

Heisenberg 群上拟线性椭圆方程解的多重性

贾 高, 郭露倩, 张龙杰

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 在 Heisenberg 群上研究一类拟线性椭圆方程边值问题解的多重性. 在全空间中, 假设方程的主导系数及导数有界, 而方程的非线性项具有超线性增长. 由于在该假设下, 方程所对应的泛函是连续的, 但没有可微性, 因此必须使用不光滑临界点理论. 首先, 介绍不光滑临界点理论中的弱斜率、临界点、 $(PS)_c$ 条件等概念和相关的基本引理; 其次, 研究泛函的临界点的性质, 利用非线性泛函理论、Fatou 引理、Lebesgue 控制收敛定理和 Brezis-Browder 定理证明 $(PS)_c$ 序列的强收敛性质; 最后, 借助推广的山路引理得到该边值问题具有无穷多个解, 且这些解是彼此分离的.

关键词: 拟线性椭圆方程; 不可微泛函; 不光滑临界点理论; Heisenberg 群

中图分类号: O 175.25

文献标志码: A

Multiplicity of Solutions of Quasilinear Elliptic Equations on Heisenberg Group

JIA Gao, GUO Luqian, ZHANG Longjie

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The multiplicity of solutions for a class of quasilinear elliptic boundary value problems on the Heisenberg group was concerned. In the whole space, the main coefficients and their derivatives were assumed to be bounded, and the nonlinear term satisfies superlinear growth conditions. Under the above assumptions, the functional is continuous but not differentiable in the whole space. So, the nonsmooth critical point theory should be applied. The concepts about weak slope, critical point, $(PS)_c$ conditions and some fundamental lemmas in the nonsmooth critical point theory were introduced. The properties of the critical point of the functional were analysed. The strong convergence of the $(PS)_c$ sequences was proved by using nonlinear functional theory, Fatou's lemma, Lebesgue's dominated convergence theorem and Brezis-Browder theorem. Moreover, by virtue of the generalized Mountain Pass lemma, the existence of infinite weak solutions of the boundary value problem was confirmed and these solutions are separable from one another.

Key words: quasilinear elliptic equation; nondifferentiable functional; nonsmooth critical point theory; Heisenberg group

近年来,在欧氏空间中,关于拟线性椭圆方程解的存在性和多重性问题已有许多学者进行研究^[1-5],在 Heisenberg 群上关于半线性或拟线性次椭圆方程的研究也主要集中于对单个解的存在性^[6-9]. 本文在 Heisenberg 群上研究一类拟线性椭圆方程解的多重性.

1 问题的提出

所谓 Heisenberg 群 $\mathbb{H}^N$ 是指在 $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ 上定义如下的群运算

$$\eta \circ \eta' = (x, y, t) \circ (x', y', t') = (x + x', y + y', t + t' + 2(x' \cdot y - x \cdot y'))$$

式中, $\circ$ 表示通常 $\mathbb{R}^N$ 中的内积,则这个运算赋予 $\mathbb{H}^N$ 李群结构.

定义向量场 $X_1, \dots, X_N, Y_1, \dots, Y_N, T$

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2y_j \frac{\partial}{\partial t}, Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2x_j \frac{\partial}{\partial t}, T = \frac{\partial}{\partial t}$$

那么这组向量为 $\mathbb{H}^N$ 中在 $\eta = (x, y, t)$ 处切空间的一组基.

定义1 Heisenberg 群上 Laplace 算子被定义为 $\Delta_{\mathbb{H}} = \sum_{j=1}^N (X_j^2 + Y_j^2)$; $\nabla_{\mathbb{H}} u$ 表示 $2N$ 维向量 $(X_1 u, \dots, X_N u, Y_1 u, \dots, Y_N u)$; 如果 $F = (F_1, \dots, F_N, G_1, \dots, G_N)$, 那么 $\operatorname{div}_{\mathbb{H}} F = X_1 F_1 + \dots + X_N F_N + Y_1 G_1 + \dots + Y_N G_N$.

本文研究下面问题解的存在性和多重性.

$$-\operatorname{div}_{\mathbb{H}} (A(\eta, u) \nabla_{\mathbb{H}} u) + \frac{1}{2} A_s(\eta, u) |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 + (b(\eta) - \lambda) u = f(\eta, u), \forall \eta \in \mathbb{H}^N \quad (1)$$

式中, $N > 2$; $\lambda \in \mathbb{R}$; $b(\eta)$ 为连续函数且满足 $b(\eta) \geq 0, \forall \eta \in \mathbb{H}^N$ 和 $\lim_{|\eta|_{\mathbb{H}^N} \rightarrow \infty} b(\eta) = +\infty$.

