

牛顿法在新的仿射逆变条件下的半局部收敛性分析

王海波, 秦 梅

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 非线性方程及非线性方程组的数值求解一直是计算数学所关注的问题, 公认的经典算法是牛顿法, 对于它的局部收敛性已有很多研究. 在经典牛顿法的半局部收敛 Kantorovich 定理的基础上引入仿射逆变性, 研究了牛顿法在仿射逆变 Lipschitz 条件和仿射逆变 Holder 条件下的半局部收敛性. 简化了牛顿法的收敛行为, 得到了相应的半局部收敛性定理及误差估计. 推广并改进了相关文献的结果, 表明了该方法的有效性.

关键词: 牛顿法; 仿射逆变 Lipschitz 条件; 仿射逆变 Holder 条件; 半局部收敛性

中图分类号: O 241 **文献标志码:** A

Semi-local Convergence for Newton Method under New Affine Contravariant Conditions

WANG Hai-bo, QIN Mei

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Numerical solutions for nonlinear equations and systems of nonlinear equations are always appealing greatly to people. There are many papers discussing the local convergence of Newton method, a universally acknowledged classical algorithm. In the paper, on the basis of the Kantorovich theorem about the classic semi-local convergence of Newton method, affine contravariant conditions were introduced and the semi-local convergence of Newton method under affine contravariant Lipschitz conditions and affine contravariant Holder conditions was analysed. The convergence behavior of Newton method was simplified. The semi-local convergence theorems were presented and the estimations of the iterative residual were obtained. The results extend and improve the results in the related paper, which show that the method is efficient.

Key words: Newton method; affine contravariant Lipschitz conditions; affine contravariant Holder conditions; semi-local convergence

考虑非线性方程组

$$F(x) = 0$$

(1)

其中 $F: R^n \rightarrow R^n$ 是连续可微函数. 求解该非线性方程组的近似解是一个很重要的问题, 因为大量的不

收稿日期: 2013-09-04

第一作者: 王海波(1987-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 计算数学. E-mail: nuniwanghaibo@126.com

通讯作者: 秦 梅(1975-), 女, 副教授. 研究方向: 计算数学. E-mail: qinmay2012@sina.com

同类型的实际问题都可以归结为非线性方程的求解,如常微分或偏微分方程边值问题、积分方程、极小化问题等^[1-7].为此,研究非线性方程组的求解算法具有重要的实际意义.

目前,牛顿法是求解非线性方程组(1)的最有效方法之一.其迭代格式为

$$F'(x_k)\Delta x_k = -F(x_k), \\ x_{k+1} = x_k + \Delta x_k, k = 0, 1, \dots, +\infty \quad (2)$$

迭代法的收敛性已经成为研究的一个核心问题.一般情况下,收敛性分析有以下三种类型^[2]:局部收敛性、半局部收敛性和全局收敛性.本文主要研究牛顿法在仿射逆变条件下的半局部收敛性.半局部收敛性是在不知方程解 x^* 存在的情况下,根据 F 在某一初始点 x_0 的局部条件来研究有关的收敛性质.

关于半局部收敛性的最著名的结果是 Newton-Kantorovich 定理^[5],该定理在理论和应用上相当重要,也是解方程算法现代研究的起点.很多研究学者对 Kantorovich 定理条件进行改进,得到了不少好的半局部收敛性结果. Deuflhard^[8-9]首先将仿射不变性引入到牛顿法中,提出牛顿法的仿射不变性理论,而后由 Hohmann 得到进一步拓展. Nashed 等^[10]研究了阻尼牛顿法在仿射逆变条件下的局部收敛性. 白中治^[11]给出了不精确牛顿法在仿射协变条件下的不精确牛顿法的半局部收敛性. 徐秀斌^[12]研究了在弱 Lipschitz 条件下 Halley 方法的半局部收敛性.

大多数文献是在假设满足仿射协变条件下研究牛顿法的收敛性,而对仿射逆变条件下的研究较少. 本文将结合文献^[9]的思想,主要研究加入新的仿射逆变性后的牛顿法的半局部收敛性,并在更弱的仿射逆变条件下牛顿法的半局部收敛性得到了更一般的结果.

