

弹性地基上具有初始构型的输液管动力稳定性

李海港¹, 胡育佳¹, 杨善升²

(1. 上海理工大学 机械工程学院, 上海 200093; 2. 北京石油化工工程有限公司上海分公司, 上海 200032)

摘要: 解决了研究弹性地基上任意初始构型输液曲管稳定性的难点. 在以弧长为参数的自然坐标系中建立了弹性地基上可伸长任意初始构型输液管道力学分析的数学模型, 采用微分求积法 (DQM) 和分块矩阵的方法求解输液曲管的固有频率以及临界流速, 研究了弹性地基和初始构型对输液管道动态特性的影响. 结果表明, 弹性地基将增大输液管道的临界流速, 且输液直管初始构型微小的变化将引起其临界流速较大的变化.

关键词: 弹性地基; 输液管道; 固有频率; 临界流速; 微分求积

中图分类号: O 327 **文献标志码:** A

Dynamic Stability of Pipes Conveying Fluid with Arbitraty Initial Configuration on Elastic Foundation

LI Haigang¹, HU Yujia¹, YANG Shansheng²

(1. School of Mechanical and Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;
2. Subsidiary Company of Beijing Petrochemical and Engineering in Shanghai, Shanghai 200032, China)

Abstract: The dynamic model of an extensible curved pipe with arbitrary initial configuration on elastic foundation was established in an arc coordinate system. Differential quadrature method (DQM) and partitioned matrix method were employed to obtain the natural frequencies and critical velocities of the pipe conveying fluid. The influences of elastic foundation and initial configuration on the dynamic stability of the pipe conveying fluid were discussed in detail. The numerical results show that the elastic foundation will increase the critical velocity of the pipe conveying fluid, and a small defect of the straight pipe will lead to a major effect on the critical velocity.

Key words: elastic foundation; pipe conveying fluid; natural frequency; critical velocity; differential quadrature method

收稿日期: 2013-11-14

基金项目: 国家自然科学基金青年基金资助项目(11002084); 上海市教委科研创新基金资助项目(12YZ092, 12YZ074); 国家国际科技合作专项资助项目(2014DFA40370); 陕西省科技统筹创新工程资助项目(2011KTZB01-05); 沪江基金资助项目(D14005)

第一作者: 李海港(1987-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 输液管道振动. E-mail: lihaigangusst@126.com

通讯作者: 胡育佳(1979-), 男, 副教授. 研究方向: 结构非线性、健康检测. E-mail: huyujia@126.com

输液管道的振动问题一直是工程问题中的一个研究热点,众多学者对输液管道开展了广泛的研究,考虑了不同条件下输液管道的动力学特性,例如脉动流速^[1]、支撑条件^[2]、外部激励^[3]等对输液管道动力学特性的影响.在弹性地基对输液管道动力学特性的影响方面,王忠民等^[4-5]已作了相关研究.文献[4]用幂级数法计算了 Winkler 模型地基和双参数模型地基输液管道的临界流速和复频率,分析了弹性地基对输液管道稳定性的影响.文献[5]在文献[4]的基础上进一步分析了粘弹性地基上粘弹性输液管道的稳定性.马小强等^[6]利用传递矩阵法研究了弹性地基上任意支承输液直管的稳定性问题.

以上研究都是针对输液直管的,对于输液曲管的研究相对较少,现有文献主要集中在圆弧形输液曲管的稳定性问题上进行研究.李宝辉等^[7]采用波动法获得曲管内振动波的传播和反射矩阵,提出了计算输液曲管平面内振动固有频率的计算方法. Misra^[8-9]等使用有限元方法研究了圆弧形输液管道的振动特性.王琳等^[10]将微分求积法推广到圆弧形输液曲管的振动稳定性分析上,在处理边界条件时,引入了辅助点.然而,对于复杂构型的输液管道的分析和研究结果比较少见.

本文建立了弹性地基上具有任意初始构型的输液曲管的动力学特性分析模型,采用微分求积法和分块矩阵的方法求解输液曲管的固有频率及临界流速,分析了地基参数和管道的初始构型对输液管道固有频率和临界流速的影响.不同于文献[10],在边界条件的处理过程中,将引入独立变量,避免了引入辅助点可能产生的问题.研究发现,弹性地基和输液管道的初始构型对输液管道的临界流速的影响比较显著.

