b_2, a_1/b_1, a_L/b_L); \\ w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle (\tilde{a} < 0, \tilde{b} > 0) \\ \langle (a_U/b_L, a_2/b_1, a_1/b_2, a_L/b_U); \\ w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle (\tilde{a} < 0, \tilde{b} < 0) \end{cases} \quad (6)$$

$$\gamma \tilde{a} = \begin{cases} \langle (\gamma a_L, \gamma a_1, \gamma a_2, \gamma a_U); \\ w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle (\gamma > 0) \\ \langle (\gamma a_U, \gamma a_2, \gamma a_1, \gamma a_L); \\ w_{\tilde{a}} \wedge w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{a}} \vee u_{\tilde{b}} \rangle (\gamma < 0) \end{cases} \quad (7)$$

$$\tilde{a}^{-1} = \langle (1/a_U, 1/a_2, 1/a_1, 1/a_L); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle \quad (8)$$

两个梯形直觉模糊数相乘和相除的结果并不一定是梯形直觉模糊数. 但是为了计算方便, 此处仍将梯形直觉模糊数相乘和相除的结果用梯形模糊数近似地表示.

定理 1^[9-10] 设 $d: F(X) \times F(X) \rightarrow [0, 1]$ 是一映射, 若对任意直觉模糊数 $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in F(X)$, 如果 $d(\tilde{a}, \tilde{b})$ 满足以下条件, 则 $d(\tilde{a}, \tilde{b})$ 为直觉梯形模糊数 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{b}$ 之间的距离.

a. $0 \leq d(\tilde{a}, \tilde{b}) \leq 1, d(\tilde{a}, \tilde{b}) = 0$ 当且仅当 $\tilde{a} = \tilde{b}$;

b. $d(\tilde{a}, \tilde{b}) = d(\tilde{b}, \tilde{a})$;

c. $d(\tilde{a}, \tilde{b}) \leq d(\tilde{a}, \tilde{c}) + d(\tilde{c}, \tilde{b})$.

定理 2 设 $\tilde{a} = \langle (a_L, a_1, a_2, a_U); w_{\tilde{a}}, u_{\tilde{a}} \rangle$ 和 $\tilde{b} = \langle (b_L, b_1, b_2, b_U); w_{\tilde{b}}, u_{\tilde{b}} \rangle$ 为两个梯形直觉模糊数, 则直觉梯形模糊数 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{b}$ 之间的 Hamming 距离为

$$d(\tilde{a}, \tilde{b}) = \frac{1}{8} \left\{ \left| (1+w_{\tilde{a}}-u_{\tilde{a}})a_L - (1+w_{\tilde{b}}-u_{\tilde{b}})b_L \right| + \left| (1+w_{\tilde{a}}-u_{\tilde{a}})a_1 - \right. \right.$$

$$\left. (1+w_{\tilde{b}}-u_{\tilde{b}})b_1 \right| + \left| (1+w_{\tilde{a}}-u_{\tilde{a}})a_2 - (1+w_{\tilde{b}}-u_{\tilde{b}})b_2 \right| + \left| (1+w_{\tilde{a}}-u_{\tilde{a}})a_U - (1+w_{\tilde{b}}-u_{\tilde{b}})b_U \right| \} \quad (9)$$

证明 显然 $d(\tilde{a}, \tilde{b})$ 满足条件 a 和 b, 下面只需证明 $d(\tilde{a}, \tilde{b})$ 满足条件 c, 对直觉梯形模糊数 $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$, 根据式(9), 可得到

