

关于 H -联图的拉普拉斯特征值

娄源源, 吴宝丰

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: H -联图是在不交图 $G_1, G_2, \dots, G_k$ 的基础上, 对于 H 中的任意两点 i, j , 若 $ij \in E(H)$, 则将 G_i 的每一点与 G_j 的每一点相连所得到的图, 其中, H 的顶点集为 $\{1, 2, \dots, k\}$. 特别地, $\{G_1, G_2\}$ 的 P_2 -联图就是普通联图 $G_1 \vee G_2$. 本文研究了 H -联图的拉普拉斯特征多项式, 给出了 H -联图的拉普拉斯谱与图 $G_1, G_2, \dots, G_k$ 以及基图 H 的拉普拉斯谱之间的关系. 进一步研究了基图分别为完全图、完全二部图时的 H -联图, 给出了 K_k -联图和 $K_{s,t}$ -联图的拉普拉斯谱以及相应的特征多项式. 另外, 证明了当基图 H 是完全图、完全二部图或阶数小于等于 4 的图 (除 P_4 外) 时, L -整图 $\{G_1, G_2, \dots, G_k\}$ 的 H -联图也是 L -整的.

关键词: H -联图; 拉普拉斯特征值; 整图

中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

Laplacian Eigenvalues on the H -Join Graphs

LOU Yuanyuan, WU Baofeng

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The H -join graph is obtained on the basis of disjoint graphs $G_1, G_2, \dots, G_k$ and by joining each vertex of G_i to each vertex of G_j whenever i is adjacent to j in H . In particular, the P_2 -join graphs $\{G_1, G_2\}$ is the ordinary join graph $G_1 \vee G_2$. The Laplacian characteristic polynomial of the H -join graph was studied, and the relations between the Laplacian spectrum of the H -join graph and those of the graphs G_i ($i = 1, 2, \dots, k$) and H were obtained, especially for the K_k -join graph and $K_{s,t}$ -join graph. Moreover, the fact was proven that the H -join of Laplacian integral graphs $\{G_1, G_2, \dots, G_k\}$ is also Laplacian integral when H is the complete graph, the complete bipartite graph or the graph of order not greater than 4 except for P_4 .

Key words: H -join graph; Laplacian eigenvalue; integral graph

收稿日期: 2013-12-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11301340, 11201303); 上海市自然科学基金资助项目(12ZR1420300)

第一作者: 娄源源(1988-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 代数图论. E-mail: xylouyuanyuan@163.com

通信作者: 吴宝丰(1978-), 男, 讲师. 研究方向: 代数图论. E-mail: baufern@usst.edu.cn

1 基本概念

考虑简单无向图. 设图 $G = (V, E)$, 其中, $V = V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ 是 G 的顶点集, $E = E(G) = \{ij \mid i, j \in V, \text{且 } i \sim j\}$ 是 G 的边集. 定义 $N_G(i) = \{j \in V \mid ij \in E\}$ 为顶点 i 的邻点集, $d_i = |N_G(i)|$ 为顶点 i 的度.

图 G 的邻接矩阵定义为 $A(G) = (a_{ij})$, 其中, 当 $ij \in E(G)$ 时, $a_{ij} = 1$; 否则, $a_{ij} = 0$. 图 G 的拉普拉斯矩阵定义为 $L(G) = D(G) - A(G)$, 其中, $D(G) = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 为 G 的度对角矩阵.

考虑方阵 M , M 的特征多项式表示为 $P(M, x) = \det(xI - M)$, M 的特征值即为 $P(M, x)$ 的根, 其中, 0 特征值的重数称为 M 的零度. M 的谱 $\text{Spec}(M)$ 是由 M 的特征值组成的多重集合, 用符号 $a + \text{Spec}(M)$ (或 $a\text{Spec}(M)$) 表示 $\text{Spec}(M)$ 中的每一个元素加上 a (或乘以 a). 特别地, 图 G 的拉普拉斯特征多项式记为 $P_L(G, x) = |xI - L(G)|$, 图 G 的拉普拉斯谱记为 $\text{Spec}_L(G)$ (即 $L(G)$ 的谱). 若 $L(G)$ 的特征值全为整数, 则称图 G 是 L -整的.

