

具有微分算子的分数阶微分方程边值问题解的存在性与唯一性

吴贵云, 刘锡平, 杨浩

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究一类具有分数阶线性微分算子的 Riemann-Liouville 型分数阶非线性微分方程两点边值问题解的存在性和唯一性. 通过求出相应边值问题的 Green 函数并证明其性质, 建立积分算子方程, 应用压缩映射原理证明了这类边值问题解的存在性与唯一性定理. 运用 Krasnoselskii's 不动点理论建立并证明了该边值问题解的存在性与唯一性定理. 最后给出了两个应用实例, 用以说明本文所得结论的有效性.

关键词: Riemann-Liouville 分数阶导数; 分数阶微分方程; 微分算子; 边值问题; 存在性与唯一性
中图分类号: O 175.8 **文献标志码:** A

Existence and Uniqueness of Solutions for Boundary Value Problems of Fractional Differential Equations with Differential Operator

WU Guiyun, LIU Xiping, YANG Hao

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The existence and uniqueness of solutions for a class of two points boundary value problems of Riemann-Liouville nonlinear fractional differential equation with linear fractional differential operator were considered. Through finding the Green function of the boundary value problem and determining its properties, an integral operator equation was established and some sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions were derived by applying the contraction principle and the fixed point theorem. Some examples were given to illustrate the results.

Key words: Riemann-Liouville fractional derivative; fractional differential equation; differential operator; boundary value problem; existence and uniqueness

由于分数阶微分方程在工程技术和科学研究中具有广泛的应用背景, 因此, 分数阶微分方程理论研究受到了广泛关注. 近年来, 有大量关于分数阶微分

方程边值及初值问题的研究成果出现, 参见文献 [1-10] 以及其中的参考文献.

对于一些较复杂的问题, 常常用微分算子方程

收稿日期: 2014-03-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11171220)

第一作者: 吴贵云(1990-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 应用微分方程. E-mail: 763924848@qq.com

通信作者: 刘锡平(1962-), 男, 教授. 研究方向: 应用微分方程. E-mail: xipingliu@usst.edu.cn

来描述.文献[1-2]讨论了具有线性微分算子的分数阶微分方程初值问题正解的存在性.本文研究一类具有线性微分算子的分数阶微分方程两点边值问题解的存在性和唯一性.

1 准备工作

本文研究具有线性微分算子的分数阶微分方程两点边值问题

$$\begin{cases} L(D)x(t) + f(t, x(t)) = 0, & 0 < t < 1 \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

解的存在性和唯一性,其中线性微分算子 $L(D) = D^\alpha - rt^n D^\beta$, n 是非负整数, $r \in \mathbb{R}$, $0 < \beta < 1 < \alpha < 2$, 且 D^α, D^β 是标准的 Riemann-Liouville 分数阶导数. $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是非线性连续函数.

有关 Riemann-Liouville 型分数阶积分与分数阶导数的定义请参考文献[3].

引理 1^[4] 若 x 在 $[0, +\infty)$ 上是连续的, 且 $0 < \beta < 1, \beta \leq \alpha$, 那么

$$\text{a. } I^\alpha(t^n x(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{-\alpha}{k} \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} I^{\alpha+k} x(t);$$

$$\text{b. } I^\alpha(t^n D^\beta x(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{-\alpha}{k} \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} \cdot$$

$$I^{\alpha-\beta+k} x(t).$$

其中, n 是非负整数, 且

$$\binom{-\alpha}{k} = (-1)^k \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{k!} =$$

$$(-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+k)}{k! \Gamma(\alpha)}$$

引理 2 设 $r \in \mathbb{R}$, n 是非负整数, $0 < \beta < 1 < \alpha < 2$, 则边值问题(1)与积分方程

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds + r \sum_{k=0}^n \binom{-\alpha}{k} \cdot$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+k)} \int_0^1 H_k(t, s) x(s) ds$$

等价, 其中

$$G(t, s) =$$

$$\begin{cases} \frac{(t(1-s))^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$H_k(t, s) = \begin{cases} H_{k1}(t, s), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ H_{k2}(t, s), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$H_{k1}(t, s) = t^{n-k} (t-s)^{\alpha-\beta+k-1} - t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-\beta+k-1}$$

$$H_{k2}(t, s) = -t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-\beta+k-1}, k = 0, 1, 2, \dots, n$$