1 数学模型

图1为曲管变形前后的示意图,假设 $w_0(s)$ 和 $u_0(s)$ 分别是输液曲管任意位置处 x 和 y 方向的初始位移.其中, $s \in [0, l]$ 是沿曲管轴向的弧坐标, l 是曲管长度,并且假设输液曲管的初始构型所占有的区域是 $\Gamma_0: \{(x, y) | x = w_0(s), y = s + u_0(s), 0 \leq s \leq l\}$, $\theta_0(s)$ 表示初始构型上任意点 $C(w_0, s + u_0)$ 处的切线和 y 轴之间的夹角.输液曲管在外载荷的作用下,变形前初始构型 Γ_0 上任意一点 $C(w_0, s + u_0)$ 移动到点 $C'(w_0 + w, s + u_0 + u)$ 处.因此,曲管变形后的构型所占有区域为 $\Gamma =$

$\{(x, y) | x = w_0 + w, y = s + u_0 + u, 0 \leq s \leq l\}$, 这里, $w(s, t)$ 和 $u(s, t)$ 分别为变形后输液曲管上点 $C(w_0, s + u_0)$ 在 x 和 y 方向的位移(见图1), t 表示时间.

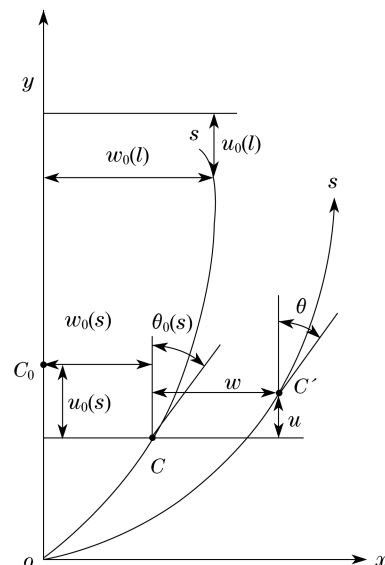


图1 曲管变形前后的示意图

Fig.1 Initial and deformed configurations of a curved pipe

由图1可得输液曲管几何关系为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s} = R_1 \cos \theta - \cos \theta_0 \\ \frac{\partial w}{\partial s} = R_1 \sin \theta - \sin \theta_0 \end{cases} \quad (1)$$

式中, $R_1(s) - 1$ 为轴线的伸长率; $\theta = \theta(s, t)$ 为曲管已变形构型上任意点处的切向方向与 y 轴的夹角.将式(1)中直角坐标系下的位移 (u, w) 用弧线坐标系下切向和法向的位移 (w_s, w_η) 来表示,可以得到

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial w_s}{\partial s} + w_\eta \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) = R_1 - \cos(\theta - \theta_0) \\ \left(\frac{\partial w_\eta}{\partial s} - w_s \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) = -\sin(\theta - \theta_0) \end{cases} \quad (2)$$

式中, w_s, w_η 分别表示输液曲管任意一点处在切向和法向的位移.在小变形情形下,转角满足条件 $\tilde{\theta} = \theta - \theta_0 = o(1)$, $\sin \tilde{\theta} \cong \tilde{\theta}$, $\cos \tilde{\theta} \cong 1$.其中, $\tilde{\theta}$ 为输液管变形前后截面处转角的改变量.因此,方程(2)可整理为

$$\begin{cases} R_1 - 1 = \frac{\partial w_s}{\partial s} + \frac{\partial \theta_0}{\partial s} w_\eta \\ \tilde{\theta} = w_s \frac{\partial \theta_0}{\partial s} - \frac{\partial w_\eta}{\partial s} \end{cases} \quad (3)$$

从流体和输液管上截取长度为 δs 的单元作为研究对象, 受力分析如图 2 所示.