定义空间

$$E = \left\{ u \in L^2(\mathbb{H}^N) \left| \int_{\mathbb{H}^N} (|b(\eta) u|^2 + |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2) < \infty \right. \right\}$$

利用变分法来研究式(1), 寻求其弱解等价于找如下泛函 $I: E \rightarrow \mathbb{R}$ 的临界点

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{H}^N} A(\eta, u) |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{H}^N} (b(\eta) - \lambda) u^2 - \int_{\mathbb{H}^N} F(\eta, u) \quad (2)$$

式中, $F(\eta, \xi) = \int_0^\xi f(\eta, t) dt$. 研究此问题的困难在于泛函 I 在空间 E 中是连续的, 但可能不可微, 而只在 $E \cap L^\infty(\mathbb{H}^N)$ 中可微.

空间 E 紧嵌入到 $L^p(\mathbb{H}^N)$, 且 E 连续嵌入到 $L^{2^*}(\mathbb{H}^N)$, 其中 $2 \leq p < 2^*, 2^* = \frac{2Q}{Q-2}, Q = 2N + 2$.

记 $Lu = -\Delta_{\mathbb{H}} u + b(\eta) u$. 考虑特征值问题 $Lu = \lambda u$. 利用紧算子的特征值理论, 得到下面的特征值序列 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\lambda_n \rightarrow +\infty$. 第一特征值 $\lambda_1 = \inf\{\|u\|^2 \mid u \in E, \|u\|_{L^2(\mathbb{H}^N)} = 1\}$.

定义2 称 u 是泛函 I 的临界点, 如果 $u \in E$, 使得 $\langle I'(u), h \rangle = 0, \forall h \in E \cap L^\infty(\mathbb{H}^N)$.

- 下面给出如下基本条件:
- a. $A(\cdot, \cdot, \cdot): \mathbb{H}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足对于每个 $s \in \mathbb{R}, A(\eta, s)$ 关于 η 是可测的, 对几乎所有的 $\eta \in \mathbb{H}^N, A(\eta, s)$ 关于 s 是属于 C^1 的;
 - b. 存在 $0 < \alpha < \beta < +\infty$, 使得 $\alpha \leq A(\eta, s) \leq \beta, |A_s(\eta, s)| \leq \beta$, a.e. $\eta \in \mathbb{H}^N$ 和 $\forall s \in \mathbb{R}$;
 - c. 存在 $\theta > 2, 1 < \gamma < \frac{\theta}{2}$ 和 $\alpha_1 > 0$, 使得 $0 \leq \frac{\gamma}{2} \cdot A_s(\eta, s) s \leq (\frac{\theta}{2} - \gamma) A(\eta, s) - \alpha_1$, a.e. $\eta \in \mathbb{H}^N$ 和 $\forall s \in \mathbb{R}$;
 - d. $A(\eta, -s) = A(\eta, s)$, a.e. $\eta \in \mathbb{H}^N$ 和 $\forall s \in \mathbb{R}$;
 - e. 设卡氏函数 $f(\cdot, \cdot, \cdot): \mathbb{H}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $f(\eta, 0) = 0$, a.e. $\eta \in \mathbb{H}^N$ 和 $0 < \theta F(\eta, s) \leq f(\eta, s) s$, a.e. $\eta \in \mathbb{H}^N$ 和 $\forall 0 \neq s \in \mathbb{R}$, 其中 θ 与条件c一致;
 - f. 存在 $1 \leq q < \frac{Q+2}{Q-2}$, 使得 $|f(\eta, s)| \leq c_0 |s|^q$, a.e. $\eta \in \mathbb{H}^N$ 和 $\forall s \in \mathbb{R}, c_0$ 是正常数;
 - g. $f(\eta, -s) = -f(\eta, s)$, a.e. $\eta \in \mathbb{H}^N$ 和 $\forall s \in \mathbb{R}$.

设 $N = 1, p = 3$, 则函数 $A(\eta, s) = 2(\sin|\eta|^2 + 2) \arctan s^2 + 20$ 满足条件a—d; 函数 $f(\eta, s) = |s|^{p-1} s$ (a.e. $\eta \in \mathbb{H}^1$) 满足条件e—g. 这些函数的存在性说明研究的问题是有益的.

