

最小 Q -特征值为给定整数的一类图

沈富强, 吴宝丰

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了基于二部图 H 构造的一类图的最小无符号拉普拉斯特征值, 即最小 Q -特征值, 得到了它的最小 Q -特征值的可达上界为 1. 给出了最小 Q -特征值为 1 的 2 个必要条件, 并构造了最小 Q -特征值为 1 的一类图. 另外, 给出了利用 $H \vee K_1$ 的最小 Q -特征值来判断简单图 H 没有完美匹配的方法, 以及图 G 增加边后最小 Q -特征值保持不变的 1 个充分条件. 最后, 构造了最小 Q -特征值为任意给定的正整数 t 的一类图.

关键词: 无符号拉普拉斯矩阵; 最小 Q -特征值; 界; 完美匹配

中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

A Class of Graphs with a Given Integer as Least Q -eigenvalue

SHEN Fu-qiang, WU Bao-feng

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: When H is a bipartite graph, the least signless Laplacian eigenvalue (the least Q -eigenvalue) of a class of graphs constructed by H was studied. It was shown that the sharp upper bound of the least Q -eigenvalue of the class of graphs is 1. Moreover, two necessary conditions were given for the graphs whose least Q -eigenvalue is equal to 1, and a class of graphs was constructed which have eigenvalue 1 as their least Q -eigenvalue. Also, a method was presented for checking a graph H without a perfect matching by using the least Q -eigenvalue of $H \vee K_1$, and a sufficient condition was given when adding edges without changing the least Q -eigenvalue. At last, a class of graphs were constructed which have least Q -eigenvalue t , where t is a given positive integer.

Key words: signless Laplacian matrix; least Q -eigenvalue; bound; perfect matching

1 基本概念

设 $G = (V, E)$ 是简单图 (不含环和重边), 其中, $V = V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为顶点集, n 为顶

点数, 也称为 G 的阶数, $E = E(G)$ 为边集. $A(G) = (a_{ij})$ 为 G 的邻接矩阵, 当 v_i 和 v_j 相邻时, $a_{ij} = 1$; 不相邻时, $a_{ij} = 0$. $d_G(v_i) = |N_G(v_i)|$ 为顶点 v_i 的度, 简记为 d_i ($i = 1, 2, \dots, n$), $D(G) = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 为度对角矩阵. 在不致混淆的情况下, 顶

收稿日期: 2013-08-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11301340, 11201303, 11101284); 上海市自然科学基金资助项目 (12ZR1420300)

第一作者: 沈富强 (1988-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 代数图论. E-mail: shenfuqiang19881230@126.com

通讯作者: 吴宝丰 (1978-), 男, 讲师. 研究方向: 代数图论. E-mail: baufern@usst.edu.cn

点集也记为 $\{1, 2, \dots, n\}$.

图 G 的无符号拉普拉斯矩阵定义为 $Q(G) = D(G) + A(G)$, 其二次型为 $x^T Q(G) x = \sum_{ij \in E(G)} (x_i + x_j)^2 \geq 0$, 故 $Q(G)$ 是半正定的实对称矩阵, 其特征值(称为 Q -特征值)均为非负实数, 不妨从大到小依次排列, 记为 $q_1(G) \geq q_2(G) \geq \dots \geq q_n(G) \geq 0$. $\text{Spec}_Q(G) = (q_1(G), q_2(G), \dots, q_n(G))$ 是一个多重集合, 称为 G 的无符号拉普拉斯谱, 简称 Q -谱. 若 x 是 $Q(G)$ 的相应于 q 的特征向量, 则对于任意 $i = 1, 2, \dots, n$, 有 $(q - d_i)x_i = \sum_{j \sim i} x_j$. 对于一般的 n 阶实对称阵 M , 特征值从大到小依次排列, 记为 $\lambda_1(M) \geq \lambda_2(M) \geq \dots \geq \lambda_n(M)$. 此外, 还有些未给出的术语和记号可参考文献[1].

本文用 $q_{\min}(G)$ 表示图 G 的最小 Q -特征值, 相应的特征向量称为最小特征向量. $q_{\min}(G) \leq \delta(G)$, 且当 G (阶数 $n > 1$)连通时, $q_{\min}(G) < \delta(G)^{[2]}$, 其中, $\delta(G)$ 为 G 的最小度. 众所周知, 图 G 是二部图当且仅当 $q_{\min}(G) = 0^{[3]}$, 可以利用最小 Q -特征值来判别图的二部性.