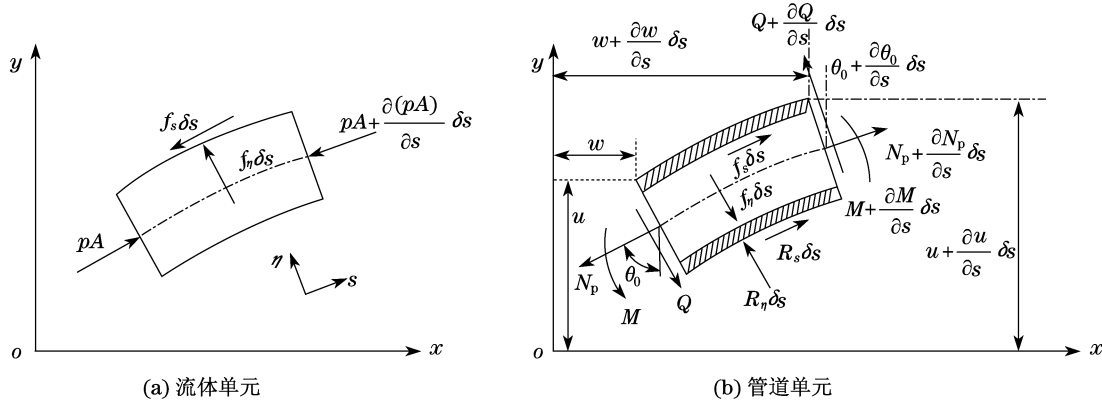


图 2 流体管道单元受力分析

Fig. 2 Force diagram of fluid and pipe elements

管道的弯矩、切向和法向运动微分方程为

$$\frac{\partial N_p}{\partial s} + Q \frac{\partial \theta_0}{\partial s} + f_s + R_s - m_p g \cos \theta_0 = m_p \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} - N_p \frac{\partial \theta_0}{\partial s} - f_\eta + R_\eta - m_p g \sin \theta_0 = m_p \frac{\partial^2 w_\eta}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial M}{\partial s} - Q = 0 \quad (6)$$

式中, M , N_p , Q 分别为截面的弯矩、轴力和剪力; m_p 为单位长管道的质量; g 为重力加速度; $R_s = -k_b w_s$ 和 $R_\eta = -k_b w_\eta$ 分别为弹性地基对输液管道的切向和法向作用力, k_b 为弹性地基系数; f_s 和 f_η 为管道和流体接触面上的切向和法向作用力. 流体的切向和法向运动微分方程为

$$-\frac{\partial(pA)}{\partial s} - f_s - m_f g \cos \theta_0 = m_f a_s \quad (7)$$

$$(pA) \frac{\partial \theta_0}{\partial s} + f_\eta - m_f g \sin \theta_0 = m_f a_\eta \quad (8)$$

式中, p 为流体的压力; A 为流体的截面面积; m_f 为单位长流体的质量; a_s , a_η 分别为流体的切向和法向方向上加速度, 参考文献[11]可以表示为

$$a_s = \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w_s}{\partial t \partial s} + 2v \frac{\partial \theta_0}{\partial s} \frac{\partial w_\eta}{\partial t} - v^2 \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial s} \right)^2 w_s + 2v^2 \frac{\partial \theta_0}{\partial s} \frac{\partial w_\eta}{\partial s} + v^2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial s^2} \quad (9)$$

$$a_\eta = \frac{\partial^2 w_\eta}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w_\eta}{\partial t \partial s} - 2v \frac{\partial \theta_0}{\partial s} \frac{\partial w_s}{\partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w_\eta}{\partial s^2} - 2v^2 \frac{\partial \theta_0}{\partial s} \frac{\partial w_s}{\partial s} - v^2 \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial s} \right)^2 w_\eta \quad (10)$$

式中, v 为流体的流速. 假设输液管道的材料是线性

的, 则由线弹性本构关系可以得到

$$N_p = EA_p (R_1 - 1) = EA_p \left(\frac{\partial w_s}{\partial s} + \frac{\partial \theta_0}{\partial s} w_\eta \right) \quad (11)$$

$$M = EI \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} - \frac{\partial \theta_0}{\partial s} \right) = EI \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial s} \quad (12)$$

式中, E 为管道的杨氏模量; A_p 为管道截面面积; EI , EA_p 分别为抗弯和抗拉刚度; I 为惯性矩. 由式(4)~(5)和式(7)~(8)消去 f_s 和 f_η 得

$$\frac{\partial N_p}{\partial s} + Q \frac{\partial \theta_0}{\partial s} - F_s = m_p \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \quad (13)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} - N_p \frac{\partial \theta_0}{\partial s} - F_\eta = m_p \frac{\partial^2 w_\eta}{\partial t^2} \quad (14)$$

式中, F_s , F_η 分别为管道和流体的自重、压力、流体的惯性力和弹性地基力向切向 s 和法向 η 方向上投影的合力, 可以表示为

$$F_s = mg \cos \theta_0 + m_f a_s + \frac{\partial(pA)}{\partial s} + k_b w_s \quad (15)$$

$$F_\eta = mg \sin \theta_0 + m_f a_\eta - (pA) \frac{\partial \theta_0}{\partial s} + k_b w_\eta \quad (16)$$

其中, $m = m_p + m_f$.