1 预备知识

考虑非线性方程组 $F(x) = 0$. 其中 $F: D \subset X \rightarrow Y$ 的连续可微映射, X 和 Y 为 Banach 空间. 普通牛顿法对 $F(x) = 0$ 进行求解时,实际是求解线性方程组

$$F'(x_k)\Delta x_k = -F(x_k), k = 0, 1, \dots, +\infty \quad (3)$$

求得上述方程组的精确解 Δx_k 后,由 $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$ 进行校正. 显然,普通牛顿法使非线性方程组 $F(x) = 0$ 的求解问题变成线性方程组(3)来解决.

上面的线性方程组(3)的可解性的必要条件是:对所有的 $x \in D$, 雅克比矩阵 $F'(x)$ 是可逆的. 在经典的收敛定理中通常要求 $F'(x)^{-1}$ 存在且有界,即

$$\|F'(x)^{-1}\|_{Y \rightarrow X} \leq \beta < \infty, x \in D \quad (4)$$

从实际计算的角度看,除了一些简单的例子外,理论上的量 β 是不容易得到的. 然而,

$$\|F'(x)^{-1}\|_{Y \rightarrow X} \leq \beta_0 \quad (5)$$

是可取的.

研究上面的牛顿迭代的收敛性质, $F(x)$ 的二次导数信息是必要的. 大量的文献对式(4)进行弱化, Kelley^[3]将其弱化为 F' 的 Lipschitz 连续: 存在一个常数 $L > 0$, 使得

$$\|F'(x) - F'(\bar{x})\|_{X \rightarrow Y} \leq L \|x - \bar{x}\|_X \quad (6)$$

成立. 式中, $x, \bar{x} \in D$.

进一步,由算子扰动定理可知:对 $\|x - x_0\|_X < \frac{1}{\beta_0 L}$, $x \in D$, 有 $\|F'(x)^{-1}\|_{Y \rightarrow X} \leq \beta \leq \frac{\beta_0}{1 - \beta_0 L \|x - x_0\|_X}$ 成立.

经典的收敛性定理的假设条件都是式(4)、(5)、(6)的组合. 现给出 2 个重要的收敛定理.

引理 1 (Newton-Kantorovich 定理^[9]) 假设式(5)和式(6)成立, 那么 $F(x) = 0$ 存在唯一的解 x^* . 另外, 当 Kantorovich 量 $h_0 := \|\Delta x_0\|_X \beta_0 L < \frac{1}{2}$ 和初始点 x_0 相应的收敛球半径 $\rho_0 \approx \frac{1}{\beta_0 L}$ 成立时, 牛顿法在解 x^* 的领域内收敛速度达到二阶.

引理 2 (Newton-Mysovskikh 定理^[9]) 假设式(4)和式(6)成立, 那么 $F(x) = 0$ 有唯一的解 x^* . 另外, 当 Kantorovich 量 $h_0 := \|\Delta x_0\|_X \beta L < \frac{1}{2}$ 和初始点 x_0 相应的收敛球半径 $\rho_0 \approx \frac{1}{\beta L}$ 成立时, 牛顿法在解 x^* 的领域内收敛速度达到二阶.

普通牛顿法缺乏仿射不变性. Hohmann 在牛顿法中加入仿射逆变性,收到了很好的效果. 相对于经典的牛顿法,利用仿射逆变性令收敛定理的证明更加简洁. 为此,给出仿射映射的定义.

定义 1 设 $F \in D \subset X \rightarrow Y$ 的映射, A 是 X 到 Y 上的任意线性算子, 对于任意的 $x, b \in D$, 称 $F(x) = Ax + b$ 为 X 上的仿射映射.

设 $A, B \in R^{n \times n}$ 是任意非奇异的 n 阶矩阵, 考虑非线性系统的仿射变换

$$G(y) = AF(By) = 0, x = By \quad (7)$$

则将牛顿法应用到 $G(y)$ 上可得

$$G'(y_k)\Delta y_k = -G(y_k),$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, k = 0, 1, \dots, +\infty$$

由于 $G'(y_k) = \mathbf{A}F'(x_k)\mathbf{B}$ 和初始点 $y_0 = \mathbf{B}^{-1}x_0$, 故对任意的 $k \in N$, 有 $x_k = \mathbf{B}y_k$.