设 G_1, G_2 是2个顶点不交的图, 则 $G_1 \vee G_2$ 表示在 $G_1 \cup G_2$ 的基础上, 连接 G_1 和 G_2 之间的所有点对所得到的图. 对于图 H , 定义图类

$$\mathcal{G}(H) = \{G \mid V(G) = V(H) \dot{\cup} V(K_1), \\ E(H) \subseteq E(G) \subseteq E(H \vee K_1)\}$$

2 $\mathcal{G}(H)$ 的最小 Q -特征值

引理1^[4] 设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵, 则对于任意 $i = 1, 2, \dots, n$, 有

$$\min_{r+s=i+1} \{\lambda_r(A) + \lambda_s(B)\} \geq \lambda_i(A+B) \geq \max_{r+s=i+n} \{\lambda_r(A) + \lambda_s(B)\}$$

推论1 设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵, 则 $\lambda_n(A+B) \leq \lambda_{n-1}(A) + \lambda_2(B)$.

引理2^[4] 设 $\lambda_{\min}$ 是实对称矩阵 A 的最小特征值, 则 $\lambda_{\min} = \min_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}$, 等式成立当且仅当 x 是 A 的最小特征向量.

引理3(删边插值)^[5] 若 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 是 G 的 Q -特征值, $s_1, s_2, \dots, s_n$ 是 $G-e$ 的 Q -特征值, 其中, e 是 G 的一条边, 则

$$q_1 \geq s_1 \geq q_2 \geq s_2 \geq \dots \geq q_n \geq s_n$$

定理1 设 H 为二部图, 则任意 $G \in \mathcal{G}(H)$, 有 $q_{\min}(G) \leq 1$.

证明 设 H 外的那一点与 H 之间有 k 条边相连. 当 $k = 0$ 时, $q_{\min}(G) = 0 < 1$. 当 $k = 1$ 时, $q_{\min}(G) \leq \delta(G) \leq 1$, 结论也成立. 现证明 $k \geq 2$ 的情形, 设 $|V(G)| = n$, 则

$$Q(G) = \begin{bmatrix} Q(H) & O_{(n-1) \times 1} \\ O_{1 \times (n-1)} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O_{n-k-1} & O_{(n-k-1) \times k} & O_{(n-k-1) \times 1} \\ O_{k \times (n-k-1)} & I_k & J_{k \times 1} \\ O_{1 \times (n-k-1)} & J_{1 \times k} & k \end{bmatrix} \triangleq A + B$$

式中, J 为全1矩阵; I 为单位矩阵, 则 $\text{Spec}(B) = (k+1, 1^{k-1}, 0^{n-k})$, $\lambda_{n-1}(A) = q_{\min}(H) = 0$, $\lambda_2(B) = 1$. 由推论1可知, $q_{\min}(G) \leq q_{\min}(H) + 1 = 1$.

引理4 设 V_1 是图 G 的一个独立集, V_1 中任一点的邻点集均为 V_2 , 则 G 的 Q -谱中至少包含 $|V_1| - 1$ 个特征值 $|V_2|$.

证明 记 $V_3 = V(G) \setminus (V_1 \cup V_2)$, 设 x 是 $|V(G)|$ 维向量, 其中, $V_2 \cup V_3$ 对应分量0, V_1 对应分量 $x_1, x_2, \dots, x_{|V_1|}$, 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_{|V_1|} = 0$, 则

对于 V_1 中的点 i ,

$$(|V_2| - d_i)x_i = 0 \cdot x_i = \sum_{j \in V_2} x_j$$

对于 V_2 中的点 i ,

$$(|V_2| - d_i)x_i = (|V_2| - d_i) \cdot 0 = \sum_{j \in V_1} x_j + \sum_{j \in V \setminus V_1, j \sim i} x_j$$

对于 V_3 中的点 i ,

$$(|V_2| - d_i)x_i = (|V_2| - d_i) \cdot 0 = \sum_{j \in V_2, j \sim i} x_j$$

故 $Q(G)x = |V_2|x$, 从而 x 是相应于 $|V_2|$ 的特征向量, $|V_2|$ 的几何重数至少为 $|V_1| - 1$, 所以, G 的 Q -谱中至少包含 $|V_1| - 1$ 个特征值 $|V_2|$.

引理5 设 G 为完全三部图 $K_{1,r,s}$, 若 $r \neq s$, 则 $q_{\min}(G) < 1$.