引入如下的无量纲条件:

$$(S, W_s, W_\eta) = \left(\frac{s, w_s, w_\eta}{l} \right), \epsilon = \frac{m_p}{m},$$

$$\nu = \frac{m_f}{m}, \mu = \frac{A_p l^2}{I}, K_0 = \frac{k_b l^4}{EI},$$

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(\frac{N_p l^2, Q l^2, M l}{EI} \right), V = vl \sqrt{\frac{m_f}{EI}},$$

$$\bar{p} \bar{A} = \frac{p A l^2}{EI}, \bar{g} = \frac{m g l^3}{EI}, \tau = t \sqrt{\frac{m l^4}{EI}}, \bar{F}_s = \frac{F_s l^3}{EI},$$

$$\bar{F}_\eta = \frac{F_\eta l^3}{EI}, \Omega = \sqrt{m/(EI)} \omega l^2 \quad (17)$$

式中, w 为输液曲管的有量纲固有频率.

将式(6), (11)~(14)无量纲化得

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_1}{\partial S} + \xi_2 \frac{\partial \theta_0}{\partial S} - \bar{F}_s = \epsilon \frac{\partial^2 W_s}{\partial \tau^2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial S} - \xi_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial S} - \bar{F}_\eta = \epsilon \frac{\partial^2 W_\eta}{\partial \tau^2} \\ \xi_1 = \mu \frac{\partial W_s}{\partial S} + \mu \frac{\partial \theta_0}{\partial S} W_\eta \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial S} - \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial S} \end{cases} \quad (18)$$

由方程(3)和(18)可得

$$\begin{aligned} N_1 W_s + N_2 \frac{\partial^2 W_s}{\partial S^2} + N_3 W_\eta + N_4 \frac{\partial W_\eta}{\partial S} + \\ N_5 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial S^2} + N_6 \frac{\partial^2 W_s}{\partial S \partial \tau} + N_7 \frac{\partial W_\eta}{\partial \tau} + \\ N_8 \frac{\partial^2 W_s}{\partial \tau^2} + \bar{g} \cos \theta_0 + \frac{\partial(\bar{p} \bar{A})}{\partial S} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} - N_4 \frac{\partial W_s}{\partial S} + N_9 W_\eta + N_{10} \frac{\partial^2 W_\eta}{\partial S^2} - \\ \frac{\partial^3 \tilde{\theta}}{\partial S^3} + N_{11} \frac{\partial W_s}{\partial \tau} + N_6 \frac{\partial^2 W_\eta}{\partial S \partial \tau} + \\ N_8 \frac{\partial^2 W_\eta}{\partial \tau^2} + \bar{g} \sin \theta_0 - (\bar{p} \bar{A}) \frac{\partial \theta_0}{\partial S} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$N_5 W_s + \frac{\partial W_\eta}{\partial S} + \tilde{\theta} = 0 \quad (21)$$

式中,系数 $N_1 = M_1, N_2 = M_6 - C_1, N_3 = -C_2, N_4 = M_4 - C_3, N_5 = -C_4, N_6 = M_2, N_7 = M_5, N_8 = \epsilon + M_3, N_9 = C_5 + M_1 + K_0, N_{10} = M_6, N_{11} = -M_5, C_1 = \mu, C_2 = \mu \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial S^2}, C_3 = \mu \frac{\partial \theta_0}{\partial S}, C_4 = \frac{\partial \theta_0}{\partial S}, C_5 = \mu \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial S} \right)^2, M_1 = -V^2 \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial S} \right)^2, M_2 = 2\sqrt{\nu} V, M_3 = \nu, M_4 = 2V^2 \frac{\partial \theta_0}{\partial S}, M_5 = 2 \frac{\partial \theta_0}{\partial S} \sqrt{\nu} V, M_6 = V^2$.

两端固定的无量纲边界条件为

$$\begin{aligned} W_s(0) = W_s(1) = W_\eta(0) = W_\eta(1) = \\ \tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}(1) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

2 求解方法

想要获得上述问题的严格通用解析解是困难的,微分求积方法将用来求解在边界条件为式(22)下的控制方程(19), (20), (21). 微分求积方法的基本原理是将函数对某方向的自变量的偏导数近似表达为沿自变量方向各离散点上相应函数值的加权

和. 为了保证计算精度,如果没有特别说明,本文将采用 Chebyshev-Lobatto 多项式零点的布点方式,取布点数 $N = 21$.