很显然, 他们仅仅是通过 $\mathbf{B}$ 的一个变换得到的. 因此, 有牛顿法产生的序列 $\{x_k\}$ 在仿射变换条件下具有不变性.

定义 2 若固定 F 的像空间, 即令 $A = I$, 则称 $G(y) = F(\mathbf{B}y) = 0, x = \mathbf{B}y, \mathbf{B} \in GL(n)$ 为仿射逆变性.

对于这个问题, 普通牛顿法推不出关于 $\{y_k\}$ 的迭代序列, 但是可以导出关于残差 $\{F(x_k)\}$ 的序列, 这与 $\mathbf{B}$ 的选择无关. 另外, 在经典的收敛定理中, $F'(x)$ 的 Lipschitz 连续是必要的. 加入仿射逆变性后, 将 Lipschitz 条件和 $\|F'(x)^{-1}\| \leq M$ 结合得到仿射逆变 Lipschitz 条件

$$\|(F'(\bar{x}) - F'(x))(\bar{x} - x)\| \leq L \|F'(x)(\bar{x} - x)\|^2 \quad (8)$$

考虑到 Lipschitz 条件是 Holder 条件的特例, 将 Holder 条件与 $\|F'(x)^{-1}\| \leq M$ 结合得到仿射逆变 Holder 条件

$$\|(F'(\bar{x}) - F'(x))(\bar{x} - x)\| \leq L_p \|F'(x)(\bar{x} - x)\|^{1+p} \quad (9)$$

显然, 这两个条件满足仿射逆变性, 因为对任意可逆线性算子 $\mathbf{B}$, 若对非线性方程 (1) 作仿射逆变变换 $G(y) = F(\mathbf{B}y) = 0$, 则

$$G'(y)(\bar{y} - y) = F'(\mathbf{B}y)\mathbf{B}(\bar{y} - y) = F'(x)(\bar{x} - x), x = \mathbf{B}y, x, \bar{x} \in D \quad (10)$$

下面给出仿射逆变 Lipschitz 条件和仿射逆变 Holder 条件的定义.

定义 3 (仿射逆变 Lipschitz 条件) 设 $F: D \subset X \rightarrow Y$ 连续可微, 对于任意的 $x, y \in D$, 如果对任意的 $v \in D$ 有

$$\|[F'(x) - F'(y)]v\| \leq L \|F'(x)(x - y)\| \cdot \|F'(x)v\|, x, y \in D \quad (11)$$

则称为 F' 在 D 上满足仿射逆变 Lipschitz 条件.

定义 4 (仿射逆变 Holder 条件) 设 $F: D \subset X \rightarrow Y$ 连续可微, 如果对于任意的 $v \in D$ 有

$$\|[F'(x) - F'(y)]v\| \leq L \|F'(x)(x - y)\|^p \cdot \|F'(x)v\|, x, y \in D, p \in (0, 1] \quad (12)$$

则称为 F' 在 D 上满足仿射逆变 Holder 条件.

在 Kantorovich 定理的基础上给出仿射

Lipschitz 条件半局部收敛性分析, 并由此推出更弱的仿射逆变 Holder 条件下的半局部收敛性分析, 后者是前者的推广. 得到了牛顿法在仿射逆变条件下的更一般的结果.

2 牛顿法在新的仿射逆变条件下的半局部收敛性分析

讨论牛顿法的半局部收敛性, 最著名的定理是康托洛维奇定理.

引理 3 (康托洛维奇定理^[5]) 设 $F: D \subset R^n \rightarrow R^n$ 及初始近似 x_0 满足下列条件:

a. $[F'(x_0)]^{-1}$ 存在, 且 $\|[F'(x_0)]^{-1}\| \leq \beta$, $\|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\| \leq \eta$;

b. 在 x_0 的邻域 $S(x_0, \delta)$ 内, $F'(x)$ 存在并满足 Lipschitz 条件

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq L \|x - y\|, \forall x, y \in S(x_0, \delta)$$

并且 $\rho = \beta\eta L \leq \frac{1}{2}, \delta \geq \frac{1 - \sqrt{1 - 2\rho}}{\rho}\eta$, 则方程 (1) 于 $S(x_0, \delta)$ 内有解 x^* , 且牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 x^* , 并有估计式

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{\theta^{2^k - 1}}{\sum_{j=0}^{2^k - 1} \theta^{2^j}} \eta \quad (13)$$

其中 $\theta = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\rho}}{1 + \sqrt{1 - 2\rho}}$.