如果上述条件a—g成立, 则 $I: E \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续的; $\forall u \in E, h \in E \cap L^\infty(\mathbb{H}^N)$ 有

$$\begin{aligned} \langle I'(u), h \rangle &= \int_{\mathbb{H}^N} A(\eta, u) \nabla_{\mathbb{H}} u \nabla_{\mathbb{H}} h + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{H}^N} A_s(\eta, u) |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 h + \int_{\mathbb{H}^N} (b(\eta) - \lambda) u h - \int_{\mathbb{H}^N} f(\eta, u) h \end{aligned}$$

此外, 对于每个 $h \in E \cap L^\infty(\mathbb{H}^N)$, 泛函 $u \rightarrow \langle I'(u), h \rangle$ 是连续的.

下面介绍不光滑临界点理论^[10-12].

定义3 连续泛函 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in X$, $|df|(u)$ 为 σ 在 $[0, +\infty)$ 上的上确界, 称 $|df|(u)$ 为 f 在 u 处的弱斜率, 如果 $\exists \delta > 0$ 和连续映射 $H: B(u, \delta) \times [0, \delta] \rightarrow X$ 使得 $\forall (v, t) \in B(u, \delta) \times [0, \delta]$, 有 $d(H(v, t), v) \leq t$, 且 $f(H(v, t)) \leq f(v) - \sigma t$.

对每个 $u \in E$, 有 $|dI|(u) \geq \sup\{\langle I'(u), h \rangle \mid h \in E \cap L^\infty(\mathbb{R}^N), \|h\| \leq 1\}$, 其中 $|dI|(u)$ 表示 I 在 u 处的弱斜率.

定义4 设 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续泛函, $c \in \mathbb{R}$, 称 f 在水平 c 满足 Palais-Smale 条件 (简称为 $(PS)_c$ 条件). 如果 X 中的每个序列 $\{u_n\}$ 满足 $|df|(u_n) \rightarrow 0$ 和 $f(u_n) \rightarrow c$, 则 $\{u_n\}$ 存在强收敛子列.

本文的主要结论是:

定理1 若 $A(\eta, s)$ 和 $f(\eta, s)$ 分别满足条件 a—d 和条件 e—f, 则存在序列 $\{u_n\} \subset E \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 是式(1)的弱解, 且有 $I(u_n) \rightarrow +\infty$.

2 预备知识和基本引理

为了得到定理1, 建立下列引理. 首先介绍引理1(参考文献[10]中的定理1.4), 它是 C^1 泛函经典结论的推广(参考文献[13]中的定理9.12).

引理1 设 X 是无限维 Banach 空间, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续的偶泛函, 且对任意 $c \in \mathbb{R}$, I 满足 $(PS)_c$ 条件. 更进一步假设:

a. 对于任意有限维子空间 $W \subset E$, $\exists \mathbb{R} > 0$, 使得 $\forall u \in W: \|u\| = \mathbb{R} \Rightarrow f(u) \leq f(0)$;

b. 存在 $\rho > 0, \alpha > f(0)$ 和一个余维数有限的子空间 $V \subset X$ 满足 $\forall u \in V: \|u\| = \rho \Rightarrow f(u) \geq \alpha$. 则 f 在 X 上存在临界点序列 $\{c_n\}$, 且满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = +\infty$.

为了证明泛函 I 满足 $(PS)_c$ 条件, 还需要引入 $(C-P-S)_c$ 条件的定义.

定义5 设 c 为一实数, 称泛函 I 在水平 c 满足具体的 Palais-Smale 条件 (简称为 $(C-P-S)_c$ 条件). 如果对任意序列 $\{u_n\} \subset E$, 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) = c$, $|\langle I'(u_n), h \rangle| \leq \varepsilon_n \|h\|$, $\forall h \in E \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, 其中 $\varepsilon_n \geq 0$ 且 $\varepsilon_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则 $\{u_n\}$ 在 E 中有强收敛子列.

引理2 设 c 为一实数, 若 I 满足 $(C-P-S)_c$ 条件, 则 I 满足 $(PS)_c$ 条件.

证明方法是基本的, 可以参考文献[11], 这里

省略.