定义 1^[1-2] 设图 H 的顶点集为 $\{1, 2, \dots, k\}$, G_i 为 n_i 阶图 ($i = 1, 2, \dots, k$), 则 $\{G_1, G_2, \dots, G_k\}$ 的 H -联图, 记作 $\vee_H \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$, 它是在 $G_1, G_2, \dots, G_k$ 的基础上, 对于 H 中的任意两点 i, j , 若 $ij \in E(H)$, 则将 G_i 的每一点与 G_j 的每一点相连所得到的图. 图 H 称为联图 $\vee_H \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$ 的基图.

特别地, 当基图 $H = P_2$ 时, P_2 -联图就是普通的联图, 即 $\vee_{P_2} \{G_1, G_2\} = G_1 \vee G_2$. 当所有 G_i ($i = 1, 2, \dots, k$) 相同, 均为 G 时, 为方便起见, 用符号 $H \odot G$ 来代替 $\vee_H \{G, G, \dots, G\}$, 即 H 的每一点都被“吹大”成 G 后所得到的图.

联图的特征多项式 (或谱) 已被广泛研究, 如文献[1]较早地研究了它的邻接特征多项式, 文献[2]研究了它的邻接谱和拉普拉斯谱. 另外, P_2 -联图在图的标号理论研究中也引起了高度关注.

2 H -联图的拉普拉斯特征多项式

定义 2 设图 H 的顶点集为 $\{1, 2, \dots, k\}$, G_i 为 n_i 阶图 ($i = 1, 2, \dots, k$), 考虑 H -联图 $\vee_H \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$, 定义:

- a. 对于任意 $i \in V(H)$, $N_i = \sum_{j \in N_H(i)} n_j$;
 b. $C_L(H) = (c_{ij})$, 其中, $c_{ij} = \begin{cases} N_i, & i = j \\ -\sqrt{n_i n_j}, & ij \in E(H) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$.

引理 1^[2] 设图 H 的顶点集为 $\{1, 2, \dots, k\}$, G_i 为 n_i 阶图 ($i = 1, 2, \dots, k$), 若 $G = \vee_H \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$, 则

$$\text{Spec}_L(G) = \left(\bigcup_{i=1}^k (N_i + (\text{Spec}_L(G_i) \setminus \{0\})) \right) \cup \text{Spec}(C_L(H))$$

定义 3^[3-5] 设 $\pi: V(G) = V_1 \dot{\cup} V_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_k$ 是图 G 的一个 k -划分. 若对于任意 $i \neq j$ ($i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$), V_i 中的任一点 u 在 V_j 中的邻点的个数均等于常数 b_{ij} , 则称 π 为 G 的一个几乎均匀划分. 进一步, 若对于任意 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, V_i 中的任一点 u 在 V_i 中的邻点的个数均等于常数 b_{ii} , 则称 π 为 G 的一个均匀划分.

对于 H -联图 $G = \vee_H \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$, 显然, $\pi: V(G) = V(G_1) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V(G_k)$ 是 G 的一个几乎均匀划分.

定义 4^[4] 设 $\pi: V(G) = V_1 \dot{\cup} V_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_k$ 为图 G 的一个几乎均匀划分, 参数为 b_{ij} ($i \neq j$, 且 $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$). 定义 G 的关于 π 的 L -因子矩阵 L^π 为

$$(L^\pi)_{ij} = \begin{cases} \sum_{s=1, s \neq i}^k b_{is}, & i = j \\ -b_{ij}, & i \neq j \end{cases}$$

由定义可知, L^π 的行和均为 0, 从而 0 是它的一个特征值, L^π 是奇异矩阵. 不难验证, 对于 H -联图 $G = \vee_H \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$, 它在划分 $\pi: V(G) = V(G_1) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V(G_k)$ 下的 L -因子矩阵就是 $L(G)$ 基于该划分的商矩阵.

