

分担依赖于函数的常数亚纯函数正规族

贾志晶, 叶亚盛

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究关于分担值的亚纯函数族的正规性, 证明了如下结果: 设 $k, n (\geq k+3)$ 是两个正整数, $\mathcal{F}$ 为单位圆盘 Δ 内的一族亚纯函数, 如果对于每一个 $f \in \mathcal{F}$, f 的零点重级 $\geq k$, 且存在仅依赖于 f 的非零有穷复数 b_f, c_f 满足: $\frac{b_f}{c_f}$ 是一个常数; $\min\{\sigma(0, b_f), \sigma(0, c_f), \sigma(b_f, c_f)\} \geq m$, 这里 $m > 0$; 对于每一对 $f, g \in \mathcal{F}$, 有 $f^{(k)} - \frac{1}{b_f^{n-1}}f^n = c_f \Leftrightarrow g^{(k)} - \frac{1}{b_g^{n-1}}g^n = c_g$, 那么 $\mathcal{F}$ 在 Δ 内正规.

关键词: 亚纯函数; 全纯函数; 正规族; 分担值

中图分类号: O 174.52

文献标志码: A

Normal Families of Meromorphic Functions Concerning Sharing Constants Depending on Function

JIA Zhijing, YE Yasheng

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Let k and $n (\geq k+3)$ be two positive integers, and $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in unit disk Δ . If for each function $f \in \mathcal{F}$, all zeros of f have multiplicity k at least, and there exist nonzero finite complex numbers b_f, c_f depending on f satisfying: $\frac{b_f}{c_f}$ is a constant; $\min\{\sigma(0, b_f), \sigma(0, c_f), \sigma(b_f, c_f)\} \geq m$, for some $m > 0$; $f^{(k)} - \frac{1}{b_f^{n-1}}f^n = c_f \Leftrightarrow g^{(k)} - \frac{1}{b_g^{n-1}}g^n = c_g$, for each $f, g \in \mathcal{F}$. Then $\mathcal{F}$ is normal in Δ .

Key words: meromorphic functions; holomorphic functions; normal family; shared value

1 问题的提出

设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, 如果对于 $\mathcal{F}$

中任一函数序列 $\{f_n(z)\}$ 均可选出一个子序列 $\{f_{n_k}(z)\}$ 在区域 D 上按球距内闭一致收敛, 则称 $\mathcal{F}$ 在区域 D 内正规.

设 f 和 g 是区域 D 内的两个亚纯函数, a 是一

收稿日期: 2013-12-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11371139)

第一作者: 贾志晶(1990-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 复分析. E-mail: jiazhijing08@163.com

通信作者: 叶亚盛(1960-), 男, 副教授. 研究方向: 复分析. E-mail: yashengye@aliyun.com

个复数.若 $f(z) - a$ 与 $g(z) - a$ 在 D 内具有相同的零点,则称 f 与 g 在区域 D 内分担 a ,或称 IM 分担 a .若 $f(z) - a$ 与 $g(z) - a$ 在 D 内具有相同的零点,并且零点重级也相同,则称 f 与 g 在区域 D 内 CM 分担 a .用 $f = a \Rightarrow g = a$ 来表示:若 $f = a$,则 $g = a$.

本文用 $\sigma(x, y)$ 来表示 x 和 y 的球面距离,球面距离的定义见文献[1].

Pang 等^[2]证明了以下结果:

定理 1 设 $\mathcal{F}$ 为单位圆盘 Δ 内的一族亚纯函数, a, b 是两个判别的有穷复数, c 是一个非零复数.如果对于任意的 $f \in \mathcal{F}$, $f(z) = 0 \Leftrightarrow f'(z) = a$ 和 $f(z) = c \Leftrightarrow f'(z) = b$, 那么 $\mathcal{F}$ 在 Δ 内正规.

Singh 等^[3]改进了定理 1 的结果,证明定理 2.

定理 2 设 $\mathcal{F}$ 为单位圆盘 Δ 内的一族亚纯函数,对于每一个 $f \in \mathcal{F}$, 存在仅依赖于 f 的非零有穷复数 b_f, c_f , 若满足以下条件,则 $\mathcal{F}$ 在 Δ 内正规:

- a. $\frac{b_f}{c_f}$ 是一个常数;
- b. $\min \{ \sigma(0, b_f), \sigma(0, c_f), \sigma(b_f, c_f) \} \geq m$, $m > 0$;
- c. $f(z) = 0 \Leftrightarrow f'(z) = 0$ 和 $f(z) = c_f \Leftrightarrow f'(z) = b_f$.