引理3 设 $u \in E$ 是泛函 I 的临界点, 则 $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

证明 对于 $k > 1, M > 0$, 在 $\mathbb{R}$ 上定义实函数 G_k, Φ_M, Ψ_M , 其中

$$G_k = \begin{cases} s - k \frac{s}{|s|}, & |s| > k \\ 0, & |s| \leq k \end{cases}$$

$$\Phi_M(s) = \min(G_k(s), M)$$

$$\Psi_M(s) = \max(G_k(s), -M)$$

定义 $s^+ = \max(s, 0)$, $s^- = \min(s, 0)$. 因为 $\Phi_M(u^+) \in E \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, 所以在 $\langle I'(u), h \rangle = 0$ 中取测试函数 $h = \Phi_M(u^+)$ 可得到

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} A(\eta, u) \nabla_{\mathbb{H}} u \nabla_{\mathbb{H}} \Phi_M(u^+) + \\ & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} A_s(\eta, u) |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \Phi_M(u^+) + \\ & \int_{\mathbb{R}^N} (b(\eta) - \lambda) u \Phi_M(u^+) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\eta, u) \Phi_M(u^+) \end{aligned}$$

利用条件 f 和 $|\Phi_M(u^+)| \leq |u^+|$, 从而有

$$\begin{aligned} & \int_{\{u^+ > k\}} A(\eta, u^+) \nabla_{\mathbb{H}} u^+ \nabla_{\mathbb{H}} \Phi_M(u^+) \leq \\ & C_1 \int_{\{u^+ > k\}} (u^+)^{p+1} \end{aligned}$$

因为在 $\mathbb{R}^N$ 上, 当 $M \rightarrow +\infty$ 时, 有 $\Phi_M(u^+) \rightarrow G_k(u^+)$ 几乎处处成立, 在 E 中有 $\Phi_M(u^+) \xrightarrow{\text{弱}} G_k(u^+)$, 从而当 $M \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \int_{\{u^+ > k\}} A(\eta, u^+) |\nabla_{\mathbb{H}} u^+|^2 \leq \\ & C_1 \int_{\{u^+ > k\}} (u^+)^{p+1} \\ & \text{定义 } \Omega_k^+ = \{\eta \in \mathbb{R}^N, u^+ > k\}, \text{ 由条件 b 可得} \\ & \int_{\Omega_k^+} |\nabla_{\mathbb{H}} u^+|^2 \leq C_2 \int_{\Omega_k^+} (u^+ - k)^{p+1} + \\ & C_2 k^{p+1} m(\Omega_k^+) \end{aligned} \quad (3)$$

注意到 $(\int_{\Omega_k^+} (u^+ - k)^{p+1})^{1-\frac{2}{p+1}} \leq C_3$, 有

$$\int_{\Omega_k^+} (u^+ - k)^{p+1} \leq C_3 \left(\int_{\Omega_k^+} (u^+ - k)^{p+1} \right)^{\frac{2}{p+1}} \quad (4)$$

另一方面, 因为 $\int_{\Omega_k^+} k^{2^*} \leq \int_{\Omega_k^+} |u^+|^{2^*} = C_4$, 故

$$k^{2^*} \leq \frac{C_4}{m(\Omega_k^+)} \quad (5)$$

由式(3)—(5), 可得到不等式

$$\int_{\Omega_k^+} |\nabla_{\mathbb{H}} u^+|^2 \leq C_5 \left(\int_{\Omega_k^+} (u^+ - k)^{p+1} \right)^{\frac{2}{p+1}} +$$

$$C_5 k^2 m(\Omega_k^+)^{1-\frac{p-1}{2^*}}, \forall k > 1$$

利用文献[12]中的定理5.2, 知 $u^+ \in$

$L^\infty(\mathbb{H}^N)$. 用 $\Psi_M(u^-)$ 代替 $\Phi_M(u^+)$, 同样的方法可以证明 $u^- \in L^\infty(\mathbb{H}^N)$, 从而 $u \in L^\infty(\mathbb{H}^N)$.

引理4 设 $\{u_n\}$ 是 E 中有界数列且满足

$$|\langle I'(u_n), h \rangle| \leq \varepsilon_n h, \forall h \in E \cap L^\infty(\mathbb{H}^N) \quad (6)$$

式中, $\{\varepsilon_n\}$ 是收敛于 0 的实数序列, 则存在 $u \in E$, 使得在 $\mathbb{H}^N$ 上 $\nabla_{\mathbb{H}} u_n \rightarrow \nabla_{\mathbb{H}} u$ 几乎处处成立, 并且存在子序列(仍记为 $\{u_n\}$), 在 E 中 $u_n \xrightarrow{\text{弱}} u$. 进一步有

$$\langle I'(u), h \rangle = 0, \forall h \in E \cap L^\infty(\mathbb{H}^N) \quad (7)$$

即 u 是 I 的一个临界点.