引理 2 设图 H 的顶点集为 $\{1, 2, \dots, k\}$, G_i 为 n_i 阶图 ($i = 1, 2, \dots, k$), 若 $G = \vee_H \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$, L^π 为 G 的关于划分 $\pi: V(G) = V(G_1) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V(G_k)$ 的 L -因子矩阵, $C_L(H)$ 同定义 2, 则矩阵 L^π 与 $C_L(H)$ 相似.

证明 此时, L^π 和 $C_L(H) = (c_{ij})$ 分别为

$$(L^\pi)_{ij} = \begin{cases} N_i, & i = j \\ -n_j, & ij \in E(H) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$c_{ij} = \begin{cases} N_i, & i = j \\ -\sqrt{n_i n_j}, & ij \in E(H) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\text{取 } P = \begin{bmatrix} \sqrt{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{n_k} \end{bmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}C_L(H)P =$$

L^π , 得证.

定理 1 设图 H 的顶点集为 $\{1, 2, \dots, k\}$, G_i 为 n_i 阶图 ($i = 1, 2, \dots, k$), $G = \bigvee_H \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$, L^π 为 G 的关于划分 $\pi: V(G) = V(G_1) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V(G_k)$ 的 L -因子矩阵, 则

$$\text{Spec}_L(G) = \left(\bigcup_{i=1}^k (N_i + (\text{Spec}_L(G_i) \setminus \{0\})) \right) \cup \text{Spec}(L^\pi)$$

即

$$P_L(G, x) = P(L^\pi, x) \prod_{i=1}^k \frac{P_L(G_i, x - N_i)}{x - N_i}$$

证明 直接由引理 1 和引理 2 可得.

例 1 设 $G_1 = 2K_1$, $G_2 = P_2$, $G_3 = C_3$, 基图 $H = P_3$, 考虑联图 $G = \bigvee_{P_3} \{G_1, G_2, G_3\}$ (图 1) 的拉普拉斯谱. 此时 $(N_1, N_2, N_3) = (2, 5, 2)$, $\text{Spec}_L(G_1) = \{0, 0\}$, $\text{Spec}_L(G_2) = \{2, 0\}$, $\text{Spec}_L(G_3) = \{3, 3, 0\}$,

$$L^\pi = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} \text{Spec}_L(G) &= (2 + \{0\}) \cup (5 + \{2\}) \cup \\ & (2 + \{3, 3\}) \cup \text{Spec}(L^\pi) = \\ & \{2\} \cup \{7\} \cup \{5, 5\} \cup \{7, 2, 0\} = \\ & \{7, 7, 5, 5, 2, 2, 0\} \end{aligned}$$

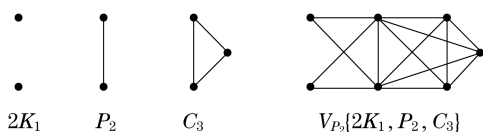


图 1 $\{2K_1, P_2, C_3\}$ 的 P_3 -联图

Fig.1 P_3 -join graph of $\{2K_1, P_2, C_3\}$

定理 2 在定理 1 中, L^π 的零度等于 H 的连通分支的个数.

证明 现分两种情形讨论.

情形 1 H 连通. 若 H 的阶数为 1, 则 L^π 为 0, 结论成立; 若 H 的阶数大于等于 2, 此时 $G (G = \bigvee_H \{G_1, G_2, \dots, G_k\})$ 也是连通的, 且对于任意 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, 有 $N_i > 0$, 所以, $N_i + (\text{Spec}_L(G_i) \setminus \{0\})$ 中的元素全为正数. 而 0 是 $L(G)$ 的一个特征值, 所以, 0 特征值全在 $\text{Spec}(L^\pi)$ 中, 再根据 G 的连通性知 L^π 的零度等于 1.

情形 2 H 不连通. 设 H 的连通分支为 $\{H_1, H_2, \dots, H_c\}$, 根据联图的定义可知, H -联图可以转化为 H 的 c 个连通分支 H_i -联图的并 ($i = 1, 2, \dots, c$). 此时, L^π 是一个分块对角矩阵, 第 i 个对角块 L_i^π 对应 H_i -联图的 L -因子矩阵. 由情形 1 知 L_i^π 的零度等于 1, 因此, L^π 的零度等于 c .