引理 4 (中值定理^[5]) 若映射 $F: D \subset R^n \rightarrow R^n$ 在开凸集 D 上可导, $F'(x)$ 在 D 上连续, 则对任何 $x, y \in D$, 有

$$F(y) - F(x) = \int_{t=0}^1 F'(x + t(y - x))(y - x) dt \quad (14)$$

康托洛维奇定理有很大的理论价值, 一方面是定理的收敛条件, 另一方面就是定理的证明方法, 为研究仿射逆变条件下牛顿法的半局部收敛性做了指导. 在此基础上, 在牛顿法中引入仿射逆变性, 先研究牛顿法在仿射逆变 Lipschitz 条件下半局部收敛性.

定理 1 (仿射逆变 Lipschitz 条件下半局部收敛性定理) 设 $F: D \rightarrow R^n$ 是在 D 上的连续可微映射, $D \subset R^n$ 是一个开的凸集. $F'(x)$ 对任意 $x \in D$ 均可逆, 并设 F' 满足仿射逆变 Lipschitz 条件成立, 即

$$\|(F'(y) - F'(x))(y - x)\| \leq$$

$$L \|F'(x)(y-x)\|^2$$

对 $x, y \in D$, 定义一个开的水平集 $l_L = \{x \in D \mid \|F(x)\| < \frac{2}{L}\}$, 且 $\bar{l}_L \subset D$ 是有界的. 对于解 x^* 的一个给定的初始迭代点 x_0 , 使它满足 $h_0 := \omega \|F(x_0)\| < 2$, 即 $x_0 \in l_L$. 那么牛顿迭代序列 $\{x_k\}$ 仍在 l_L 中, 并且牛顿迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛到解 $x^* \in l_L$. 迭代残余序列 $\{F(x_k)\}$ 收敛到 0, 且有估计式

$$\|F(x_{k+1})\| \leq \frac{1}{2} L \|F(x_k)\|^2 \quad (15)$$

证明 首先证明 $x_{k+1} \in D$.

应用积分中值定理可知

$$F(x_k + \lambda \Delta x_k) = F(x_k) + F'(x_k + \lambda \Delta x_k) -$$

$$F(x_k) = F(x_k) + \int_{t=0}^{\lambda} F'(x_k +$$

$$t \Delta x_k) \Delta x_k dt$$

由仿射逆变换 Lipschitz 条件可知

$$\begin{aligned} \|F(x_k + \lambda \Delta x_k)\| &= \|F(x_k) + \int_{t=0}^{\lambda} F'(x_k + t \Delta x_k) \Delta x_k dt\| = \\ &\| \int_{t=0}^{\lambda} (F'(x_k + t \Delta x_k) - F'(x_k)) \Delta x_k dt + \\ &(1 - \lambda) F(x_k) \| \leq \int_{t=0}^{\lambda} \| (F'(x_k + t \Delta x_k) - \\ &F'(x_k)) \Delta x_k \| dt + (1 - \lambda) \| F(x_k) \| \leq \\ &L \int_{t=0}^{\lambda} \| F'(x_k) \Delta x_k \|^2 t dt + \\ &(1 - \lambda) \| F(x_k) \| = \\ &(1 - \lambda + \frac{1}{2} L \lambda^2 \| F(x_k) \|^2) \| F(x_k) \| \end{aligned}$$

故对于每一个 $\lambda \in [0, 1]$, 当 $t \in [0, \lambda]$ 时, 有 $x_k + t \Delta x_k \in l_L$.

假设 $x_{k+1} \notin l_L$, 那么存在一个极小值 $\bar{\lambda} \in [0, 1]$, 使 $x_k + \bar{\lambda} \Delta x_k \in \partial l_L$, 且

$$\|F(x_k + \bar{\lambda} \Delta x_k)\| \leq (1 - \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^2) \|F(x_k)\| \leq \frac{2}{L}$$

因此矛盾, 故 $x_{k+1} \in l_L$.