$$\begin{aligned} d(\tilde{a}, \tilde{b}) &= \frac{1}{8} \left\{ \left| (1+w_{\tilde{a}}-u_{\tilde{a}})a_L - (1+w_{\tilde{b}}-u_{\tilde{b}})b_L \right| + \right. \\ &\quad \left| (1+w_{\tilde{a}}-u_{\tilde{a}})a_1 - (1+w_{\tilde{b}}-u_{\tilde{b}})b_1 \right| + \\ &\quad \left| (1+w_{\tilde{a}}-u_{\tilde{a}})a_2 - (1+w_{\tilde{b}}-u_{\tilde{b}})b_2 \right| + \\ &\quad \left. \left| (1+w_{\tilde{a}}-u_{\tilde{a}})a_U - (1+w_{\tilde{b}}-u_{\tilde{b}})b_U \right| \right\} = \\ &\frac{1}{8} \left\{ \left| (1+w_{\tilde{a}}-u_{\tilde{a}})a_L - (1+w_{\tilde{c}}-u_{\tilde{c}})c_L + \right. \right. \\ &\quad \left. (1+w_{\tilde{c}}-u_{\tilde{c}})c_L - (1+w_{\tilde{b}}-u_{\tilde{b}})b_L \right| + \\ &\quad \left| (1+w_{\tilde{a}}-u_{\tilde{a}})a_1 - (1+w_{\tilde{c}}-u_{\tilde{c}})c_1 + \right. \\ &\quad \left. (1+w_{\tilde{c}}-u_{\tilde{c}})c_1 - (1+w_{\tilde{b}}-u_{\tilde{b}})b_1 \right| + \\ &\quad \left| (1+w_{\tilde{a}}-u_{\tilde{a}})a_2 - (1+w_{\tilde{c}}-u_{\tilde{c}})c_2 + \right. \\ &\quad \left. (1+w_{\tilde{c}}-u_{\tilde{c}})c_2 - (1+w_{\tilde{b}}-u_{\tilde{b}})b_2 \right| + \\ &\quad \left| (1+w_{\tilde{a}}-u_{\tilde{a}})a_U - (1+w_{\tilde{c}}-u_{\tilde{c}})c_U + \right. \\ &\quad \left. (1+w_{\tilde{c}}-u_{\tilde{c}})c_U - (1+w_{\tilde{b}}-u_{\tilde{b}})b_U \right| \} \leq \\ &\frac{1}{8} \left\{ \left| (1+w_{\tilde{a}}-u_{\tilde{a}})a_L - (1+w_{\tilde{c}}-u_{\tilde{c}})c_L \right| + \right. \\ &\quad \left| (1+w_{\tilde{c}}-u_{\tilde{c}})c_L - (1+w_{\tilde{b}}-u_{\tilde{b}})b_L \right| + \\ &\quad \left| (1+w_{\tilde{a}}-u_{\tilde{a}})a_1 - (1+w_{\tilde{c}}-u_{\tilde{c}})c_1 \right| + \\ &\quad \left| (1+w_{\tilde{c}}-u_{\tilde{c}})c_1 - (1+w_{\tilde{b}}-u_{\tilde{b}})b_1 \right| + \\ &\quad \left| (1+w_{\tilde{a}}-u_{\tilde{a}})a_2 - (1+w_{\tilde{c}}-u_{\tilde{c}})c_2 \right| + \\ &\quad \left| (1+w_{\tilde{c}}-u_{\tilde{c}})c_2 - (1+w_{\tilde{b}}-u_{\tilde{b}})b_2 \right| + \\ &\quad \left| (1+w_{\tilde{a}}-u_{\tilde{a}})a_U - (1+w_{\tilde{c}}-u_{\tilde{c}})c_U \right| + \\ &\quad \left. \left| (1+w_{\tilde{c}}-u_{\tilde{c}})c_U - (1+w_{\tilde{b}}-u_{\tilde{b}})b_U \right| \right\} = \\ &d(\tilde{a}, \tilde{c}) + d(\tilde{c}, \tilde{b}) \end{aligned}$$

故 $d(\tilde{a}, \tilde{b})$ 满足条件 c 得证.

