

涉及高阶导数的例外函数亚纯函数正规性

张 培, 刘晓俊

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 利用亚纯函数值分布理论与正规理论的一些基本概念、研究方法以及研究成果,并以顾永兴的定理为基础,讨论函数族中任意函数的高阶零点不取固定函数的这类亚纯函数的正规问题,最后得到如下正规定则:设 $\mathcal{F}$ 是单位圆盘内的一族亚纯函数, k 为一个正整数,且 $k \geq 2$, A 为一有穷正数, $h(z)$ 是全纯函数,其中 $h(z) \neq 0$,如果对任意的 $f \in \mathcal{F}$, f 的零点重级至少为 k ,且 f 的极点重级至少为 3;并且满足当 $f(z) = 0$ 时,必有 $|f^{(k)}(z)| \leq A$; f 的 k 阶导数不取固定函数 $h(z)$,即 $f^{(k)}(z) \neq h(z)$,则 $\mathcal{F}$ 在区域内是正规的.

关键词: 亚纯函数; 高阶导数; 例外函数; 正规族

中图分类号: O 174.52 **文献标志码:** A

Criterion of Normality Concerning Meromorphic Functions of Exceptional Function of Higher Derivative

ZHANG Pei, LIU Xiaojun

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: By using some fundamental knowledge, research methods and research results about the theories of value distribution and normal family for meromorphic functions and based on Gu's theorem, a criterion of normality concerning meromorphic functions whose higher zeros are not fixed functions was provided, and is described as follows: let $k \geq 2$ be an integer and $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions on a unit disc Δ , all the zeros of every f which belongs to $\mathcal{F}$ have multiplicity at least k and all the poles have multiplicity at least 3, $h(z)$ be a holomorphic functions, and $h(z) \neq 0$, and assume that the following two conditions that $f(z) = 0 \Rightarrow |f^{(k)}| \leq A$, A is a positive number, and $f^{(k)}(z) \neq h(z)$ hold for every $f \in \mathcal{F}$, then $\mathcal{F}$ is normal in Δ .

Key words: meromorphic functions; higher derivative; exceptional function; normal families

1 问题的提出

1959 年 Hayman^[1] 证明了如下的 Picard 型

定理:

定理 1 设 $\mathcal{F}$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数, k 是正整数,若 $f \neq 0$,且 $f^{(k)} \neq 1$,则 $f \equiv$ 常数.

相应地,1979 年顾永兴^[2-3]证明了对应的正规

收稿日期: 2014-01-17

基金项目: 国家自然科学基金青年基金资助项目(11401381)

第一作者: 张 培(1990-),女,硕士研究生.研究方向:复分析. E-mail: dadada_zp1990@163.com

通信作者: 刘晓俊(1982-),男,副教授.研究方向:复分析. E-mail: xiaojunliu2007@hotmail.com

定则:

定理 2 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的亚纯函数族, k 是正整数, 若对于任意 $f \in \mathcal{F}, f \neq 0$ 且 $f^{(k)} \neq 1$, 则 $\mathcal{F}$ 在区域 D 内正规.

基于以上定理, 讨论函数族中的函数的高阶零点不取固定函数的亚纯函数的正规性, 得到了以下结果:

定理 3 设 $\mathcal{F}$ 是单位圆盘内的一族亚纯函数, $k \geq 2$ 为一正整数, A 为一有穷正数, $h(z)$ 是全纯函数, $h(z) \neq 0$, 如果对任意 $f \in \mathcal{F}, f$ 的零点重级 $\geq k$, 极点重级 ≥ 3 , 且满足: 若 $f(z) = 0$, 必有 $|f^{(k)}(z)| \leq A, f^{(k)}(z) \neq h(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在区域内是正规的.

例 1 设 n 是正整数, $D = \{z: |z| < 1\}, \mathcal{F} = \{f_n\}$, 其中

$$f_n = \frac{\left(z^2 - \frac{1}{n^2}\right)^2}{z^2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

则 $\mathcal{F}$ 中每个函数的零点重数为 2, $f = 0 \Rightarrow |f''| \leq 7, f'' \neq 1$, 但是 $\mathcal{F}$ 在 0 的任何邻域内不正规.

注 1 例 1 说明定理的条件“ f 的极点重级 ≥ 3 ”是必要的.