证明 运用分数阶微积分的相关引理可以得出方程 $L(D)x(t) + f(t, x(t)) = 0$ 的等价方程为

$$x(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} - I^\alpha f(t, x(t)) +$$

$$I^\alpha (rt^n D^\beta) x(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot$$

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + r \sum_{k=0}^n \binom{-\alpha}{k} \cdot$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} \frac{t^{n-k}}{\Gamma(\alpha-\beta+k)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta+k-1} x(s) ds$$

式中, c_1, c_2 为任意常数.

根据边界条件可求得

$$c_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds - r \sum_{k=0}^n \binom{-\alpha}{k} \cdot$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+k)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\beta+k-1} x(s) ds$$

$$c_2 = 0$$

于是,

$$x(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds +$$

$$r \sum_{k=0}^n \binom{-\alpha}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{t^{n-k}}{\Gamma(\alpha-\beta+k)} \cdot$$

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta+k-1} x(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \cdot$$

$$f(s, x(s)) ds - r \sum_{k=0}^n \binom{-\alpha}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot$$

$$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-\beta+k)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-\beta+k-1} x(s) ds =$$

$$\int_0^t \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, x(s)) ds +$$

$$\int_t^1 \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, x(s)) ds +$$

$$r \sum_{k=0}^n \binom{-\alpha}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+k)} \cdot$$

$$\int_0^t [t^{n-k} (t-s)^{\alpha-\beta+k-1} - t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-\beta+k-1}] \cdot$$

$$x(s) ds + r \sum_{k=0}^n \binom{-\alpha}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+k)} \cdot$$

$$\int_t^1 [-t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-\beta+k-1}] x(s) ds =$$

$$\int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds + r \sum_{k=0}^n \binom{-\alpha}{k} \cdot$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+k)} \int_0^1 H_k(t, s) x(s) ds$$

引理得证.

引理 3 设 $r \in \mathbb{R}$, $0 < \beta < 1 < \alpha < 2$, n 为非负整数, 则函数 $G(t, s), H_k(t, s)$ 具有以下性质:

a. $G(t, s)$ 连续, 并且 $0 \leq G(t, s) \leq G(s, s)$,

$t, s \in [0, 1];$

$$\text{b. } H_k(t, s) \leq 0 \text{ 连续, } \max_{t, s \in [0, 1]} \int_0^1 |H_k(t, s)| ds = \frac{t_m^{\alpha-1} - t_m^{\alpha-\beta+n}}{\alpha-\beta+k}, k=0, 1, 2, \dots, n, \text{ 其中, } t_m = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta+n}\right)^{\frac{1}{n+1-\beta}}.$$

证明 a. 由函数的定义式(2), 易得 $G(t, s)$ 连续, 并且 $G(t, s) \geq 0$.

当 $s < t$ 时, 有

$$\frac{\partial G(t, s)}{\partial t} = \frac{(1-s)^{\alpha-1}(\alpha-1)t^{\alpha-2} - (\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \frac{(1-s)^{\alpha-1}(t-s)^{2-\alpha} - t^{2-\alpha}}{t^{2-\alpha}(t-s)^{2-\alpha}} \leq 0$$

故 $G(t, s)$ 关于 $t \in [s, 1]$ 单调递减.

当 $t \leq s$ 时, 显然 $G(t, s)$ 关于 t 单调递增, 则

$$G(t, s) \leq G(s, s) = \frac{(s(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \text{ 因此有 } 0 \leq G(t, s) \leq G(s, s), t, s \in [0, 1].$$

b. 显然 $H_k(t, s) \leq 0$ 连续. 当 $s \leq t$ 时, 有

$$H_{k1}(t, s) = t^{n-k}(t-s)^{\alpha-\beta+k-1} - t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta+k-1}, k=0, 1, \dots, n$$

当 $n-k \geq 1$ 即 $k \neq n$ 时有 $t^{n-k} \leq t^{\alpha-1}$, $(t-s)^{\alpha-\beta+k-1} \leq (1-s)^{\alpha-\beta+k-1}$, 于是

$$H_{k1}(t, s) = t^{n-k}(t-s)^{\alpha-\beta+k-1} - t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta+k-1} \leq 0$$