证明 $K_{1,r,s} = K_{r,s} \vee K_1 \in \mathcal{G}(K_{r,s})$, 根据定理1, $q_{\min}(G) \leq 1$, 现只需证1不是 $Q(G)$ 的特征值. 设 V_1, V_2 是 $K_{r,s}$ 的二部, 其中, $|V_1| = r, |V_2| = s, r + s = n - 1$, 由引理4可知, G 的 Q -谱中包含 $r - 1$ 个特征值 $s + 1$, 以及 $s - 1$ 个特征值 $r + 1$. 其余3个特征值可以通过后面定义的矩阵 B 来求得. 设 x 是 $Q(G)$ 的特征向量, V_1 对应分量 x_1, V_2 对应分量 x_2 , 余下那一点对应分量 x_0 , 则有

$$\begin{cases} \lambda x_0 = (r + s)x_0 + rx_1 + sx_2 \\ \lambda x_1 = (s + 1)x_1 + x_0 + sx_2 \\ \lambda x_2 = (r + 1)x_2 + x_0 + rx_1 \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} r+s & r & s \\ 1 & s+1 & s \\ 1 & r & r+1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(B, \lambda) = \det(\lambda I - B)$$

则 $\phi(B, 1) = \det(I - B) = (r - s)^2$, 从而当 $r \neq s$ 时, 1 不是 $Q(G)$ 的特征值, 所以, $q_{\min}(H) < 1$.

文献[6]提出了一个问题: 是否存在 $K_{p_1, p_2, \dots, p_s}$ ($s \geq 3$) 是 Q -整图, 引理 5 表明, 当 $s = 3$ 时, 若 $p_1 = 1, p_2 \neq p_3$ 时, 它的最小 Q -特征值小于 1 大于 0, 故此时 K_{p_1, p_2, p_3} 不可能为 Q -整图.

定理 2 设二部图 H 的两部的顶点数分别为 r 和 s , 若 $r \neq s$, 则任意 $G \in \mathcal{G}(H)$, 有 $q_{\min}(G) < 1$.

证明 显然 G 为 $K_{1, r, s}$ 的生成子图, 由引理 3 (删边插值) 和引理 5 得, $q_{\min}(G) < 1$.

引理 6 设 G 为 $K_{1, r, s}$ 中删除 K_1 与 $K_{r, s}$ 之间的 1 条边后所得到的图, 则 $q_{\min}(G) < 1$.

证明 $G \in \mathcal{G}(K_{r, s})$, 由定理 1 可知, $q_{\min}(G) \leq 1$, 现只需要证 $q_{\min}(G) \neq 1$ 即可. 设 V_1, V_2 是 $K_{r, s}$ 的二部, 若 $q_{\min}(G) = 1$, 由定理 2 可知, 两部的顶点数相等, 不妨均记为 s , 由引理 4 可知, G 的 Q -谱中包含 $2s - 3$ 个特征值 $s + 1$, 其余 4 个特征值可通过后面定义的矩阵 B 来求得. 设 $v \in V_1$ 是唯一不与 K_1 相邻的点, x 是 $Q(G)$ 的特征向量, K_1 对应分量 $x_0, V_1 \setminus \{v\}$ 对应分量 x_1, V_2 对应分量 x_2, v 对应分量 x_3 , 则有

$$\begin{cases} \lambda x_0 = (s + s - 1)x_0 + (s - 1)x_1 + sx_2 \\ \lambda x_1 = (s + 1)x_1 + x_0 + sx_2 \\ \lambda x_2 = (s + 1)x_2 + x_0 + (s - 1)x_1 + x_3 \\ \lambda x_3 = sx_3 + sx_2 \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2s-1 & s-1 & s & 0 \\ 1 & s+1 & s & 0 \\ 1 & s-1 & s+1 & 1 \\ 0 & 0 & s & s \end{bmatrix}$$

则 $\phi(B, 1) = \det(I - B) = -2s(s - 1)$. 当 $s \geq 2$ 时, 1 不是 B 的特征值. 当 $s = 1$ 时, 1 为 B 的特征值, 但此时 $G = P_3$, 最小特征值为 0, 所以, $q_{\min}(G) < 1$.

定理 3 设 H 为二部图, $G \in \mathcal{G}(H)$, 若 $G \neq H \vee K_1$, 则 $q_{\min}(G) < 1$.

证明 根据引理 3 (删边插值) 和引理 6.

结合定理 1~3, 得到图类 $\mathcal{G}(H)$ 中最小 Q -特征值为 1 的图的 2 个必要条件, 即定理 4.

定理 4 设二部图 H 的两部的顶点数分别为 r 和 s , $G \in \mathcal{G}(H)$, 若 $q_{\min}(G) = 1$, 则

- $r = s$;
- $G = H \vee K_1$.