文献[4-11]证明了 Hayman 猜想.

定理 3 设 $n (\geq 3)$ 是一个正整数, $a (\neq 0), b$ 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数,对于任意的 $f \in \mathcal{F}$, $f' - af^n \neq b$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

Zhang^[12]将定理 3 推广为分担情形.

定理 4 设 $n (\geq 4)$ 是一个正整数, $a (\neq 0), b$ 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数,对于每一对 $f, g \in \mathcal{F}$, $f' - af^n$ 和 $g' - ag^n$ 在 D 内 IM 分担 b , 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

最近,陈玮等^[13]在定理 4 的基础上证明定理 5.

定理 5 设 $n (\geq 4)$ 是一个正整数, $\mathcal{F}$ 为单位圆盘 Δ 内的一族亚纯函数,对于每一个 $f \in \mathcal{F}$, 存在仅依赖于 f 的非零有穷复数 b_f, c_f , 若满足以下条件,则 $\mathcal{F}$ 在 Δ 内正规:

- a. $\frac{b_f}{c_f}$ 是一个常数;
- b. $\min \{ \sigma(0, b_f), \sigma(0, c_f), \sigma(b_f, c_f) \} \geq m$, $m > 0$;
- c. 对于每一对 $f, g \in \mathcal{F}$, 有 $f' - \frac{1}{b_f^{n-1}}f^n = c_f \Leftrightarrow$

$$g' - \frac{1}{b_g^{n-1}}g^n = c_g.$$

仇惠玲等^[14]和 Yuan 等^[15]证明了如下定理:

定理 6 设 $k, n (\geq k+3)$ 是两个正整数, $a (\neq 0), b$ 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数,并且族中每个函数的零点至少是 k 重.如果对于 $\mathcal{F}$ 中的任意两个函数 f 和 g , $f^{(k)} - af^n$ 与 $g^{(k)} - ag^n$ 在 D 内 IM 分担 b , 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

定理 7 设 $k, n (\geq 2)$ 是两个正整数, $a (\neq 0), b$ 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族全纯函数,并且族中每个函数的零点至少是 k 重.如果对于 $\mathcal{F}$ 中的任意两个函数 f 和 g , $f^{(k)} - af^n$ 与 $g^{(k)} - ag^n$ 在 D 内 IM 分担 b , 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

本文研究若将定理 5 中 f' 换为 $f^{(k)}$, 结论是否仍然成立,即证明定理 8 和定理 9.

定理 8 设 $k, n (\geq k+3)$ 是两个正整数, $\mathcal{F}$ 为单位圆盘 Δ 内的一族亚纯函数,如果对于每一个 $f \in \mathcal{F}$, f 的零点重级 $\geq k$, 并且存在仅依赖于 f 的非零有穷复数 b_f, c_f , 若满足以下条件,则 $\mathcal{F}$ 在 Δ 内正规:

- a. $\frac{b_f}{c_f}$ 是一个常数;
- b. $\min \{ \sigma(0, b_f), \sigma(0, c_f), \sigma(b_f, c_f) \} \geq m$, $m > 0$;
- c. 对于每一对 $f, g \in \mathcal{F}$, 有 $f^{(k)} - \frac{1}{b_f^{n-1}}f^n =$

$$c_f \Leftrightarrow g^{(k)} - \frac{1}{b_g^{n-1}}g^n = c_g.$$

定理 9 设 $k, n (\geq 2)$ 是两个正整数, $\mathcal{F}$ 为单位圆盘 Δ 内的一族全纯函数,如果对于每一个 $f \in \mathcal{F}$, f 的零点重级 $\geq k$, 并且存在仅依赖于 f 的非零有穷复数 b_f, c_f , 若满足以下条件,则 $\mathcal{F}$ 在 Δ 内正规:

- a. $\frac{b_f}{c_f}$ 是一个常数;
- b. $\min \{ \sigma(0, b_f), \sigma(0, c_f), \sigma(b_f, c_f) \} \geq m$, $m > 0$;
- c. 对于每一对 $f, g \in \mathcal{F}$, 有 $f^{(k)} - \frac{1}{b_f^{n-1}}f^n =$

$$c_f \Leftrightarrow g^{(k)} - \frac{1}{b_g^{n-1}}g^n = c_g.$$

2 引理

在证明定理之前,需要如下几个引理:

引理 1^[16] 设 p, q 是两个正整数, α 是一个实数且满足 $-q < \alpha < p$, $\mathcal{F}$ 为单位圆盘 Δ 内的一族亚纯函数,如果对于每一个 $f \in \mathcal{F}$, f 的零点重级 $\geq p$, 且 f 的极点重级 $\geq q$. 如果 $\mathcal{F}$ 在 $z_0 \in \Delta$ 处不正规,那

么存在点列 $z_n \in \Delta, |z_n| \rightarrow z_0$, 函数列 $f_n \in \mathcal{F}$, 正数列 $\rho_n \rightarrow 0^+$, 使得 $\frac{f_n(z_n + \rho_n \xi)}{\rho_n^a}$ 在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于一个非常数的亚纯函数 $g(\xi)$, 且 g 的零点重级 $\geq p$, g 的极点重级 $\geq q$, $g^\#(\xi) \leq g^\#(0) = 1$.