将式(19)~(22)离散得^[12]

$$\begin{cases} N_{1i} W_{si} + N_{2i} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} W_{sk} + N_{3i} W_{\eta i} + \\ N_{4i} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} W_{\eta k} + N_{5i} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} \tilde{\theta}_k + \\ N_{6i} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \dot{W}_{sk} + N_{7i} \dot{W}_{\eta i} + N_{8i} \dot{W}_{si} + \\ \bar{g} \cos \theta_{0i} + \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} (\bar{p} \bar{A})_k = 0 \\ - N_{4i} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} W_{sk} + N_{9i} W_{\eta i} + \\ N_{10i} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} W_{\eta k} - \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(3)} \tilde{\theta}_k + \\ N_{11i} \dot{W}_{si} + N_{6i} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \dot{W}_{\eta k} + \\ N_{8i} \ddot{W}_{\eta i} + \bar{g} \sin \theta_{0i} - \\ (\bar{p} \bar{A}) \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \theta_{0k} = 0 \\ N_{5i} W_{si} + \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} W_{\eta k} + \tilde{\theta}_i = 0 \\ W_{sj} = 0, W_{\eta j} = 0, \tilde{\theta}_j = 0 \quad (j = 1 \text{ 或 } N) \end{cases} \quad (23)$$

式中, $i = 2, \dots, N-1$; $(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial \tau$ 表示位移对无量纲时间 τ 的一阶导数; $(\ddot{\cdot}) = \partial^2(\cdot)/\partial \tau^2$ 表示位移对无量纲时间 τ 的二阶导数; $A_{ik}^{(r)}$ 为第 r 阶的权系数; $N_{1i} \sim N_{11i}$ 表示 $N_1 \sim N_{11}$ 在 $S = S_i$ 处的离散值. 当管道内流速恒定,流体两端的边界为自然流动状态的情况时, $\bar{p} \bar{A}$ 是常量,在管道的固有频率和临界流速的分析中,忽略 $\bar{p} \bar{A}, \bar{g}$ 的影响. 由式(23)可得到如下的矩阵表达式

$$\begin{bmatrix} [M_1] & [0] & [0] \\ [0] & [M_2] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{W}_s \\ \ddot{W}_\eta \\ \ddot{\theta}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_1] & [C_2] & [0] \\ [C_3] & [C_4] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_s \\ W_\eta \\ \tilde{\theta}_k \end{bmatrix} = [0]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{W}_s \\ \dot{W}_\eta \\ \dot{\theta}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_1] & [K_2] & [K_3] \\ [K_4] & [K_5] & [K_6] \\ [K_7] & [K_8] & [K_9] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_s \\ W_\eta \\ \tilde{\theta}_k \end{bmatrix} = [0] \quad (24)$$

式中, $[W_s, W_\eta, \tilde{\theta}_k]^T = [W_{s1}, W_{s2}, \dots, W_{sN}, W_{\eta 1},$

$W_{\eta 2}, \dots, W_{\eta N}, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_N]^T; [\mathbf{M}_1] \sim [\mathbf{M}_2], [\mathbf{C}_1] \sim [\mathbf{C}_4], [\mathbf{K}_1] \sim [\mathbf{K}_9]$ 是相关的系数矩阵. 为了求解管道的固有频率, 需通过分块矩阵消去转角变量 $\tilde{\theta}_k (k = 1, \dots, N)$ 以及边界条件的影响, 则整理式 (24) 可得

$$[\mathbf{M}][\ddot{\Phi}] + [\mathbf{C}][\dot{\Phi}] + [\mathbf{K}][\Phi] = [\mathbf{0}] \quad (25)$$

式中, $[\Phi] = [W_{s2}, W_{s3}, \dots, W_{sN-1}, W_{\eta 2}, W_{\eta 3}, \dots, W_{\eta N-1}]^T$, $[\mathbf{M}], [\mathbf{C}], [\mathbf{K}]$ 分别为相应的质量矩阵、阻

尼矩阵和刚度矩阵. 在求解方程 (25) 之前, 初始构型在 $x-y$ 坐标系中为 $y=f(x)$ 的输液曲管, 需要转换到以转角 $\theta_0(s)$ 为参数的弧坐标系中, 则分析中必须要事先获得已知布点处的初始转角值, 即 $\theta_0(S_i)$. 本文将采用梯形积分和二分法数值解决这个问题, 计算流程如图 3 所示. 图中, a, b 分别为初始构型中变量 x 的上、下限; S_i 为无量纲弧长坐标上的坐标点; X_i 为坐标点对应的 x 轴坐标.