例 2 设 n, k 是正整数, $D = \{z: |z| < 1\}, \mathcal{F} = \{f_n\}$, 其中

$$f_n = nz^k, n = 1, 2, 3, \dots$$

则 $\mathcal{F}$ 中的每个函数的零点重数为 $k, f^{(k)} = k!n \neq 1$, 但是 $\mathcal{F}$ 在 0 的任何邻域内不正规.

注 2 例 2 说明定理的条件“ $f = 0 \Rightarrow |f^{(k)}(z)| \leq A$ ”是必要的.

2 主要的引理

引理 1^[2,4] 设 $\mathcal{F}$ 是单位圆盘内的亚纯函数, k 是正整数, $\mathcal{F}$ 中每个函数的零点重级至少为 k , 且存在有穷正数 A , 使得对任意 $f \in \mathcal{F}$, 当 $f = 0$ 时, 必有 $|f^{(k)}| \leq A$. 若 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规, 则对任意 $0 \leq \alpha \leq k$, 必存在:

- 点列 $z_n \rightarrow z_0$;
- 正数列 $\rho_n \rightarrow 0^+$;
- 函数列 $f_n \in \mathcal{F}$.

以上条件使得

$$g_n(\zeta) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n^\alpha} \xrightarrow{\alpha} g(\zeta)$$

在 $\mathbb{C}$ 上成立. 其中, g 为 $\mathbb{C}$ 上的非常值有穷级亚纯函

数, 且满足 $g^\#(\zeta) \leq g^\#(0) = kA + 1$.

引理 2^[2,5] 设 $f(z)$ 是开平面上的超越亚纯函数, 或者 $f(z)$ 取每个有穷复数无穷多次, 或者对任意 $k \in \mathbb{N}^+, f^{(k)}$ 取每个非零有穷复数无穷多次.

引理 3^[2,6] 设 $f(z)$ 为复平面上的有穷级亚纯函数, 对于 $f(z)$ 的每一个非直接渐近值 a , 存在 $z_n, f(z_n) \rightarrow a, f'(z_n) = 0$.

引理 4^[7-8] 设 $f(z)$ 是复平面上的一个非常数的亚纯函数, 它的有限临界值和渐近值是一个有界集合, R_0 是它的一个上界. 当 $R > R_0$ 时, 有

$$|f'(z)| > \frac{|f(z)| |\log f(z)|}{16\pi |z|}, |f(z)| \geq R^2$$

引理 5 设 $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的非常值有穷级亚纯函数, $M > 0$ 是常数, $k \geq 2, k \in \mathbb{N}^+, f(z)$ 的零点重数 $\geq k$, 若 $f(z)$ 满足 $f = 0 \Rightarrow |f^{(k)}| \leq M, f^{(k)} \neq 1$, 则 f 必为下面 3 个中的一个:

a. $f = \alpha(z - z_0)^k$, 且 $\alpha k! \neq 1$, 其中, z_0 均为常数;

b. $f = \frac{(z - a)^{k+1}}{k!(z - b)}$, 其中, $a \neq b$ 为常数;

c. $f = \frac{(z - z_1)^2(z - z_2)^2}{2(z - b)^2}$, 其中, b, z_1, z_2 为常数.

证明 若 f 为超越亚纯函数, 由引理 2, 因为 $f^{(k)} \neq 1$, 所以 $f = 0$ 有无穷多个解, 即 f 有无穷多个零点, 记为 $z_1, z_2, z_3, \dots$. 令 $g(z) = f^{(k-1)}(z) - z$, 因为 $g' = f^{(k)} - 1 \neq 0$, 所以 g 无临界点, 从而 g 无临界值, 从而由引理 3, $g(z)$ 没有非直接渐近值. 于是由 Denjoy - Carleman - Ahlfors^[8-9] 定理知, $g(z)$ 至多有 $2\rho_g$ 个渐近值^[10], 故 $g(z)$ 的有限临界值和渐近值是一个有界集合^[11]. 于是由引理 4 得

$$\frac{|z_j g'(z_j)|}{|g(z_j)|} \geq \frac{1}{16\pi} \log |g(z_j)|, j = 1, 2, 3, \dots$$