定理 2 中的 Hamming 距离具有以下两个重要性质:

a. 设 $\tilde{a}, \tilde{b}$ 为两个梯形直觉模糊数, 则当 $d(\tilde{a}, \tilde{b})$ 趋于 0 时, 模糊数 $\tilde{a}$ 接近于模糊数 $\tilde{b}$;

b. 若 $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ 均为梯形直觉模糊数, 则 $\tilde{a}$ 比 $\tilde{b}$ 更接近于 $\tilde{c}$ 的充要条件是 $d(\tilde{a}, \tilde{c}) < d(\tilde{b}, \tilde{c})$.

在 n 维空间内, 欧氏距离表示两点之间最短线

的长度,是两点之间的真实距离,但其有明显的缺点.它将事物的不同属性(即各指标或各变量)之间的差别等同看待,这一点并不能满足实际要求.而 Hamming 距离则表示具有多种因素的两事物的靠近程度,综合考虑了事物的属性差异,是一种模糊性的度量,更符合实际要求.

2 梯形直觉模糊数 TOPSIS 原理

应用 TOPSIS 方法研究属性值为梯形直觉模糊数的多属性决策问题.设由 m 个方案 A_i 组成的方案集 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, 每个方案由 n 个属性 X_j 进行评价,记属性集为 $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. 假设方案 $A_i \in A (i = 1, 2, \dots, m)$ 关于属性集 $X_j \in X (j = 1, 2, \dots, n)$ 的评价值表示为梯形直觉模糊数 $\tilde{a}_{ij} = \langle (a_{Lij}, a_{1ij}, a_{2ij}, a_{Uij}); w_{\tilde{a}_{ij}}, u_{\tilde{a}_{ij}} \rangle$, 上述直觉模糊多属性决策问题可以用矩阵表示为 $D = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n}$. 由于每个属性的重要性不同,因此对每个属性赋予不同的权重,假设属性 X_j 的权重为 ω_j ,

满足 $\omega_j \in [0, 1], \sum_{j=1}^n \omega_j = 1$.

求解上述梯形直觉模糊多属性决策问题的步骤如下:

步骤 1 规范化处理梯形直觉模糊决策矩阵. 为了消除不同物理量纲对决策结果的影响,利用以下式(10)将梯形直觉模糊决策矩阵规范化^[11-14](本文只给出效益型属性公式).

$$\tilde{r}_{ij} = \langle (\frac{a_{Lij}}{a_{Ui}^+}, \frac{a_{1ij}}{a_{Ui}^+}, \frac{a_{2ij}}{a_{Ui}^+}, \frac{a_{Uij}}{a_{Ui}^+}); w_{\tilde{a}_{ij}}, u_{\tilde{a}_{ij}} \rangle, j = 1, 2, \dots, n, i \in B \quad (10)$$

其中, B 表示效益型属性, $a_{Ui}^+ = \max\{a_{Uij} | j = 1, 2, \dots, n\} (i \in B)$.

步骤 2 计算加权梯形直觉模糊决策矩阵. 根据式(7)得到加权梯形直觉模糊决策矩阵 $(\tilde{l}_{ij})_{m \times n}$, 其中

$$\tilde{l}_{ij} = \omega_j \tilde{r}_{ij} \quad (11)$$

步骤 3 定义梯形直觉模糊数的正理想方案和负理想方案属性集合分别为

$$A^+ = (\tilde{l}_1^+, \tilde{l}_2^+, \dots, \tilde{l}_m^+), A^- = (\tilde{l}_1^-, \tilde{l}_2^-, \dots, \tilde{l}_m^-) \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{l}_i^+ &= \langle (\max_{1 \leq j \leq n} \{l_{Lij}\}, \max_{1 \leq j \leq n} \{l_{1ij}\}, \max_{1 \leq j \leq n} \{l_{2ij}\}, \max_{1 \leq j \leq n} \{l_{Uij}\}, \\ &\quad \max_{1 \leq j \leq n} \{w_{\tilde{l}_{ij}}\}, \min_{1 \leq j \leq n} \{u_{\tilde{l}_{ij}}\}) \rangle (i \in B) \quad (13) \\ \tilde{l}_i^- &= \langle (\min_{1 \leq j \leq n} \{l_{Lij}\}, \min_{1 \leq j \leq n} \{l_{1ij}\}, \min_{1 \leq j \leq n} \{l_{2ij}\}, \min_{1 \leq j \leq n} \{l_{Uij}\}, \\ &\quad \min_{1 \leq j \leq n} \{w_{\tilde{l}_{ij}}\}, \max_{1 \leq j \leq n} \{u_{\tilde{l}_{ij}}\}) \rangle \end{aligned}$$