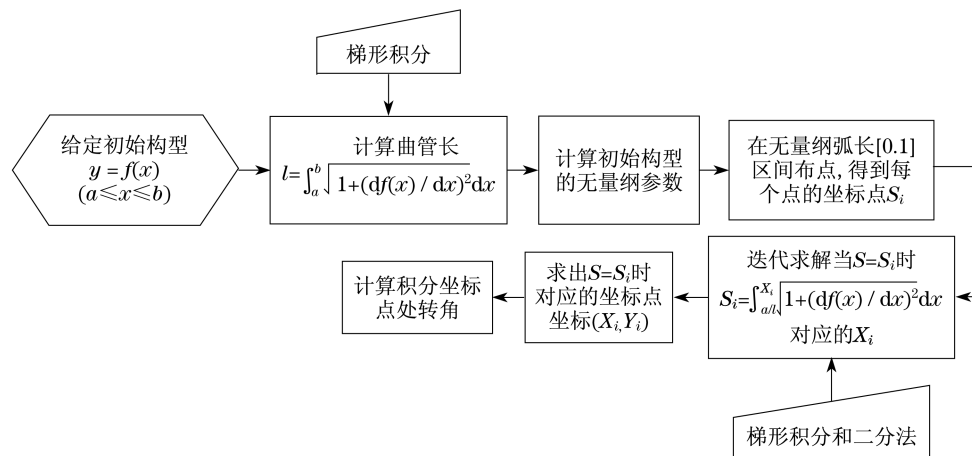


图3 采用弧长来表示转角的计算流程图

Fig.3 Calculation process of angle in arc coordinate system

3 数值结果

3.1 结果的验证

为了说明本方法的有效性, 首先研究了无弹性地基两端固定轴向可伸长的输液直管的稳定特性, 并与已有结果进行了比较, 管道的材料及尺寸参数见参考文献[13]. 如图 4(a) 所示, 本文的结果与 Lee^[13] 的结果相当吻合, 且得到的无量纲临界流速为 6.28, 与 Lee 的数值结果一致, 这也说明本文方法正确.

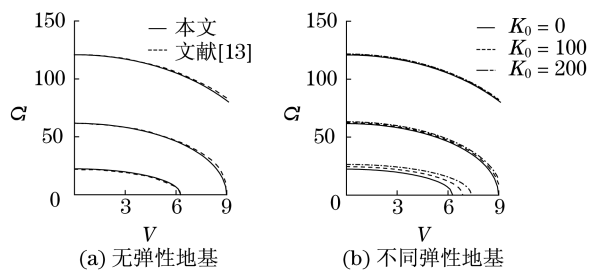


图4 输液直管的计算结果

Fig.4 Results of straight pipe conveying fluid

图 4(b) 给出了上述管道在无量纲弹性地基系数分别为 $K_0 = 0, 100, 200$ 工况下的前三阶无量纲固有

频率 Ω 随流速的变化. 数据结果表明, 后两种弹性地基情况的临界流速分别为 $V = 6.88$ 和 $V = 7.40$, 相对没有弹性地基 ($K_0 = 0, V = 6.28$) 分别提高了 9.55% 和 17.83%, 但是弹性地基对高阶固有频率的影响较小.

3.2 弹性地基上初始构型有缺陷的输液直管的振动稳定性分析

初始构型有缺陷的输液直管的构型如图 5 所示, 尺寸及材料给定如下: $m_p = m_f = 1.78 \text{ kg/m}$, 弹性模量 $E = 10 \text{ GPa}$, 截面惯性矩 $I = 7.491 \times 10^{-8} \text{ m}^4$. 管道的初始构型为 $y = A_1 \cos[\pi(x - 0.5L_0)/L_0]$, $0 \leq x \leq 1.0 \text{ m}$. 其中, A_1 为初始构型幅值. 如果没有特殊说明, 质量比 $\nu = m_f/m = 0.5$, $A_p/I = 2.5 \times 10^4 \text{ m}^{-2}$, 跨距 $L_0 = 1.0 \text{ m}$. 在计算中给定无量纲弹性地基系数分别为 $k_1 = 0, k_2 = 1 \times 10^5 \text{ N/m}^2, k_3 = 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, 无量纲固有频率为 $\omega^* = \Omega(R_0/l)^2 = \Omega/\sigma^2$. 同时为了便于讨论, 消除管道长度的影响, 进一步定义无量纲流速 $V^* = V/\sigma (\sigma = l/R_0)$, 取特征长度 $R_0 = 0.5 \text{ m}$.