$f(z)$ 的零点重数 $\geq k$, 所以 $f^{(k-1)}(z_j) = 0$, 从而, $|g(z_j)| = |f^{(k-1)}(z_j) - z_j| = |z_j|$, 又因为 $|z_j g'(z_j)| = |z_j| |f^{(k)}(z_j) - 1| < |z_j| \cdot (|f^{(k)}(z_j)| + 1) \leq |z_j| (M + 1)$, 从而当 $j \rightarrow \infty$ 时, 有 $\frac{1}{16\pi} \log |g(z_j)| = \frac{\log |z_j|}{16\pi} \rightarrow \infty$, 则 $j \rightarrow \infty$ 时, $\frac{|z_j g'(z_j)|}{|g(z_j)|} \rightarrow \infty$. 另一方面, $j \rightarrow \infty$ 时, $\frac{|z_j g'(z_j)|}{|g(z_j)|} \leq \frac{|z_j| (M + 1)}{|z_j|} = M + 1$, 矛盾. 因此 $g'(z) = f^{(k)} - 1$

有无穷多个零点, 这与 $f^{(k)} \neq 1$ 矛盾, 故 f 为有理函数. 以下分两种情况讨论.

情形 1 若 f 为多项式函数, 则 $f = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, 其中, $a_0, a_1, \dots, a_n$ 是常数, $a_n \neq 0$, 且 $f^{(k)} \neq 1$. 若 $n > k$, 则有 $f^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)a_n z^{n-k} + \dots + a_{n-k}$, 则 $f^{(k)} = 1$ 必有解, 矛盾. 因此 $n \leq k$, 又 $f(z)$ 的零点重数 $\geq k$, 且 f 非常值, 所以 $n = k$, 则 $f = \alpha(z - z_0)^k$, $f^{(k)} \neq 1$, $f^{(k)} = \alpha k! \neq 1$, 即 $f = \alpha(z - z_0)^k$ 且 $\alpha k! \neq 1$, 其中 z_0 为一常数.

情形 2 若 f 为非多项式有理函数, 则 $f = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 + \frac{q(z)}{p(z)}}{p(z)}$, 其中, $a_0, a_1, \dots, a_n$ 是常数, $q(z), p(z)$ 是两个互素的多项式, 且 $\deg q < \deg p, k \in \mathbb{N}^+$.

若 $n < k$, 则有

$$f^{(k)} = \left(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 + \frac{q(z)}{p(z)} \right)^{(k)} = \left(\frac{q(z)}{p(z)} \right)^{(k)} = \frac{q_k(z)}{p_k(z)}$$

式中, $q_k(z), p_k(z)$ 是两个满足 $\deg q_k < \deg p_k$ 的互素多项式, 因为 $f^{(k)} \neq 1$, 所以有 $f^{(k)} = \frac{q_k(z)}{p_k(z)} =$

$1 + \frac{C}{p_k}$, 其中 C 为常数. 而当 $z \rightarrow \infty$ 时, $\frac{q_k(z)}{p_k(z)} \rightarrow 0$, $1 + \frac{C}{p_k} \rightarrow 1$, 矛盾.

若 $n > k$, 则有

$$f^{(k)} = (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0)^{(k)} + \left(\frac{q(z)}{p(z)} \right)^{(k)} = p_1(z) + \left(\frac{q(z)}{p(z)} \right)^{(k)} = p_1(z) + \frac{q_k(z)}{p_k(z)}$$

式中, $p_1(z)$ 是满足 $\deg p_1 \geq 1$ 的多项式, $q_k(z), p_k(z)$ 是满足 $\deg q_k < \deg p_k$ 的互素多项式, 同样因为 $f^{(k)} \neq 1$, 所以有

$$f^{(k)} = p_1(z) + \frac{q_k(z)}{p_k(z)} = 1 + \frac{C}{p_k}$$

式中, C 为常数. 当 $z \rightarrow \infty$ 时, $p_1(z) + \frac{q_k(z)}{p_k(z)} \rightarrow \infty$ 有解, $1 + \frac{C}{p_k} \rightarrow 1$, 矛盾.

若 $n = k$, 则有

$$f^{(k)} = k! a_k + \frac{q_k(z)}{p_k(z)}$$

式中, $q_k(z), p_k(z)$ 是满足 $\deg q_k < \deg p_k$ 的互素多项式, 由于 $f^{(k)} \neq 1$, 断言 $k! a_k = 1$. 事实上, 如果 $k! a_k \neq 1$, 则 $k! a_k = 1 + \alpha, \alpha \neq 0$, 于是有

$$f^{(k)} = 1 + \alpha + \frac{q_k(z)}{p_k(z)} = 1 + \frac{\alpha p_k(z) + q_k(z)}{p_k(z)}$$