3 最小 Q -特征值为 1 的一类图

引理 7^[7] 设 G_1 为 n_1 阶 r_1 -正则图, G_2 为 n_2 阶 r_2 -正则图, 则

$$Q_{G_1 \vee G_2}(x) = \frac{Q_{G_1}(x - n_2)Q_{G_2}(x - n_1)}{(x - 2r_1 - n_2)(x - 2r_2 - n_1)}f(x)$$

其中

$$f(x) = x^2 - [2(r_1 + r_2) + (n_1 + n_2)]x + 2(r_1r_2 + r_1n_1 + r_2n_2)$$

推论 2 设 G 为 n 阶 r -正则图, 则

$$Q_{G \vee tK_1}(x) = (x - n)^{t-1} \frac{x^2 - (n + 2r + t)x + 2nr}{x - 2r - t} Q_G(x - t)$$

即 $\text{Spec}_Q(G \vee tK_1) = (x_1, x_2, n^{t-1}, q_2(G) + t, q_3(G) + t, \dots, q_n(G) + t)$, 其中, x_1, x_2 是 $x^2 - (n + 2r + t)x + 2nr = 0$ 的 2 个根.

定理 5 设 H 为 n 阶 r -正则二部图, $n \geq 2, r \geq 1$, 则 $q_{\min}(H \vee K_1) = 1$.

$$\text{证明} \quad \text{记 } q = \frac{n + 2r + 1 - \sqrt{(n + 2r + 1)^2 - 8nr}}{2},$$

根据推论 2, 有

$$q_{\min}(H \vee K_1) = \min\{q_n(H) + 1, q\} = \min\{1, q\}$$

易知, $q \geq 1$ 当且仅当 $r \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n-2}$, 所以, 当 $n \geq 2, r \geq 1$ 时, 有 $q_{\min}(H \vee K_1) = 1$.

引理 8 设 $G = sK_2 \vee K_1, s \geq 1$, 则 $q_{\min}(G) = 1$, 且 $x = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0)^T$ 是 G 的 1 个最小特征向量, 其中, sK_2 的二部分别对应分量 1, $-1, K_1$ 对应分量 0.

证明 sK_2 是 1-正则二部图, 根据定理 5, $q_{\min}(G) = 1$. 另一方面,

$$\frac{x^T Q(G) x}{x^T x} = \frac{\sum_{ij \in E(sK_2)} (x_i + x_j)^2 + \sum_{i \in V(sK_2)} (x_i + 0)^2}{x^T x} = 1 = q_{\min}(G)$$

由引理 2 可知, $x = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0)^T$ 是 $Q(G)$ 的相应于 1 的特征向量, 即最小特征向量.

定理 6 设 H 为简单图, 若 $q_{\min}(H \vee K_1) < 1$, 则 H 不存在完美匹配.

证明 假设 H 存在完美匹配, 设 H 的顶点数为 $2s$, 则 H 包含 1-正则生成子图 sK_2 , 由引理 3 (删边插值) 及引理 8 得, $q_{\min}(H \vee K_1) \geq q_{\min}(sK_2 \vee K_1) = 1$, 矛盾.

定理 7 设 G 是图 H 增加 1 条边 $e = uv$ 后所得到的图, x 是 $Q(H)$ 的最小特征向量, 若 $x_u +$

$x_v = 0$, 则 $q_{\min}(H) = q_{\min}(G)$, 且 $\mathbf{x}$ 也是 $\mathcal{Q}(G)$ 的最小特征向量.

证明 $q_{\min}(G) \leq \frac{\sum_{i,j \in E(H)} (x_i + x_j)^2 + (x_u + x_v)^2}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \frac{\sum_{i,j \in E(H)} (x_i + x_j)^2}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = q_{\min}(H) \leq q_{\min}(G)$, 所以, $q_{\min}(H) = q_{\min}(G)$, 由引理2可知, $\mathbf{x}$ 也是 $\mathcal{Q}(G)$ 的最小特征向量.

根据引理8和定理7, 若 $G = sK_2 \vee K_1$, 在 sK_2 的二部之间随意添加边, G 的最小特征值保持不变. 于是, 得到一类图, 它的最小特征值均为1. 记 $\pi = \{H \vee K_1 \mid H \text{ 是在 } sK_2 \text{ 的二部之间添加若干条边后所得到的图, } s \text{ 为任意正整数}\}$, 则任意 $G \in \pi$, 有 $q_{\min}(G) = 1$, 此时, H 总包含1-正则生成子图 sK_2 , 故 H 存在完美匹配. 于是, 有定理8.