综合以上情形, 定理 2 得证.

推论 1^[4] 设 G_i 为 n_i 阶图 ($i = 1, 2$), 则 $G_1 \vee G_2$ 的拉普拉斯特征多项式为

$$P_L(G_1 \vee G_2, x) = \frac{x(x - n_1 - n_2)}{(x - n_1)(x - n_2)} \cdot P_L(G_1, x - n_2) P_L(G_2, x - n_1)$$

证明 此时 $N_1 = n_2, N_2 = n_1, L^\pi = \begin{bmatrix} n_2 & -n_2 \\ -n_1 & n_1 \end{bmatrix}$,

由定理 1 可知结论成立.

推论 2 设图 H 的度序列为 $d_1, d_2, \dots, d_k$, $G_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 均为 n 阶图. 若 $G = \bigvee_H \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$, 则

$$\text{Spec}_L(G) = \left(\bigcup_{i=1}^k (nd_i + (\text{Spec}_L(G_i) \setminus \{0\})) \right) \cup (n \text{Spec}_L(H))$$

即

$$P_L(G, x) = n^k P_L(H, \frac{x}{n}) \prod_{i=1}^k \frac{P_L(G_i, x - nd_i)}{x - nd_i}$$

证明 这里 $N_i = nd_i (i = 1, 2, \dots, k)$. 设 L^π 为 G 的关于划分 $\pi: V(G) = V(G_1) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V(G_k)$ 的 L -因子矩阵, 则 $(L^\pi)_{ij} = \begin{cases} nd_i, & i = j \\ -n, & ij \in E(H) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 从而 $L^\pi = nL(H)$. 由定理 1 可知结论成立.

推论 3 设图 H 的度序列为 $d_1, d_2, \dots, d_k$, G 为 n 阶图, 则

$$\text{Spec}_L(H \odot G) = \left(\bigcup_{i=1}^k (nd_i + (\text{Spec}_L(G) \setminus \{0\})) \right) \cup (n \text{Spec}_L(H))$$

即

$$P_L(H \odot G, x) = n^k P_L\left(H, \frac{x}{n}\right) \prod_{i=1}^k \frac{P_L(G, x - nd_i)}{x - nd_i}$$

推论 4 设 $H = K_k$ 为 k 阶完全图, G_i 为 n_i 阶图 ($i = 1, 2, \dots, k$), 若 $G = \vee_H \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$,

$$N = \sum_{j=1}^k n_j, \text{ 则}$$

$$\text{Spec}_L(G) = \left(\bigcup_{i=1}^k (N - n_i + (\text{Spec}_L(G_i) \setminus \{0\})) \right) \cup \{0, N^{(k-1)}\}$$

即

$$P_L(G, x) = x(x - N)^{k-1} \prod_{i=1}^k \frac{P_L(G_i, x - N + n_i)}{x - N + n_i}$$

证明 G 的关于划分 $\pi: V(G) = V(G_1) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V(G_k)$ 的 L -因子矩阵

$$L^\pi = \begin{bmatrix} N_1 & -n_2 & \cdots & -n_k \\ -n_1 & N_2 & \cdots & -n_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n_1 & -n_2 & \cdots & N_k \end{bmatrix}$$

其中

$$N_i = \sum_{j \in N_H(i)} n_j = N - n_i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

$$P(L^\pi, x) = |xI_k - L^\pi| =$$

$$\begin{vmatrix} x - N_1 & n_2 & \cdots & n_k \\ n_1 & x - N_2 & \cdots & n_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n_1 & n_2 & \cdots & x - N_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & n_2 & \cdots & n_k \\ x & x - N_2 & \cdots & n_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & n_2 & \cdots & x - N_k \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x - N & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & x - N \end{vmatrix} = x(x - N)^{k-1}$$

故 $\text{Spec}(L^\pi) = \{0, N^{(k-1)}\}$, 由定理 1, 结论得证.