图 6 给出了 3 种不同工况下输液管道的无量纲固有频率随无量纲流速的变化. 当 $A_1 = 0$, 地基系数为 k_1 时, 表示工况为无地基输液直管的情况, 此时的

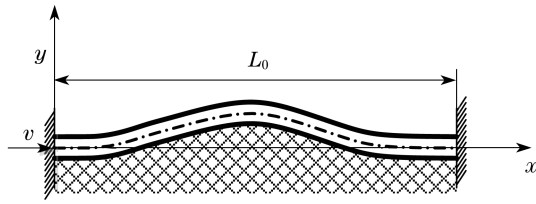


图5 弹性地基上的输液管道

Fig.5 Pipe conveying fluid on elastic foundation

临界流速 $V_c = 3.14$; 当 $A_1 = 0.01$ m, 地基系数为 k_1 时, 即为无地基初始构型幅值为 0.01 m 的输液管道, 其临界流速为 $V_c = 3.47$, 相比前者增大了 10.51%; 当 $A_1 = 0.01$ m, 地基系数为 k_2 时, 临界流速为 $V_c = 3.81$, 相比 $V_c = 3.14$ 增大了 21.34%. 然而, 弹性地基和初始构型幅值 A_1 对高阶固有频率影响很小.

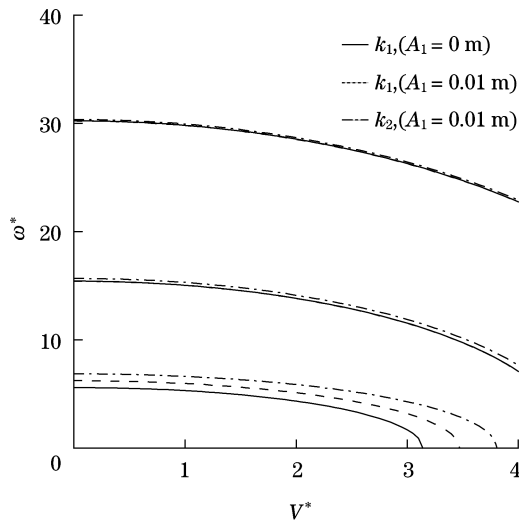


图6 输液曲管无量纲固有频率与无量纲流速的变化曲线

Fig.6 Varying curve of dimensionless frequencies and dimensionless fluid velocity of curved pipe

图7进一步研究了初始构型幅值 A_1 以及弹性地基系数对输液管道临界流速 V_c 的影响. 如图7所示, 虚线与3条曲线的交点 P_1, P_2, P_3 为输液直管的情况. 其中 P_1 点为无弹性地基输液直管的临界流速

点, 此时的临界流速达到最小值为 $V_c = 3.14$; 随着弹性地基系数的增大, 临界流速均会增加. 另外可以注意到3种弹性地基情况的输液曲管的临界流速均会出现一个突变区域.

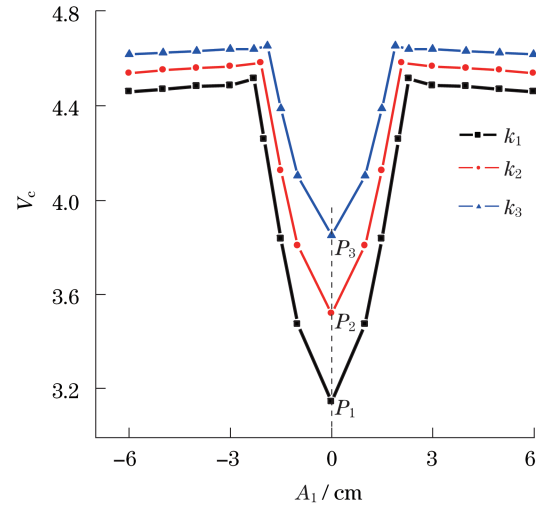


图7 不同初始构型输液曲管的临界流速

Fig.7 Critical velocity of curved pipes with different initial configuration

为了研究这种现象, 图8给出了弹性地基系数分别为 k_1, k_2 的工况下临界流速发生突变时相对应的管道初始构型所占的区域, 也就是说, 当管道的初始构型在图示阴影范围内, 则此管道的临界流速会发生突变. 两种工况所对应的幅值范围 A_1 分别为 $-0.023 \sim 0.023$ m, $-0.021 \sim 0.021$ m. 同时可以发现, 当有弹性地基的影响时, 突变区域相对缩小了. 然而, 相对一个跨距 $L_0 = 1.0$ m 的输液直管, 突变区域还是非常小的. 在突变区域内的输液管道的构型可以被认为是初始构型有一定缺陷的输液直管, 因此对于一个输液直管, 初始构型的微小变化将引起其临界流速的突变. 换句话说, 由于输液直管构型不可避免的初始缺陷影响, 实验得到的临界流速将偏大于其理论分析.