当 $k=n$ 时,

$$H_{k1}(t, s) = (t-s)^{\alpha-\beta+n-1} - t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta+n-1} \leq (t-s)^{\alpha-\beta+n-1} - t^{\alpha-\beta+n-1}(1-s)^{\alpha-\beta+n-1} = (t-s)^{\alpha-\beta+n-1} - (t-ts)^{\alpha-\beta+n-1} \leq 0$$

即当 $s \leq t$ 时, $H_{k1}(t, s) \leq 0$ 成立. 而当 $t \leq s$ 时, 显然 $H_{k2}(t, s) \leq 0$ 成立.

综上得: $H_k(t, s) \leq 0, t, s \in [0, 1], k=0, 1, \dots, n$.

$$\int_0^1 H_k(t, s) ds = - \int_0^t [t^{n-k}(t-s)^{\alpha-\beta+k-1} - t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta+k-1}] ds + \int_t^1 t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta+k-1} ds = \frac{t^{\alpha-1} - t^{\alpha-\beta+n}}{\alpha-\beta+k}$$

$$\text{令 } h(t) = \frac{t^{\alpha-1} - t^{\alpha-\beta+n}}{\alpha-\beta+k}, \text{ 则当 } t = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta+n}\right)^{\frac{1}{n+1-\beta}} =$$

$$t_m \text{ 时, } h'(t) = \frac{\frac{\alpha-1}{t^{2-\alpha}} - (\alpha-\beta+n)t^{\alpha-\beta+n-1}}{\alpha-\beta+k} = 0. \text{ 故当}$$

$t = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta+n}\right)^{\frac{1}{n+1-\beta}} = t_m$ 时, $h(t)$ 取得最大值, 即

$$\max_{t, s \in [0, 1]} h(t) = h(t_m), \text{ 从而 } \max_{t, s \in [0, 1]} \int_0^1 |H_k(t, s)| ds = \frac{t_m^{\alpha-1} - t_m^{\alpha-\beta+n}}{\alpha-\beta+k}.$$

2 主要结论

首先运用压缩映射原理给出边值问题(1)解的存在性与唯一性.

定理 1 设 $r \in \mathbb{R}, 0 < \beta < 1 < \alpha < 2, n$ 为非负整数, 若存在 $M_1 > 0$, 对任意 $x, y \in \mathbb{R}, t \in [0, 1]$ 有 $|f(t, x) - f(t, y)| \leq M_1 |x - y|$, 并且 $0 < \frac{M_1 \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} + |r| \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{t_m^{\alpha-1} - t_m^{\alpha-\beta+n}}{\Gamma(\alpha-\beta+k+1)} < 1$,

则边值问题(1)存在唯一解.

证明 设 $X = C[0, 1]$, 并取范数 $\|x\| = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$, 则 $(X, \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间. 定义算子 $F_1, F_2: X \rightarrow X$, 任意 $x \in X$, 令

$$(F_1 x)(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds$$

$$(F_2 x)(t) = r \sum_{k=0}^n \binom{-\alpha}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+k)} \int_0^1 H_k(t, s) x(s) ds$$

并记 $(Fx)(t) = (F_1 x)(t) + (F_2 x)(t)$, 那么

$$|(F_1 x)(t) - (F_1 y)(t)| \leq \int_0^1 G(t, s) \cdot$$

$$|f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \leq$$

$$M_1 \int_0^1 G(s, s) ds \|x - y\| = \frac{M_1 \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \|x - y\|$$

$$|(F_2 x)(t) - (F_2 y)(t)| \leq |r| \sum_{k=0}^n \left| \binom{-\alpha}{k} \right| \cdot$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+k)} \left| \int_0^1 H_k(t, s) \cdot$$

$$[x(s) - y(s)] ds \right| \leq |r| \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \cdot$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+k)} \int_0^1 |H_k(t, s)| \cdot$$

$$|x(s) - y(s)| ds \leq |r| \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot$$

$$\frac{t_m^{\alpha-1} - t_m^{\alpha-\beta+n}}{\Gamma(\alpha-\beta+k+1)} \|x - y\| = M_2 \|x - y\|$$