当 $\lambda = 1$ 时, 可以得到

$$\|F(x_{k+1})\| \leq \frac{1}{2} L \|F(x_k)\|^2$$

至于残余导向 Kantorovich 量 $h_k := \frac{1}{2} L \|F(x_k)\|^2$,

可以推出数量关系

$$h_{k+1} \leq \frac{1}{2} h_k^2 = \left(\frac{1}{2} h_k\right) h_k$$

由假设 $h_0 = L \|F(x_0)\| < 2$, 即 $x_0 \in l_L$, $h_0 < 2$, 得

$h_1 < h_0 < 2 (k=0)$. 重复迭代, 可以推出 $h_{k+1} < h_k < 2, k=1, 2, \dots, +\infty$. 因此 $\|F(x_{k+1})\| \leq$

$\|F(x_k)\| < \frac{2}{L}$, 故 $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = 0$, 从而 $\{x_k\} \subset l_L \subset$

D . 又由于 l_L 是有界的, 所以序列 $\{x_k\}$ 存在一个聚点 x^* , 使 $F(x^*) = 0$, 即 x^* 是 $F(x) = 0$ 的解点. 证毕.

接下来在定理 1 的基础上研究比仿射逆变换 Lipschitz 条件更弱条件下 (仿射逆变换 Holder 条件) 的牛顿法的半局部收敛性.

定理 2 (仿射逆变换 Holder 条件下半局部收敛性定理) 设 $F: D \rightarrow R^n$ 是在 D 上的连续可微映射, $D \subset R^n$ 是一个开的凸集. $F'(x)$ 对任意 $x \in D$ 均可逆, 并设 F' 满足仿射逆变换 Holder 条件成立, 即

$$\| [F'(x) - F'(y)](x - y) \| \leq$$

$$L \|F'(x)(x - y)\|^{p+1}, x, y \in D, p \in (0, 1]$$

定义一个开的水平集 $l_{L_p} := \{x \in D: \|F(x)\|^p < (1+p)/L_p\}$ 且 $\bar{l}_{L_p} \subset D$ 是有界的. 对于解 x^* 的一个给定的初始迭代点 $x_0 \in D$, 设 $\|F(x_0)\| \leq \beta$. 如果 $\beta L_p^{1/p} < (1+p)^{1/p}$ 即 $x_0 \in l_{L_p}$. 那么牛顿迭代序列 $\{x_k\}$ 仍在 l_{L_p} 中, 并且牛顿迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛到解 $x^* \in l_{L_p}$. 此外, 迭代残余序列 $\{F(x_k)\}$ 收敛到 0, 且收敛速度为

$$\|F(x_{k+1})\| \leq \frac{L_p}{1+p} \|F(x_k)\|^{1+p} \quad (16)$$

证明 应用归纳法证明. 因为 $x_0 \in l_{L_p}$, 设 $x_k \in l_{L_p}$, 由于

$$\begin{aligned} F(x_{k+1}) &= F(x_{k+1}) - F(x_k) + F(x_k) = \\ &\int_0^1 [F'(x_k + t(x_{k+1} - x_k)) - F'(x_k)] \cdot \\ &(x_{k+1} - x_k) dt \end{aligned}$$

应用仿射逆变换 Holder 条件可得

$$\begin{aligned} \|F(x_{k+1})\| &\leq \int_0^1 \| [F'(x_k + t(x_{k+1} - x_k)) - \\ &F'(x_k)](x_{k+1} - x_k) \| dt \leq \\ &\int_0^1 L_p \|F'(x_k)(x_{k+1} - x_k)\|^{1+p} t^p dt = \\ &\frac{L_p}{1+p} \|F(x_k)\|^{1+p} \end{aligned}$$

因为 $x_k \in l_{L_p}$, 故 $\|F(x_k)\|^p < (1+p)/L_p$. 于是

$$\|F(x_{k+1})\| \leq \frac{L_p}{1+p} \|F(x_k)\|^{1+p} <$$

$$\frac{L_p}{1+p} \cdot \frac{1+p}{L_p} \|F(x_k)\| = \|F(x_k)\|$$

从而

$$\|F(x_{k+1})\|^p < \|F(x_k)\|^p < (1+p)/L_p$$

由此知 $x_{k+1} \in l_{L_p}$. 因此 $\{x_k\} \subset l_{L_p}$.