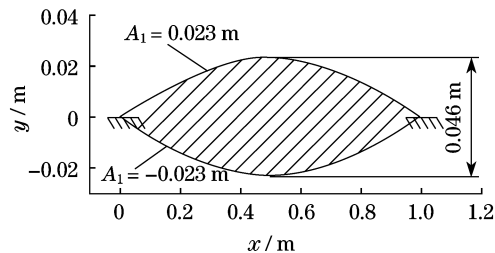
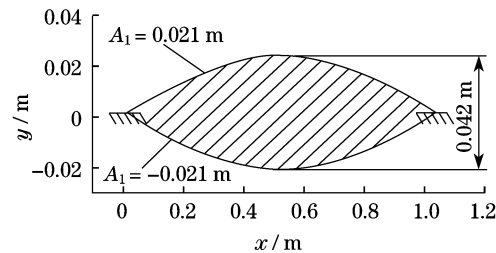
(a) 地基系数为 k_1 (b) 地基系数为 k_2

图8 不同地基系数下管道临界流速的突变区域

Fig.8 Mutation region of critical velocity of pipes with different coefficients of elastic foundation

4 结 论

本文在自然坐标系中建立了弹性地基上可伸长输液曲管的模型,该模型适用于具有任意初始构型的输液管道,并采用微分求积法和分块矩阵技术进行求解.研究发现:a.考虑弹性地基的影响将增大输液管道的临界流速,随着弹性地基系数的增大,临界流速逐渐增大,特别是对于低阶固有频率影响很大,但是对高阶固有频率影响较小;b.对于输液直管的情况,管道微小的缺陷将引起临界流速增加,换句话说,输液直管临界流速的理论解总是会偏低于其实验得到的结果,这是由于在实验中直管的初始缺陷是不可避免的.

参考文献:

- [1] Öz H R, Boyacı H. Transverse vibrations of tensioned pipes conveying fluid with time-dependent velocity [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 236(2): 259 – 276.
- [2] Paidoussis M P, Semler C, Gagnon M W. Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. Part 2: dynamics of the system with intermediate spring support [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2007, 23: 569 – 587.
- [3] Kuiper G L, Metrikine A V, Battjes J A. A new time-domain drag description and its influence on the dynamic behavior of a cantilever pipe conveying fluid [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2007, 23: 429 – 445.
- [4] 王忠民,冯振宇,赵凤群,等.弹性地基输液管道的耦合模态颤振分析[J]. *应用数学和力学*, 2000, 21(10): 1060 – 1068.
- [5] 王忠民,张战午,李会侠.粘弹性地基上粘弹性输流管道的稳定性分析[J]. *计算机力学学报*, 2005, 22(5): 613 – 617.
- [6] 马小强,向宇,黄玉盈.求解弹性地基上任意支承输液直管稳定性问题的传递矩阵法[J]. *工程力学*, 2004, 21(4): 194 – 198.
- [7] 李宝辉,高行山.输液曲管平面内振动的波动方法研究[J]. *固体力学*, 2012, 33(3): 302 – 308.
- [8] Misra A K, Paidoussis M P, Van K S. On the dynamics of curved pipes transporting fluid. Part I: inextensible theory [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1988, 2: 221 – 244.
- [9] Misra A K, Paidoussis M P, Van K S. On the dynamics of curved pipes transporting fluid. Part II: extensible theory [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1988, 2: 245 – 261.
- [10] Wang L, Ni Q. In plane vibration analysis of curved pipes conveying fluid using the generalized differential quadrature rule [J]. *Computer and Structures*, 2008, 86: 133 – 139.
- [11] Jung D H, Chung J T, Yoo H H. New fluid velocity expression in an extensible semi-circular pipe conveying fluid [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 304: 382 – 390.
- [12] Hu Y J, Zhu Y Y, Cheng C J. Differential-algebraic approach to large deformation analysis of frame structures subjected to dynamic loads [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, 29(4): 441 – 452.
- [13] Lee S I, Chung J. New nonlinear modeling for vibration analysis of a straight pipe conveying fluid [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 254(2): 313 – 325.

(编辑:丁红艺)