显然 $\alpha p_k(z) + q_k(z) = 0$ 有解, 因此, $f^{(k)} = 1$ 有解, 与 $f^{(k)} \neq 1$ 矛盾. 于是, $k! a_k = 1$, 即 $a_k = \frac{1}{k!}$, 所以

$$f^{(k)} = 1 + \frac{q_k(z)}{p_k(z)}, \text{ 于是有}$$

$$f^{(k)} = 1 + \frac{q_k(z)}{p_k(z)} = 1 + \frac{C}{p_k}$$

式中, C 为常数, 即得 $q_k = C, \deg q_k = 0$. 所以 $\deg q = 0, q$ 为常数, 且 p 只有一个零点. 从而有

$$f(z) = \frac{1}{k!} z^k + \dots + a_1 k + a_0 + \frac{1}{(cz + d)^m}$$

$$\text{令 } g(z) = \frac{1}{k!} z^k + \dots + a_1 k + a_0, \text{ 则 } f(z) =$$

$g(z) + \frac{1}{(cz + d)^m} = \frac{g(z)(cz + d)^m + 1}{(cz + d)^m}$. 设 $g(z) \cdot (cz + d)^m + 1$ 的零点为 $c_1, c_2, \dots, c_l$, 因为 $f(z)$ 的零点重数 $\geq k$, 所以 c_1 是 $g(z)(cz + d)^m + 1$ 的重级为 $n(\geq k)$ 的零点, 于是 c_1 是 $[g(z)(cz + d)^m + 1]'$ 的重级为 $n - 1(\geq k - 1)$ 的零点, 显然 $c_1 \neq -\frac{d}{c}$, 于是由

$$[g(z)(cz + d)^m + 1]' = (cz + d)^{m-1} [g'(z)(cz + d) + mcg(z)]$$

可知, c_1 是 $g'(z)(cz + d) + mcg(z)$ 的零点重级为 $n_1 - 1(\geq k - 1)$ 的零点, 由 $\deg(g'(z)(cz + d) + mcg(z)) \leq k$ 可得 $k - 1 \leq n_1 - 1 \leq k$, 即 $k \leq n_1 \leq k + 1$.

当 $n_1 = k + 1$ 时, c_1 是 $g(z)(cz + d)^m + 1$ 仅有的重级为 $k + 1$ 的零点, 否则, 存在 c_2 为 $g(z)(cz + d)^m + 1$ 的另一个零点, 重数为 $n_2(\geq k)$, 则有 $n_1 + n_2 - 2 \geq 2k$, 从而有 $2k \leq k$, 矛盾. 因此, $g(z)(cz + d)^m + 1 = B(z - c_1)^{k+1}$, 其中, B 为常数, 所以 $m = 1$, 此时有

$$f(z) = g(z) + \frac{1}{cz + d} = \frac{(z - a)^{k+1}}{k!(z - b)}, a \neq b$$

当 $n_1 = k$ 时, 若只有 c_1 这个零点, 则 $m = 0$, 此时 f 为多项式, 矛盾. 所以 $g(z)(cz + d)^m + 1$ 还有其它零点. 若 f 有 3 个零点 c_1, c_2, c_3 , 重数分别为 n_1, n_2, n_3 , 则有 $n_1 + n_2 + n_3 - 3 \geq 3k - 3$, 从而有 $3k - 3 \leq k, k \leq \frac{3}{2}$, 与 $k \geq 2$ 矛盾. 因此, f 有且仅有两个互异的零点 $c_1, c_2, n_1 + n_2 - 2 \geq 2k - 2, 2k - 2 \leq k$, 即 $k \leq 2$, 又 $k \geq 2$, 所以 $k = 2$. c_1, c_2 分别为 $g(z)(cz + d)^m + 1$ 的重数为 2 的零点, $m = 2$, 此时

$$f = \frac{1}{2} z^2 + a_1 z + a_0 + \frac{1}{(cz + d)^2} =$$

$$\frac{(z - z_1)^2(z - z_2)^2}{2(z - b)^2}$$

式中, b, z_1, z_2 为常数.