$$\min_{1 \leq j \leq n} \{w_{\tilde{l}_{ij}}\}, \max_{1 \leq j \leq n} \{u_{\tilde{l}_{ij}}\}) \rangle (i \in B) \quad (14)$$

步骤 4 计算各个方案 $A_i \in A (i = 1, 2, \dots, m)$ 与梯形直觉模糊正理想方案 A^+ 和梯形直觉模糊负理想方案 A^- 的距离分别为

$$\begin{aligned} d_i^+ &= d_i^+(A_i, A^+) = \sum_{j=1}^n \omega_j d(a_{Uij}, l_i^+), \\ i &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} d_i^- &= d_i^-(A_i, A^-) = \sum_{j=1}^n \omega_j d(a_{Uij}, l_i^-), \\ i &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (16)$$

步骤 5 计算各个方案 $A_i \in A$ 与梯形直觉模糊正理想方案的相对贴近度

$$\delta_i = \frac{d_i^+}{d_i^+ + d_i^-} \quad (17)$$

显然, $\delta_i \in [0, 1]$ 越大, 所对应的方案 A_i 越优. 于是, 可根据 δ_i 从大到小的顺序确定方案 $A_i \in A$ 的优劣排序.

3 实例分析

某摩托车公司为提升自己的市场竞争力,拟定从 3 个同行企业 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 中选择一个最佳企业形成合作联盟. 该公司聘请了 3 位专家 $\{P_1, P_2, P_3\}$ 组成决策小组, 分别对各企业的 3 个指标: 生产能力 a_1 , 研发实力 a_2 和资金周转能力 a_3 进行评价, 这些指标均为效益型指标. 权重向量为 $W = (0.45, 0.20, 0.35)$, 专家的权重 $\omega = (0.35, 0.35, 0.30)$. 各专家给出各方案的评价值如表 1 所示, 试确定最佳合作企业.

针对以上实例, 利用本文提出的决策方法选择最佳的合作企业, 具体步骤如下:

步骤 1 根据式(11)和式(12)可得加权规范化梯形直觉模糊决策矩阵如表 2 所示.

步骤 2 根据式(12)计算得到各专家对应的梯形直觉模糊正理想方案 A^+ 和负理想方案 A^- 如表 3 所示.

步骤 3 由式(9), (15), (16)分别计算方案 A_1, A_2, A_3 与梯形直觉模糊正理想方案 A^+ 和负理想方案 A^- 距离为 $d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^-, d_3^+, d_3^-$, 如表 4 所示.

步骤 4 由式(17)得到方案 A_1, A_2, A_3 与梯形直觉模糊正理想方案的相对贴近度 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, 结果如表 4 所示.