推论 5 设 $H = K_{s,t}$ 为完全二部图, 其二分类为 (X, Y) , $X = \{1, 2, \dots, s\}$, $Y = \{s+1, s+2, \dots, s+t\}$, G_i 为 n_i 阶图 ($i = 1, 2, \dots, s+t$), 若 $G = \vee_H \{G_1, G_2, \dots, G_{s+t}\}$, $N_X = \sum_{i \in Y} n_i$, $N_Y = \sum_{i \in X} n_i$, 则

$$\text{Spec}_L(G) = \left(\bigcup_{i \in X} (N_X + (\text{Spec}_L(G_i) \setminus \{0\})) \right) \cup \left(\bigcup_{i \in Y} (N_Y + (\text{Spec}_L(G_i) \setminus \{0\})) \right) \cup$$

$$\{0, N_X + N_Y, N_X^{(s-1)}, N_Y^{(t-1)}\}$$

即

$$P_L(G, x) = x(x - N_X - N_Y) \cdot (x - N_X)^{s-1} (x - N_Y)^{t-1} \cdot$$

$$\prod_{i \in X} \frac{P_L(G_i, x - N_X)}{x - N_X} \prod_{i \in Y} \frac{P_L(G_i, x - N_Y)}{x - N_Y}$$

证明 对于任意 $i \in X$, 有 $N_i = N_X$, 对于任意 $j \in Y$, 有 $N_j = N_Y$. G 的关于划分 $\pi: V(G) = V(G_1) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V(G_k)$ 的 L -因子矩阵

$$L^\pi = \begin{bmatrix} N_X & \cdots & 0 & -n_{s+1} & \cdots & -n_{s+t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & N_X & -n_{s+1} & \cdots & -n_{s+t} \\ -n_1 & \cdots & -n_s & N_Y & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n_1 & \cdots & -n_s & 0 & \cdots & N_Y \end{bmatrix}$$

从而特征多项式

$$P(L^\pi, x) =$$

$$\begin{vmatrix} x - N_X & \cdots & 0 & n_{s+1} & \cdots & n_{s+t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & x - N_X & n_{s+1} & \cdots & n_{s+t} \\ n_1 & \cdots & n_s & x - N_Y & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n_1 & \cdots & n_s & 0 & \cdots & x - N_Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - N_X & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & x - N_X & n_{s+1} & \cdots & N_X \\ 0 & \cdots & 0 & x - N_Y & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n_1 & \cdots & N_Y & 0 & \cdots & x - N_Y \end{vmatrix} = x(x - N_X - N_Y)(x - N_X)^{s-1}(x - N_Y)^{t-1}$$

故 $\text{Spec}(L^\pi) = \{0, N_X + N_Y, N_X^{(s-1)}, N_Y^{(t-1)}\}$, 由定理 1, 结论得证.

3 L -整图

整图的谱完全由整数构成, 哪些图是整图呢? 该问题由 Harary 等^[6]于 1973 年针对邻接谱提出, 同时指出了此类问题具有一定的难度. 整图的数量是无限的, 而且在各类图集中都可能存在, 但是, 它们仍然是非常稀少的, 并且难以找到. 例如, 最大度固定的整图, 其数量是相当有限的. 通常是利用已知的整图通过图的运算来构造新的整图^[6-8]. 对于拉普拉斯谱, 完全图、完全二部图都是 L -整的, 所以,

很自然地想到这样的问题:利用已知的 L -整图,如何选择基图 H 使构造的 H -联图也是 L -整的.

现将证明,当基图 H 是完全图、完全二部图或阶数小于等于 4 的图(除 P_4 外)时,若 $G_i (i=1, 2, \dots, k)$ 是 L -整的,则 $\vee_H \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$ 也是 L -整的.定理 3 和定理 4 可直接应用定理 1 和推论 5 得到.

定理 3 设图 H 的顶点集为 $\{1, 2, \dots, k\}$, G_i 为 n_i 阶图($i=1, 2, \dots, k$),若 $G = \vee_H \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$, L^π 为 G 的关于划分 $\pi: V(G) = V(G_1) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V(G_k)$ 的 L -因子矩阵,则 G 是 L -整的,当且仅当 $G_1, G_2, \dots, G_k$ 是 L -整的,以及矩阵 L^π 的特征值都是整数.