下面证明其收敛性. 为此令 $t_k := L_p^{1/p} \|F(x_k)\|$,

则 $t_{k+1} \leq \frac{1}{p+1} t_k^{p+1}$, 于是

$$t_{k+1} \leq \frac{1}{p+1} t_k^{p+1} \leq \dots \leq \frac{1}{p+1} \cdot$$

$$\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{(1+p)((1+p)^k-1)}{p}} t_0^{(1+p)^{k+1}} =$$

$$(1+p)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{t_0}{(1+p)^{\frac{1}{p}}}\right) (1+p)^{k+1}$$

因为 $t_0 = \beta L_p^{1/p} < (1+p)^{1/p}$, 故 $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0$. 从而 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|F(x_k)\| = 0$. 又由于 l_{L_p} 是有界的, 故存在聚点 x^* 使得 $x_k \rightarrow x^* (k \rightarrow \infty)$. 且满足 $F(x^*) = 0$, 即 x^* 是非线性方程组(1)在 l_{L_p} 中的一个解. 证毕.

在定理2中, 当取 $p=1$ 时, 定理中的收敛判据 $\beta L_p^{1/p} < (1+p)^{1/p}$ 即成为定理1中的收敛判据

$L\beta < 2$. 此外, 对误差估计 $\|F(x_{k+1})\| \leq \frac{L_p}{1+p} \cdot$

$\|F(x_k)\|^{1+p}$, 当 $p=1$ 时, 即为 $\|F(x_{k+1})\| \leq \frac{1}{2} L \|F(x_k)\|$.

因此定理2是定理1的推广. 需要注意的是, 当水平集确定时, 只要取其中任意一点作为初始迭代点便可以保证所产生的序列仍在水平集内且是收敛的. 从而此结果推广并改进了经典的半局部收敛性定理.

3 结 论

主要研究了仿射逆变 Lipschitz 条件下牛顿法的半局部收敛性, 并在此基础上给出了仿射逆变 HolderF 条件下牛顿法的半局部收敛性定理, 得到了更一般的结果. 由此可以得出结论: 定理2是定理1的推广. 此结果推广并改进了经典的半局部收敛性定理.

而对于牛顿法的高阶推广迭代算法, 如 Halley 法和 Chebyshev 法是否能够建立仿射逆变条件下的

收敛性, 这一点目前还没有人做深入的探讨. 一个关键的切入点是需论证这些高阶算法是否具有仿射逆变性, 如果满足该不变性, 那么便可能可以建立相应的仿射逆变收敛结果.

参考文献:

- [1] Deuffhard P. Newton methods for nonlinear problems [M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [2] 袁亚湘. 最优化理论与算法 [M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [3] Kelley C T. Solving nonlinear equations with Newton method [M]. Philadelphia: Society for Industrial & Applied Mathematics, 2003.
- [4] Deuffhard P. Affine invariant adaptive Newton codes for discretized PDEs [J]. 2002(10): 1-27.
- [5] 黄象鼎, 等. 非线性数值分析 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2010.
- [6] 于森, 高岩. 拟可微方程组牛顿法的二次收敛性 [J]. 上海理工大学学报, 2009, 31(4): 354-358.
- [7] 刘晶, 高岩. 求解一类无限维非光滑算子方程的光滑化牛顿法 [J]. 上海理工大学学报, 2008, 30(2): 167-170.
- [8] Deuffhard P, Heindl G. Affine invariant convergence theorems for Newton's method and extensions to related methods [J]. SIAM Numer Anal, 1979, 16(1): 1-10.
- [9] Deuffhard P. Newton methods for nonlinear problems: affine invariance and adaptive algorithms [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2004.
- [10] Nashed M Z, Chen X. On the semilocal convergence of damped Newton method [J]. Applied Mathematics and Computation, 2012(219): 2808-2824.
- [11] 白中治. 不精确 Newton 法与 Broyden 法的仿射不变性 [J]. 电子科技大学学报, 1994, 23(5): 535-537.
- [12] Xu X B, Ling Y H. Semi-local convergence for Halley's method under weak Lipschitz condition [J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 215(8): 3057-3067.

(编辑: 董 伟)