其中

$$M_2 = |r| \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{t_m^{\alpha-1} - t_m^{\alpha-\beta+n}}{\Gamma(\alpha-\beta+k+1)}$$

则

$$|(Fx)(t)-(Fy)(t)| \leq |(F_1x)(t)-(F_1y)(t)| + |(F_2x)(t)-(F_2y)(t)| \leq \frac{M_1\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \|x-y\| + M_2 \|x-y\| = \left(\frac{M_1\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} + M_2\right) \|x-y\|$$

又因为 $0 < \frac{M_1\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} + |r| \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{t_m^{\alpha-1} - t_m^{\alpha-\beta+n}}{\Gamma(\alpha-\beta+k+1)} < 1$, 则 $F: X \rightarrow X$ 是压缩映射, 从而 F 在 X 上有唯一不动点, 即边值问题(1)存在唯一解.

下面应用 Krasnoselskii's 不动点定理研究边值问题(1)解的存在性.

定理 2 设 $r \in \mathbb{R}, 0 < \beta < 1 < \alpha < 2, n$ 为非负整数, 若 $\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{f(t,x)}{x} \right| < r_0$, 且 $r_0 \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} + M_2 < 1, 0 < |r| \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{t_m^{\alpha-1} - t_m^{\alpha-\beta+n}}{\Gamma(\alpha-\beta+k+1)} < 1$ 成立, 则边值问题(1)至少存在一个解.

证明 由定理条件可得, 存在 $M_0 > 0$, 当 $|x| \geq M_0$ 时, $|f(t,x)| < r_0|x|$. 当 $|x| \leq M_0$ 时, 令 $\max_{\substack{t \in [0,1] \\ x \in [-M_0, M_0]}} |f(t,x)| = M_3$, 则对任意 $x \in \mathbb{R}, t \in [0,1]$, 有 $|f(t,x)| \leq M_3 + r_0|x|$.

定义集合 $M_l = \{x \in X \mid \|x\| \leq l\}$. 显然, $M_l \subset X$ 是非空有界闭凸集, 其中

$$l \geq \frac{(\Gamma(\alpha)/\Gamma(2\alpha))M_3}{1 - (\Gamma(\alpha)/\Gamma(2\alpha))r_0 - M_2}$$
$$M_2 = |r| \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{t_m^{\alpha-1} - t_m^{\alpha-\beta+n}}{\Gamma(\alpha-\beta+k+1)}$$

在 M_l 上定义算子 $A, B: M_l \rightarrow X$, 即

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,x(t,s))ds$$
$$(Bx)(t) = r \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+k)} \int_0^1 H_k(t,s)x(s)ds$$

则对于任意 $x, y \in M_l$, 有

$$|(Ax)(t) + (By)(t)| \leq \int_0^1 G(t,s) \cdot |f(s,x(s))| ds + |r| \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+k)} \left| \int_0^1 H_k(t,s)y(s)ds \right| \leq$$

$$\int_0^1 G(s,s)ds (M_3 + r_0|x|) + |r| \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+k)} \int_0^1 |H_k(t,s)| \cdot |y(s)| ds \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} (M_3 + r_0|x|) + M_2 l \leq \left(\frac{r_0\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} + M_2\right) l + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} M_3 \leq \left(\frac{r_0\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} + M_2\right) l + \left(1 - \frac{r_0\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} - M_2\right) l \leq l$$

所以, $Ax + By \in M_l$.
下证算子 A 是紧的.

$A: M_l \rightarrow X$, 设 $\Omega \subset M_l$ 有界, 则存在 $F > 0$, 对任意 $x \in \Omega$, 有

$$\|x\| \leq F, \max_{\substack{t \in [0,1] \\ \mu \in [-F,F]}} f(t,\mu) = M_0$$

从而

$$|(Ax)(t)| \leq \int_0^1 G(s,s) |f(s,x(s))| ds \leq \frac{M_0\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}$$

故 A 是一致有界的.