定理 4 设图 H 的顶点集为 $\{1, 2, \dots, k\}$, G_i 为 n_i 阶图($i=1, 2, \dots, k$),若 $G = \vee_H \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$, 则

a. 当 $G_i (i=1, 2, \dots, k)$ 的阶数均相同时, G 是 L -整的,当且仅当 $G_1, G_2, \dots, G_k$ 和 H 都是 L -整的;

b. 当 H 为 k 阶完全图或完全二部图时, G 是 L -整的,当且仅当 $G_1, G_2, \dots, G_k$ 是 L -整的.

推论 6 设 H 和 G 为任意两个图,则 $H \odot G$ 是 L -整的,当且仅当 H 和 G 都是 L -整的.

定理 5 设 G_i 为 n_i 阶 L -整图($i=1, 2, \dots, k$), H 为任意 k 阶图,若 $k \leq 3$, 则联图 $\vee_H \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$ 是 L -整的.

证明 当 H 不连通时, H -联图可转化为其连通分支 H_i -联图的并,显然, H_i 阶数也不超过 3, 故可直接假设 H 连通. 设 $G = \vee_H \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$.

当 $k=1$ 时, $G = G_1$ 是 L -整的.

当 $k=2$ 时, $G = G_1 \vee G_2$, 由于 G_1, G_2 都是 L -整的,由推论 1 知 G 也是 L -整的.

当 $k=3$ 时, 则 $H = K_{1,2}$ 或 $H = K_3$, 由定理 4b 可得 G 是 L -整的.

综上所述, $\vee_H \{G_1, \dots, G_k\}$ 是 L -整的.

定理 6 设 G_i 为 n_i 阶 L -整图($i=1, 2, 3, 4$), H 为 4 阶图,且 $H \neq P_4$, 则 $\vee_H \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ 是 L -整的.

证明 当 H 不连通时, H -联图可转化为其连通分支 H_i -联图的并,根据定理 5, 结论成立. 当 H 连通时, 由于 $H \neq P_4$, 故只需考虑以下 3 种情形:

a. $H = K_4, K_{1,3}$ 或 $K_{2,2}$, 此时, 由定理 4b 可知结论成立.

b. $H = K_3 \cup e$, 其中, K_3 的顶点集为 $\{1, 2, 3\}$, $e = 14$ 是连接顶点 1 和 4 的一条边, 此时

$$L^\pi = \begin{bmatrix} n_2 + n_3 + n_4 & -n_2 & -n_3 & -n_4 \\ -n_1 & n_1 + n_3 & -n_3 & 0 \\ -n_1 & -n_2 & n_1 + n_2 & 0 \\ -n_1 & 0 & 0 & n_1 \end{bmatrix}$$

于是, $\text{Spec}(L^\pi) = \{0, n_1, n_1 + n_2 + n_3, n_1 + n_2 + n_3 + n_4\}$, 故 $\vee_H \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ 是 L -整的.

c. $H = C_4 \cup e$, 其中 $e = 13$ 是连接顶点 1 和 3 的一条边, 此时

$$L^\pi = \begin{bmatrix} n_2 + n_3 + n_4 & -n_2 & -n_3 & -n_4 \\ -n_1 & n_1 + n_3 & -n_3 & 0 \\ -n_1 & -n_2 & n_1 + n_2 + n_4 & -n_4 \\ -n_1 & 0 & -n_3 & n_1 + n_3 \end{bmatrix}$$

于是, $\text{Spec}(L^\pi) = \{0, n_1 + n_3, (n_1 + n_2 + n_3 + n_4)^{(2)}\}$, 故 $\vee_H \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ 是 L -整的.

现考虑图 $H \odot G$ 的 L -整情况, 当 G 是 L -整的, 若基图 H 是完全图、完全二部图或阶数小于等于 4 的图(除 P_4 外)时, 显然, $H \odot G$ 是 L -整的. 另外, 根据推论 6, 当 G 是 L -整的, $H \odot G$ 是 L -整的, 当且仅当 H 是 L -整的.

引理 3^[9] 设 H 为 $k (k > 1)$ 阶树, 直径为 d , $a(H)$ 为 H 的代数连通度, 则

$$a(H) \leq 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{d+1} \right)$$

引理 4 设 H 为 k 阶树, 则 H 是 L -整图, 当且仅当 H 为星图 $K_{1,k-1}$.