步骤 5 结合专家权重得到方案 A_1, A_2, A_3 与梯形直觉模糊正理想方案 A^+ 的相对贴近度分别

表 1 梯形直觉模糊决策矩阵
Tab 1 Trapezoidal intuitionistic fuzzy decision matrix

专家	企业	生产能力 a_1	研发实力 a_2	资金周转能力 a_3
P_1	A_1	$\langle(1,2,3,4);0.7,0.2\rangle$	$\langle(2,3,4,5);0.5,0.4\rangle$	$\langle(3,4,6,7);0.7,0.2\rangle$
	A_2	$\langle(4,5,6,7);0.6,0.3\rangle$	$\langle(1,3,5,6);0.6,0.3\rangle$	$\langle(4,6,7,9);0.5,0.4\rangle$
	A_3	$\langle(2,4,5,8);0.5,0.4\rangle$	$\langle(2,3,4,5);0.8,0.2\rangle$	$\langle(1,3,6,7);0.6,0.4\rangle$
P_2	A_1	$\langle(3,5,6,8);0.5,0.4\rangle$	$\langle(2,3,4,5);0.8,0.2\rangle$	$\langle(2,4,5,7);0.7,0.1\rangle$
	A_2	$\langle(1,2,3,4);0.8,0.0\rangle$	$\langle(3,4,5,8);0.5,0.4\rangle$	$\langle(3,4,6,7);0.7,0.2\rangle$
	A_3	$\langle(2,3,4,6);0.7,0.2\rangle$	$\langle(1,3,5,8);0.6,0.2\rangle$	$\langle(1,2,4,6);0.7,0.2\rangle$
P_3	A_1	$\langle(5,6,7,8);0.5,0.2\rangle$	$\langle(2,4,6,7);0.6,0.3\rangle$	$\langle(2,4,6,7);0.8,0.1\rangle$
	A_2	$\langle(1,2,3,4);0.8,0.1\rangle$	$\langle(4,5,6,8);0.7,0.2\rangle$	$\langle(1,4,5,6);0.5,0.4\rangle$
	A_3	$\langle(2,3,4,5);0.7,0.0\rangle$	$\langle(2,4,5,7);0.5,0.4\rangle$	$\langle(3,4,6,8);0.7,0.2\rangle$

表 2 加权规范化梯形直觉模糊决策矩阵
Tab 2 Trapezoidal intuitionistic fuzzy weighted normalized decision matrix

专家	企业	生产能力 a_1	研发实力 a_2	资金周转能力 a_3
P_1	A_1	$\langle(0.063,0.126,0.189,0.252);0.7,0.2\rangle$	$\langle(0.126,0.189,0.252,0.315);0.5,0.4\rangle$	$\langle(0.189,0.252,0.378,0.450);0.7,0.2\rangle$
	A_2	$\langle(0.088,0.112,0.134,0.156);0.6,0.3\rangle$	$\langle(0.022,0.066,0.112,0.134);0.6,0.3\rangle$	$\langle(0.088,0.134,0.156,0.200);0.5,0.4\rangle$
	A_3	$\langle(0.088,0.175,0.221,0.350);0.5,0.4\rangle$	$\langle(0.088,0.133,0.175,0.221);0.8,0.2\rangle$	$\langle(0.046,0.133,0.221,0.308);0.6,0.4\rangle$
P_2	A_1	$\langle(0.171,0.284,0.375,0.450);0.5,0.4\rangle$	$\langle(0.113,0.171,0.225,0.284);0.8,0.2\rangle$	$\langle(0.113,0.225,0.284,0.396);0.7,0.1\rangle$
	A_2	$\langle(0.026,0.050,0.076,0.100);0.8,0.0\rangle$	$\langle(0.076,0.100,0.126,0.200);0.5,0.4\rangle$	$\langle(0.076,0.100,0.150,0.176);0.7,0.2\rangle$
	A_3	$\langle(0.088,0.133,0.175,0.263);0.7,0.2\rangle$	$\langle(0.046,0.133,0.221,0.350);0.6,0.2\rangle$	$\langle(0.046,0.088,0.175,0.263);0.7,0.2\rangle$
P_3	A_1	$\langle(0.284,0.375,0.396,0.450);0.5,0.2\rangle$	$\langle(0.113,0.225,0.375,0.396);0.6,0.3\rangle$	$\langle(0.113,0.225,0.375,0.396);0.8,0.1\rangle$
	A_2	$\langle(0.026,0.050,0.076,0.100);0.8,0.1\rangle$	$\langle(0.100,0.126,0.150,0.200);0.7,0.2\rangle$	$\langle(0.026,0.126,0.126,0.150);0.5,0.4\rangle$
	A_3	$\langle(0.088,0.133,0.175,0.221);0.7,0.0\rangle$	$\langle(0.088,0.221,0.221,0.308);0.5,0.4\rangle$	$\langle(0.133,0.175,0.263,0.350);0.7,0.2\rangle$