3 定理的证明

证明 设 z_0 为单位圆盘内任意一点, $h(z_0) \neq 0$, 不妨设 $h(z_0) = 1$. 以下证明 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规. 事实上, 假如 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规, 由引理 1, 存在点列 $z_n \in D, z_n \rightarrow z_0$, 函数列 $f_n \in \mathcal{F}$ 以及正数列 $\rho_n \rightarrow 0^+$, 使得在 $\mathbb{C}$ 上

$$g_n(\zeta) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n^k} \Rightarrow g(\zeta)$$

式中, $g(\zeta)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的非常值有穷级亚纯函数, 并且 $g^\#(\zeta) \leq g^\#(0) = kA + 1$. 由定理条件得到 $g = 0 \Rightarrow |g^{(k)}| \leq A$, g 的极点是重级极点, 并且重数 ≥ 3 .

断言: $g^{(k)} \neq 1$.

假设存在 ζ_0 使得 $g^{(k)}(\zeta_0) = 1$, 即 $g^{(k)}(\zeta_0) = h(z_0)$. 显然 $g^{(k)}(\zeta) \neq h(z_0)$, 否则 $g^{(k)}(\zeta) \equiv h(z_0)$, 从而 $|g^{(k)}(\zeta)| \equiv 1 \leq A, g = \frac{1}{k!}(\zeta - \zeta_0)^k$, 由简单计算得

$$g^\#(0) \leq \begin{cases} \frac{k}{2}, & |\zeta_0| \geq 1 \\ 1, & |\zeta_0| < 1 \end{cases}$$

从而有 $g^\#(0) < kA + 1$, 矛盾. 所以由 Hurwitz 定理, 存在 $\zeta_n, \zeta_n \rightarrow \zeta_0$, 使得

$$f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \zeta_n) - h(z_n + \rho_n \zeta_n) = g_n^{(k)}(\zeta_n) - h(z_0) = 0$$

与 $f_n^{(k)} \neq h$ 矛盾. 所以 $g^{(k)} \neq 1$, 断言成立.

又因为 $g = 0 \Rightarrow |g^{(k)}| \leq A$, 且 $g^{(k)} \neq 1$, 于是由引理 5 得 $g = \alpha(z - z_0)^k$ 且 $\alpha k! \neq 1$, 其中 z_0 为常数; 或 $g = \frac{(z - a)^{k+1}}{k!(z - b)}$, 其中 $a \neq b$ 为常数; 或 $g = \frac{(z - z_1)^2(z - z_2)^2}{2(z - b)^2}$, 其中 b, z_1, z_2 为常数. 以下分

情况讨论.

若 $g = \alpha(z - z_0)^k$, 则有

$$g^\#(0) \leq \begin{cases} \frac{k}{2}, & |z_0| \geq 1 \\ 1, & |z_0| < 1 \end{cases}$$

从而有 $g^\#(0) < kA + 1$, 矛盾.

若 $g = \frac{(z - a)^{k+1}}{k!(z - b)}$ 或 $g = \frac{(z - z_1)^2(z - z_2)^2}{2(z - b)^2}$,

则与 g 的极点重数 ≥ 3 矛盾, 故 $\mathcal{F}$ 在区域内正规.

参考文献:

- [1] Hayman W K. Picard values of meromorphic functions and their derivatives [J]. Annals of Mathematics, 1959, 70: 9 - 42.
- [2] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [3] 童晓丽, 刘晓俊. 零点位于直线上的亚纯函数的正规规定则 [J]. 上海理工大学学报, 2014, 36(4): 362 - 365.
- [4] 杨乐. 正规族与微分多项式 [J]. 中国科学 A 辑, 1983, 14(1): 21 - 32.
- [5] Bergweiler W, Eremenko A. On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order [J]. Revista Matemática Iberoamericana, 1995, 11(2): 355 - 373.
- [6] Drasin D. Normal families and the Nevanlinna theory [J]. Acta Mathematica, 1969, 122(1): 231 - 263.
- [7] Pang X C, Zalcman L. Normal families and shared values [J]. Bulletin London Mathematical Society, 2000, 32(3): 325 - 331.
- [8] 叶亚盛. 涉及导数的亚纯函数正规族 [J]. 上海机械学院学报, 1988, 10(3): 59 - 66.
- [9] Nevanlinna R. Eindeutige analytische funktionen [M]. Heidelberg: Springer - Verlag, 1953.
- [10] 叶亚盛. 一个涉及极点重数的亚纯函数正规规定则 [J]. 上海理工大学学报, 2007, 29(3): 265 - 267.
- [11] Xu J F, Zhang X B. The zeros of q -shift difference polynomials of meromorphic functions [J]. Advances in Difference Equations, 2012, 2012: 200.

(编辑: 丁红艺)