证明 星图是 L -整的, 所以, 充分性显然, 现证必要性.

当 $k=1, 2$ 或 3 时, 此时的树都是唯一的, 即星图, 结论成立.

当 $k \geq 4$ 时, 若 $H \neq K_{1,k-1}$, 则 H 的直径 $d \geq 3$, 由引理 3 可知

$$a(H) \leq 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{d+1} \right) \leq 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{4} \right) < 0.59$$

再根据 H 的连通性可知, $0 < a(H) < 0.59$, 从而 $a(H)$ 不是整数, 即 $L(H)$ 的第二小特征值不是整数. 这与 H 是 L -整图矛盾, 所以, $H = K_{1,k-1}$.

定理 7 设 H 为 k 阶树, G 为 L -整图, 则 $H \odot G$ 是 L -整的, 当且仅当 $H = K_{1,k-1}$.

证明 由推论 6 和引理 4 可知结论成立.

参考文献:

[1] Schwenk A J. Computing the characteristic polynomial

- of a graph[J]. Lecture Notes in Mathematics, 1974, 406:153 – 172.
- [2] Cardoso D M, de Freitas M A A, Martins E A, et al. Spectra of graphs obtained by a generalization of the join graph operation[J]. Discrete Mathematics, 2013, 313(5):733 – 741.
- [3] Wang J F, Belardob F. A note on the signless Laplacian eigenvalues of graphs[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2011, 435(10):2585 – 2590.
- [4] Cvetković D, Rowlinson P, Simić S. An introduction to the theory of graph spectra[M]. New York:Cambridge University Press, 2010.
- [5] Cardoso D M, Delorme C, Rama P. Laplacian eigenvectors and eigenvalues and almost equitable partitions[J]. European Journal of Combinatorics, 2007, 28(3):665 – 673.
- [6] Harary F, Schwenk A J. Which graphs have integral spectra? [J]. Lecture Notes in Mathematics, 1974, 406:45 – 51.
- [7] Grone R, Merris R. The Laplacian spectrum of a graph II[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 1994, 7(2):221 – 229.
- [8] 陈永玲, 何常香. 二部双圈图的拉普拉斯系数[J]. 上海理工大学学报, 2012, 34(5):481 – 486.
- [9] Grone R, Merris R, Sunder V S. The Laplacian spectrum of a graph [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 1990, 11(2):218 – 238.
- [10] 沈富强, 吴宝丰. 最小 Q -特征值为给定整数的一类图[J]. 上海理工大学学报, 2014, 36(5):425 – 428.
- (编辑:石 瑛)

(上接第 129 页)

- [11] Wazwaz A M. Multiple-soliton solutions for the Lax-Kadomtsev-Petviashvili (Lax-KP) equation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 201(1/2):168 – 174.
- [12] 于金倩, 王婷婷. $(2+1)$ 维 Lax-Kadomtsev-Petviashvili (Lax-KP) 方程的对称和精确解[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2009, 22(3):14 – 18.
- [13] Xu G Q. Painlevé integrability of a generalized fifth-order KdV equation with variable coefficients: exact solutions and their interactions[J]. Chinese Physics B, 2013, 22(5):050203.
- [14] Zhi H Y, Chang H. Invariance of Painlevé property for some reduced $(1+1)$ -dimensional equations [J]. Chinese Physics B, 2013, 22(11):110203.
- [15] 胡恒春, 王丽金, 刘磊. KdV-Burgers-Kuramoto 方程另一类指数函数求法及新的精确解[J]. 上海理工大学学报, 2013, 35(2):131 – 134.
- [16] 张玲, 桑本文, 胡恒春. 耦合 mKdV 系统的非奇异正子解、负子解及复子解[J]. 上海理工大学学报, 2012, 34(1):76 – 80.
- [17] 斐胜兵, 张卫国, 李想. 色散项数为负的 MKdV-Brugers 方程的有界行波解[J]. 上海理工大学学报, 2014, 36(3):205 – 216.
- (编辑:董 伟)