表 3 梯形直觉模糊正、负理想方案
Tab 3 Trapezoidal intuitionistic fuzzy positive and negative ideal solution

专家	方案
P_1	$A^+ = \{\langle(0.088,0.175,0.221,0.350);0.7,0.2\rangle, \langle(0.126,0.189,0.252,0.315);0.8,0.2\rangle, \langle(0.189,0.252,0.378,0.450);0.7,0.2\rangle\}$
	$A^- = \{\langle(0.063,0.112,0.134,0.156);0.5,0.4\rangle, \langle(0.022,0.066,0.112,0.134);0.5,0.4\rangle, \langle(0.046,0.133,0.156,0.200);0.5,0.4\rangle\}$
P_2	$A^+ = \{\langle(0.171,0.284,0.375,0.450);0.8,0.0\rangle, \langle(0.113,0.171,0.225,0.350);0.8,0.2\rangle, \langle(0.113,0.225,0.284,0.396);0.7,0.1\rangle\}$
	$A^- = \{\langle(0.026,0.050,0.076,0.100);0.5,0.4\rangle, \langle(0.046,0.100,0.126,0.200);0.5,0.4\rangle, \langle(0.046,0.088,0.150,0.176);0.7,0.2\rangle\}$
P_3	$A^+ = \{\langle(0.284,0.375,0.396,0.450);0.8,0.0\rangle, \langle(0.113,0.225,0.375,0.396);0.7,0.2\rangle, \langle(0.133,0.225,0.375,0.396);0.8,0.1\rangle\}$
	$A^- = \{\langle(0.026,0.050,0.221,0.076);0.5,0.2\rangle, \langle(0.100,0.126,0.150,0.200);0.5,0.4\rangle, \langle(0.026,0.126,0.126,0.150);0.5,0.4\rangle\}$

表 4 各方案与正负理想方案 Hamming 距离及相对贴近度
Tab.4 Programs with positive and negative ideal solution for the Hamming distance and the relative closeness

专家	各方案与正理想方案 Hamming 距离	各方案与负理想方案 Hamming 距离	相对贴近度
P_1	$d_1^+ = 6.706$	$d_1^- = 4.169$	$\delta_1 = 0.617$
	$d_2^+ = 9.017$	$d_2^- = 9.498$	$\delta_2 = 0.495$
	$d_3^+ = 7.433$	$d_3^- = 7.747$	$\delta_3 = 0.480$
P_2	$d_1^+ = 8.795$	$d_1^- = 9.239$	$\delta_1 = 0.488$
	$d_2^+ = 8.308$	$d_2^- = 8.751$	$\delta_2 = 0.487$
	$d_3^+ = 7.595$	$d_3^- = 8.039$	$\delta_3 = 0.486$
P_3	$d_1^+ = 10.41$	$d_1^- = 10.96$	$\delta_1 = 0.487$
	$d_2^+ = 7.697$	$d_2^- = 8.247$	$\delta_2 = 0.483$
	$d_3^+ = 8.447$	$d_3^- = 8.997$	$\delta_3 = 0.484$

为: $\bar{\delta}_1 = 0.533, \bar{\delta}_2 = 0.489, \bar{\delta}_3 = 0.486$. 于是, 3 个同行企业的排序为 $A_1 > A_2 > A_3$. 因此, 最优合作企业为 A_1 .