定理8 设 H 为二部图, 存在完美匹配, $G = H \vee K_1$, 则 $q_{\min}(G) = 1$, 且 $\mathbf{x} = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0)^T$ 是 G 的最小特征向量, 其中, H 的二部分别对应分量1, -1, K_1 对应分量0.

在定理8中, H 存在完美匹配并不是 $q_{\min}(H \vee K_1) = 1$ 成立的必要条件, 图1中的 $H \vee K_1$ 的 $\mathcal{Q}$ -谱为 $(8, 4^2, 2^2, 1^2)$, 显然, $q_{\min}(H \vee K_1) = 1$, 但 H 没有完美匹配.

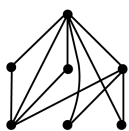


图1 $H \vee K_1$
Fig.1 $H \vee K_1$

4 最小 $\mathcal{Q}$ -特征值为 t 的一类图

定理9 设 H 为 n 阶 r -正则二部图, $n \geq 2$, $r \geq 1$, 若 $1 \leq t \leq \left\lfloor \frac{2nr}{n+2r} \right\rfloor$, 则 $q_{\min}(H \vee tK_1) = t$.

证明 记 $f(t) = (n + 2r + t - \sqrt{(n + 2r + t)^2 - 8nr})/2$, 易知 $f(t) \leq n$, 根据推论2, 有

$$q_{\min}(H \vee tK_1) = \min\{q_n(H) + t, f(t)\} = \min\{t, f(t)\}$$

又

$$f(t) = \frac{4nr}{n + 2r + t + \sqrt{(n + 2r + t)^2 - 8nr}}$$

所以, $f(t)$ 关于 t 严格单调递减. 令 $f(t) = t$, 则 $t = \frac{2nr}{n+2r}$, 当 $1 \leq t \leq \left\lfloor \frac{2nr}{n+2r} \right\rfloor$ 时, $q_{\min}(H \vee tK_1) = t$.

对于 n 阶 r -正则二部图 H , t 总是 $H \vee tK_1$ 的1个特征值, 且 $r \leq \frac{n}{2}$, 但要使 t 为最小特征值, r 必须足够大, 即 $r \geq \frac{nt}{2n-2t}$, 且 $n \geq 2t$.

引理9 设正整数 t, n, r 满足 $n \geq 2t, \frac{nt}{2n-2t} \leq r \leq \frac{n}{2}$, H 为 n 阶 r -正则二部图, $G = H \vee tK_1$, 则 $q_{\min}(G) = t$, 且 $\mathbf{x} = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)^T$ 是 G 的最小特征向量, 其中, H 的二部分别对应分量1, -1, tK_1 对应分量0.

引理9的证明类似引理8, 再根据定理7, 对图加边后最小 $\mathcal{Q}$ -特征值不变的条件, 得到定理10, 定理10给出了最小 $\mathcal{Q}$ -特征值为任意给定的正整数 t 的一类图.

定理10 设 t 为任意给定的正整数, $G = H \vee tK_1$, 其中, H 为 n 阶二部图, 包含 r -正则生成子图, $n \geq 2t, \frac{nt}{2n-2t} \leq r \leq \frac{n}{2}$, 则 $q_{\min}(G) = t$, 且 $\mathbf{x} = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)^T$ 是 G 的最小特征向量, 其中, H 的二部分别对应分量1, -1, tK_1 对应分量0.

参考文献:

- [1] Cvetković D, Doob M, Sachs H. Spectra of graphs: theory and applications [M]. New York: Academic Press, 1980.
- [2] Das K C. On conjectures involving second largest signless Laplacian eigenvalue of graphs [J]. Linear Algebra Appl, 2010, 432(11): 3018 - 3029.
- [3] Cvetković D, Rowlinson P, Simić S K. Signless Laplacians of finite graphs [J]. Linear Algebra Appl, 2007, 423(1): 155 - 171.
- [4] Horn R A, Johnson C R. Matrix analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [5] Cvetković D, Rowlinson P, Simić S K. Eigenvalue bounds for the signless Laplacian [J]. Publ Inst Math, 2007, 81(95): 11 - 27.
- [6] Zhao G P, Wang L, Li K. $\mathcal{Q}$ -integral complete r -partite graphs [J]. Linear Algebra Appl, 2013, 438(13): 1067 - 1077.
- [7] de Freitas M A A, de Abreu N M M, Del-Vecchio R R, et al. Infinite families of $\mathcal{Q}$ -integral graphs [J]. Linear Algebra Appl, 2010, 432(9): 2352 - 2360.

(编辑: 石 瑛)