引理 2^[14] 设 $k (\geq 2), n (\geq k+3)$ 是两个正整数, a 是一个非零的有穷复数, f 是复平面上一个亚纯函数, 如果 f 的零点重级 $\geq k$, 且 $f^{(k)}(z) - af^n(z)$ 至多有一个判别的零点, 则 f 是一个常数.

引理 3^[14] 设 $k, n (\geq 2)$ 是两个正整数, a 是一个非零的有穷复数, f 是一个整函数, 如果 f 的零点重级 $\geq k$, 且 $f^{(k)}(z) - af^n(z)$ 至多有一个判别的零点, 则 f 是一个常数.

引理 4^[17] 设 m 是一个正整数, a, b 和 c 是 3 个常数, 莫比乌斯变换 g 满足 $\sigma(g(a), g(b)) \geq m, \sigma(g(b), g(c)) \geq m, \sigma(g(c), g(a)) \geq m$, 那么 g 满足李普希茨条件, 即 $\sigma(g(z), g(w)) \leq k_m \sigma(z, w)$, 这里 k_m 是依赖于 m 的常数.

3 定理的证明

由于定理 8 和定理 9 的证明是类似的, 所以只给出定理 8 的证明.

证明 由定理 5, 只需证明 $k \geq 2$ 的情形.

令 $M = \frac{b_f}{c_f}$, 可以取非零常数 b 和 c 满足 $M = \frac{b}{c}$. 对于每一个 $f \in \mathcal{F}$, 定义莫比乌斯变换 $g_f = \frac{c_f}{c} z$, 那么 $g_f^{-1} = \frac{c}{c_f} z$.

以下证明 $G = \{(g_f^{-1} \circ f) | f \in \mathcal{F}\}$ 在 Δ 内正规.

用反证法, 假设 G 在 Δ 内不正规, 那么存在 $z_0 \in \Delta$, 使得 G 在 z_0 处不正规.

根据引理 1, 可以找到 $g_j \in G, z_j \rightarrow z_0, \rho_j \rightarrow 0^+$, 使得

$$\begin{aligned} F_j(\xi) &= \rho_j^{\frac{k}{n-1}} g_j(z_j + \rho_j \xi) = \\ \rho_j^{\frac{k}{n-1}} (g_f^{-1} \circ f_j)(z_j + \rho_j \xi) &= \\ \rho_j^{\frac{k}{n-1}} \frac{c}{c_{f_j}} f_j(z_j + \rho_j \xi) \end{aligned}$$

在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于一个非常数的亚纯函数 $F(\xi)$. 所以, $F_j^{(k)}(\xi) - \frac{1}{b^{\frac{n-1}{n-1}}} F_j^n(\xi) - \rho_j^{\frac{nk}{n-1}} c$ 在 $\mathbb{C}$ 上去掉 $F(\xi)$ 的极点后的区域上内闭一致收敛于