由于 $G(t,s)$ 在 $[0,1]$ 上是连续的, 从而 $G(t,s)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上是一致连续的, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对于任意的 $t_1, t_2, s \in [0,1]$, 当 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时, 有 $|G(t_1,s) - G(t_2,s)| < \frac{\varepsilon}{M_0}$, 则

$$|(Ax)(t_2) - (Ax)(t_1)| \leq \int_0^1 |G(t_2,s) - G(t_1,s)| \cdot |f(s,x(s))| ds \leq M_0 \frac{\varepsilon}{M_0} = \varepsilon$$

即 A 是等度连续的, 由 Arzela-Ascoli^[11] 定理知 A 在 M_l 上是紧的. 由于

$0 < |r| \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{t_m^{\alpha-1} - t_m^{\alpha-\beta+n}}{\Gamma(\alpha-\beta+k+1)} < 1$
结合定理 1 的证明可知 B 是压缩映射.

根据 Krasnoselskii's 不动点定理^[11], 可得边值问题(1)至少有一个解.

3 应用举例

以下给出两个实例, 用于说明所得到的主要结论.
例 1 考虑具有线性微分算子的分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} (D^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}tD^{\frac{1}{2}})x(t) + t\sin x(t) + 3 = 0, & 0 < t < 1 \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

式中, $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = r = \frac{1}{2}, n = 1, f(t, x) = t \sin x +$

3. 容易看出

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |(t \sin x + 3) - (t \sin y + 3)| \leq |x - y|$$

取 $M_1 = 1$, 则

$$t_m = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta + n}\right)^{\frac{1}{n-\beta+1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$$

从而

$$\frac{M_1 \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} + |r| \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{t_m^{\alpha-1} - t_m^{\alpha-\beta+n}}{\Gamma(\alpha-\beta+k+1)} = \frac{\frac{1}{4} \sqrt{\pi} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{3}} + \frac{9}{8} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{3}}}{\Gamma(2)} \approx 0.86 < 1$$

综上所述,边值问题(4)满足了定理 1 的条件,根据定理 1,边值问题(4)存在唯一解. 容易看出 $x(t) \equiv 0$ 不是边值问题(4)的解,因此,边值问题(4)存在唯一非平凡解.

例 2 考虑分数阶微分方程

$$\begin{cases} (D^{\frac{3}{2}} - tD^{\frac{1}{2}})x(t) + \frac{1}{2}(tx^{\frac{1}{3}} + 1) = 0, & 0 < t < 1 \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

容易验证,边值问题(5)满足定理 2 的条件,根据定理 2,边值问题(5)至少存在一个解,并且该解为非平凡解.

参考文献:

[1] Băleanu D, Mustafa O G. On the global existence of solutions to a class of fractional differential equations [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 59(5): 1835 - 1841.

[2] Babakhani A. Existence and uniqueness of solution for class of fractional order differential equations on an unbounded domain [J]. Advances in Difference Equations, 2012, 41(1): 1 - 8.

[3] Podlubny I. Fractional differential equations [M]. New York: Academic Press, 1999.

[4] Miller K S, Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations [M]. New York: Wiley, 1993.

[5] Bai Z B, Sun W C. Existence and multiplicity of positive solutions for singular fractional boundary value problems [J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 63: 1369 - 1381.

[6] Jia M, Liu X. Multiplicity of solutions for integral boundary value problems of fractional differential equations with upper and lower solutions [J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 232: 313 - 323.

[7] Liu X P, Lin L G, Fang H Q. Existence of positive solutions for nonlocal boundary value problem of fractional differential equation [J]. Central European Journal of Physics, 2013, 11(10): 1423 - 1432.

[8] 刘洪洁, 赵俊芳, 耿凤杰, 等. 一类分数阶微分方程正解的存在性 [J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(2): 241 - 248.

[9] 窦丽霞, 刘锡平, 金京福, 等. 分数阶积分微分方程多点边值问题解的存在性和唯一性 [J]. 上海理工大学学报, 2012, 34(1): 51 - 55.

[10] 金京福, 刘锡平, 窦丽霞, 等. 分数阶积分微分方程边值问题正解的存在性 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2011, 49(5): 823 - 828.

[11] 郭大钧, 孙经先, 刘兆理. 非线性常微分方程泛函方法 [M]. 2 版. 济南: 山东科技大学出版社, 2005.

(编辑: 丁红艺)