本文计算结果与文献[6]中结果一样, 但本文的方法要比文献[6]的方法简单、易于操作. 而利用文献[12]的方法得到的方案排序为 $A_1 > A_3 > A_2$, 与本文的结果相比在方案 A_2 和 A_3 的排序上有差别, 这主要是因为本文采用的直觉梯形模糊数的算术运算与排序比较方法和文献[12]中不同. 通过对决策矩阵进行分析, 方案 A_2 在专家 P_1 和 P_3 下的综合评价优于方案 A_3 . 考虑到专家权重分布均衡, 即使专家 P_2 认为方案 A_2 比方案 A_3 稍差, 但在群决策下 A_2 还是优于 A_3 . 若采用文献[15]的排序方法,

结果依然是 $A_1 > A_2 > A_3$. 基于以上分析可得本文的群决策结果是合理的.

4 结束语

针对属性值是梯形直觉模糊数的多属性决策问题,提出了一种基于梯形直觉模糊数的 TOPSIS 方法,给出了梯形直觉模糊数的 Hamming 距离和梯形直觉模糊数正、负理想方案的定义. 基于给出的距离公式,通过计算每个方案和梯形直觉模糊正理想方案的相对贴近度,对所有方案进行排序. 算例结果表明该梯形直觉模糊 TOPSIS 方法具有现实可行性和有效性,该方法可以有效地应对直觉模糊环境下决策者权重已知的 MCDM 问题. 该决策方法原理简单、易于实现,可应用于人力资源管理、风险投资^[16]、区域产业选择和科技成果创新性评估^[17]等实际管理决策问题中,为不确定环境下 MCDM 问题提供了一种新的有效解决方法.

参考文献:

- [1] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.
- [2] Atanassov K, Gargov G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(3): 343-349.
- [3] Park J H, Park I Y, Kwun Y C, et al. Extension of the TOPSIS method for decision making problems under interval-valued intuitionistic fuzzy environment[J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35(5): 2544-2556.
- [4] 张茂军, 南江霞, 李登峰, 等. 带有三角直觉模糊数的多属性决策的 TOPSIS[J]. 运筹与管理, 2012, 21(5): 96-101.
- [5] 王坚强, 张忠. 基于直觉梯形模糊数的信息不完全确定的多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2009, 24(2): 226-230.
- [6] 万树平, 董九英. 多属性群决策的直觉梯形模糊数法[J]. 控制与决策, 2010, 25(5): 773-776.
- [7] 张伟竞, 黄天民, 陈尚云. 基于直觉梯形模糊数的信息不完全多属性决策方法[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2012, 31(6): 51-54.
- [8] Hwang C L, Yoon K. Multiple attribute decision making methods and applications [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1981.
- [9] 李登峰. 直觉模糊集决策与对策分析方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2012.
- [10] 徐泽水. 直觉模糊信息集成理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [11] Wang J Q, Nie R R, Zhang H Y, et al. Intuitionistic fuzzy multi-criteria decision-making method based on evidential reasoning [J]. Applied Soft Computing, 2013, 13(4): 1823-1831.
- [12] 王坚强, 聂荣荣. 基于直觉梯形模糊信息的多准则群决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(8): 1747-1753.
- [13] Vahdani B, Mousavi S M, Tavakkoli-Moghaddam R. Group decision making based on novel fuzzy modified TOPSIS method[J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35(9): 4257-4269.
- [14] 钱省三, 黄旭. 基于逼近理想解法的第三方物流企业绩效评价与外包决策[J]. 上海理工大学学报, 2008, 30(2): 171-174.
- [15] Yager R R. Quantifier guided aggregation using OWA operators [J]. International Journal of Intelligent Systems, 1996, 11(1): 49-73.
- [16] 彭国樑, 姚俭. 不确定性供应链风险的模糊综合评判[J]. 上海理工大学学报, 2010, 32(4): 373-377.
- [17] 张宛平, 王绍智. 一个模糊多目标群体决策方法[J]. 上海理工大学学报, 1998, 20(3): 234-240.

(编辑: 丁红艺)