$$F^{(k)}(\xi) - \frac{1}{b^{\frac{n-1}{n-1}}} F^n(\xi).$$

因为

$$\begin{aligned} F_j^{(k)}(\xi) - \frac{1}{b^{\frac{n-1}{n-1}}} F_j^n(\xi) - \rho_j^{\frac{nk}{n-1}} c &= \rho_j^{\frac{nk}{n-1}} \left[g_j^{(k)}(z_j + \rho_j \xi) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{b^{\frac{n-1}{n-1}}} g_j^n(z_j + \rho_j \xi) - c \right] = \rho_j^{\frac{nk}{n-1}} \left[\frac{c}{c_{f_j}} f_j^{(k)}(z_j + \rho_j \xi) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{b^{\frac{n-1}{n-1}}} \left(\frac{c}{c_{f_j}} \right)^n f_j^n(z_j + \rho_j \xi) - c \right] = \rho_j^{\frac{nk}{n-1}} \left[\frac{c}{c_{f_j}} f_j^{(k)} \cdot \right. \\ &\quad \left. (z_j + \rho_j \xi) - \left(\frac{c}{b} \right)^{n-1} \frac{c}{c_{f_j}} f_j^n(z_j + \rho_j \xi) - c \right] = \\ &\quad \rho_j^{\frac{nk}{n-1}} \left[\frac{c}{c_{f_j}} f_j^{(k)}(z_j + \rho_j \xi) - \left(\frac{c_{f_j}}{b} \right)^{n-1} \frac{c}{c_{f_j}} f_j^n \cdot \right. \\ &\quad \left. (z_j + \rho_j \xi) - c \right] = \rho_j^{\frac{nk}{n-1}} \left[\frac{c}{c_{f_j}} f_j^{(k)}(z_j + \rho_j \xi) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{b^{\frac{n-1}{n-1}}} \frac{c}{c_{f_j}} f_j^n(z_j + \rho_j \xi) - c \right] = \rho_j^{\frac{nk}{n-1}} \frac{c}{c_{f_j}} \cdot \\ &\quad \left[f_j^{(k)}(z_j + \rho_j \xi) - \frac{1}{b^{\frac{n-1}{n-1}}} f_j^n(z_j + \rho_j \xi) - c_{f_j} \right] \quad (1) \end{aligned}$$

如果 $F^{(k)}(\xi) - \frac{1}{b^{\frac{n-1}{n-1}}} F^n(\xi) \equiv 0$, 由 $k \geq 2, n \geq k+3$, 那么 $F(\xi)$ 为整函数.

故

$$\begin{aligned} nT(r, F) &= nm(r, F) = m(r, F^n) = \\ m(r, b^{\frac{n-1}{n-1}} F^{(k)}) &\leq (n-1)m(r, b) + \\ m(r, F^{(k)}) &\leq m(r, F) + m(r, \frac{F^{(k)}}{F}) + \\ (n-1)\log^+ |b| &= T(r, F) + S(r, F) \\ \text{即 } (n-1)T(r, F) &\leq S(r, F), \text{ 则 } T(r, F) = S(r, \\ F), \text{ 从而 } F(\xi) &\text{ 为常数, 矛盾, 故 } F^{(k)}(\xi) - \frac{1}{b^{\frac{n-1}{n-1}}} \cdot \\ F^n(\xi) &\neq 0. \end{aligned}$$

由引理 2 可知 $F^{(k)}(\xi) - \frac{1}{b^{\frac{n-1}{n-1}}} F^n(\xi)$ 至少有两个判别的零点. 假设 ξ_0, ξ_0^* 是 $F^{(k)}(\xi) - \frac{1}{b^{\frac{n-1}{n-1}}} F^n(\xi)$ 的两个判别零点. 选择 $\delta (> 0)$ 足够小, 使得

$$\Delta(\xi_0, \delta) \cap \Delta(\xi_0^*, \delta) = \emptyset$$

这里 $\Delta(\xi_0, \delta) = \{\xi | |\xi - \xi_0| < \delta\}$, 且 $\Delta(\xi_0^*, \delta) = \{\xi | |\xi - \xi_0^*| < \delta\}$.

由 Hurwitz 定理, 且考虑式 (1), 则存在点列 $\xi_j \rightarrow \xi_0$ 和 $\xi_j^* \rightarrow \xi_0^*$, 使得对于充分大的 $j, \xi_j \in \Delta(\xi_0, \delta)$ 且 $\xi_j^* \in \Delta(\xi_0^*, \delta)$.

$$f_j^{(k)}(z_j + \rho_j \xi_j) - \frac{1}{b^{\frac{n-1}{n-1}}} f_j^n(z_j + \rho_j \xi_j) - c_{f_j} = 0$$

$$f_j^{(k)}(z_j + \rho_j \xi_j^*) - \frac{1}{b_{f_j}^{n-1}} f_j^n(z_j + \rho_j \xi_j^*) - c_{f_j} = 0$$

由定理条件,对于 $\mathcal{F}$ 中的每一对函数 f 和 g ,有

$$f^{(k)} - \frac{1}{b_f^{n-1}} f^n = c_f \Leftrightarrow g^{(k)} - \frac{1}{b_g^{n-1}} g^n = c_g$$

那么对于任意的正整数 m ,有

$$f_m^{(k)}(z_j + \rho_j \xi_j^*) - \frac{1}{b_{f_m}^{n-1}} f_m^n(z_j + \rho_j \xi_j^*) - c_{f_m} = 0$$

$$f_m^{(k)}(z_j + \rho_j \xi_j^*) - \frac{1}{b_{f_m}^{n-1}} f_m^n(z_j + \rho_j \xi_j^*) - c_{f_m} = 0$$

固定 m ,使 $j \rightarrow \infty$,且 $z_j + \rho_j \xi_j \rightarrow z_0, z_j + \rho_j \xi_j^* \rightarrow z_0$,

$$\text{则 } f_m^{(k)}(z_0) - \frac{1}{b_{f_m}^{n-1}} f_m^n(z_0) - c_{f_m} = 0.$$

由于 $f_m^{(k)}(z) - \frac{1}{b_{f_m}^{n-1}} f_m^n(z) - c_{f_m}$ 的零点没有聚点,因此

$$z_j + \rho_j \xi_j = z_0, z_j + \rho_j \xi_j^* = z_0$$

$$\xi_j = \frac{z_0 - z_j}{\rho_j}, \xi_j^* = \frac{z_0 - z_j}{\rho_j}$$

这与 $\xi_j \in \Delta(\xi_0, \delta), \xi_j^* \in \Delta(\xi_0^*, \delta)$,且 $\Delta(\xi_0, \delta) \cap \Delta(\xi_0^*, \delta) = \emptyset$ 矛盾.所以, $G = \{(g_f^{-1} \circ f) \mid f \in \mathcal{F}\}$ 在 Δ 内正规且在 Δ 内等度连续,从而对于 $\frac{\varepsilon}{k_m} > 0$,这里 k_m 是引理4中的常数,那么存在 $\delta > 0$,使得球面距离 $\sigma(x, y) < \delta$,且对于任意 $f \in \mathcal{F}$

$$\sigma((g_f^{-1} \circ f)(x), (g_f^{-1} \circ f)(y)) < \frac{\varepsilon}{k_m}$$

再由引理4, $\sigma(f(x), f(y)) = \sigma((g_f \circ g_f^{-1} \circ f)(x), (g_f \circ g_f^{-1} \circ f)(y)) \leq k_m \sigma((g_f^{-1} \circ f)(x), (g_f^{-1} \circ f)(y)) < \varepsilon$,所以, $\mathcal{F}$ 在 Δ 内等度连续,故 $\mathcal{F}$ 在 Δ 内正规.

参考文献:

- [1] 顾永兴,庞学诚,方明亮.正规族理论及其应用[M].北京:科学出版社,2007.
- [2] Pang X C, Zalcman L. Normality and shared values [J]. Arkiv för Matematik, 2000, 38(1): 171 - 182.
- [3] Singh A P, Singh A. Sharing values and normality of

meromorphic functions[J]. Complex Variables, Theory and Applications, 2004, 49(6): 417 - 425.

- [4] Drasin D. Normal families and the Nevanlinna theory [J]. Acta Mathematica, 1969, 122(1): 231 - 263.
- [5] 杨乐.正规族与微分多项式[J].中国科学A辑,1983, 26(1): 21 - 32.
- [6] Langley J K. On normal families and a result of Drasin [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A Mathematics, 1984, 98(3/4): 385 - 393.
- [7] 李松鹰.一类函数的正规定则[J].福建师范大学学报(自然科学版),1984(1): 153 - 156.
- [8] 李先进.关于正规族的Hayman猜想的证明[J].中国科学A辑,1985,28(1): 24 - 31.
- [9] 陈怀惠,方明亮.关于 $f^n f'$ 的值分布[J].中国科学A辑,1995,38(2): 121 - 127.
- [10] 翟文娟,叶亚盛,宋红伟.涉及微分多项式的亚纯函数正规性[J].上海理工大学学报,2009,31(2): 122 - 124.
- [11] 叶亚盛.一个新的正规定则及其应用[J].数学年刊A辑,1991,12(B6): 44 - 49.
- [12] Zhang Q C. Normal families of meromorphic functions concerning shared values[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 338(1): 545 - 551.
- [13] 陈玮,田宏根,袁文俊.涉及分担值的亚纯函数正规族的一些注记[J].数学年刊A辑,待发表.
- [14] 仇惠玲,刘丹,方明亮.涉及正规族与分担值的Hayman问题[J].中国科学:数学,2012,42(6): 603 - 610.
- [15] Yuan W, Li Z R, Lin J M. Some normality criteria of function families concerning shared values [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2012, 35(17): 2095 - 2100.
- [16] Zalcman L. Normal families: new perspectives [J]. Bulletin American Mathematical Society, 1998, 35(3): 215 - 230.
- [17] Beardon A F. Iteration of rational functions[M]. New York: Springer - Verlag, 1991.

(编辑:丁红艺)