证明方法可参考文献[10]中的引理 2.3, 此处省略.

下面的引理是 Brezis-Browder 定理^[9]的向量形式, 其证明可参考文献[8].

引理5 定义 E^* 是空间 E 的对偶空间, 设 $v \in E, T \in E^* \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{H}^N)$ 使得 $T(\eta)v(\eta) \geq h(\eta)$, a.e. $\eta \in \mathbb{H}^N, h(\eta) \in L^1(\mathbb{H}^N)$, 则 $Tv \in L^1(\mathbb{H}^N)$, 且 $\langle T, v \rangle_{E^*, E} = \int_{\mathbb{H}^N} Tv$.

引理6 设 $c \in \mathbb{R}$, 序列 $\{u_n\}$ 满足式(6)且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) = c \quad (8)$$

则 $\{u_n\}$ 在 E 中有界.

证明 由式(6)可得

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\mathbb{H}^N} A_s(\eta, u_n) |\nabla_{\mathbb{H}} u_n|^2 h - \lambda \int_{\mathbb{H}^N} u_n h - \int_{\mathbb{H}^N} f(\eta, u_n) h \right| \leq \varepsilon_n \|h\| + (1 + \beta) \|u_n\| \|h\|$$

因此, $W_n = \frac{1}{2} A_s(\eta, u_n) |\nabla_{\mathbb{H}} u_n|^2 - \lambda u_n - f(\eta, u_n) \in E^*$. 由条件 c 知 $W_n(\eta) u_n(\eta) \geq -\lambda u_n^2(\eta) - f(\eta, u_n(\eta)) u_n(\eta)$, a.e. $\eta \in \mathbb{H}^N$.

因为 $(-\lambda u_n^2 - f(\eta, u_n) u_n) \in L^1(\mathbb{H}^N)$, 由引理 5 得 $W_n u_n \in L^1(\mathbb{H}^N)$, 且 $\langle W_n, u_n \rangle_{E^*, E} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{H}^N} A_s(\eta, u_n) |\nabla_{\mathbb{H}} u_n|^2 u_n - \lambda \int_{\mathbb{H}^N} u_n^2 - \int_{\mathbb{H}^N} f(\eta, u_n) u_n$, 从而有

$$\left| \int_{\mathbb{H}^N} (A(\eta, u_n) |\nabla_{\mathbb{H}} u_n|^2 + \frac{1}{2} A_s(\eta, u_n) |\nabla_{\mathbb{H}} u_n|^2 u_n + (b(\eta) - \lambda) u_n^2 - f(\eta, u_n) u_n) \right| \leq \varepsilon_n \|u_n\| \quad (9)$$

由式(8)和式(9), 通过简单计算可以得到 $\theta I(u_n) - \gamma(2.7) \leq C_6(1 + u_n)$. 由条件 c 和条件 e, 可得

$$\alpha_1 \int_{\mathbb{H}^N} |\nabla_{\mathbb{H}} u_n|^2 + \left(\frac{\theta}{2} - \gamma\right) \int_{\mathbb{H}^N} (b(\eta) - \lambda) u_n^2 +$$

$$\theta(\gamma - 1) \int_{\mathbb{H}^N} F(\eta, u_n) \leq C_6(1 + \|u_n\|) \quad (10)$$

故存在 $M > 0, C_7(M, \lambda) > 0$, 使得

$$\left(\frac{\theta}{2} - \gamma\right) \int_{\mathbb{H}^N} (b(\eta) - \lambda) u_n^2 \geq \left(\frac{\theta}{2} - \gamma\right) \int_{\mathbb{H}^N} \frac{b(\eta)}{2} u_n^2 - C_7 \int_{\{|\eta|_{\mathbb{H}^N} < M\}} u_n^2$$

由式(10)可得

$$\alpha_1 \int_{\mathbb{H}^N} |\nabla_{\mathbb{H}} u_n|^2 + \left(\frac{\theta}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \int_{\mathbb{H}^N} (b(\eta) - \lambda) u_n^2 + \theta(\gamma - 1) \int_{\mathbb{H}^N} F(\eta, u_n) \leq C_6(1 + \|u_n\|) + C_7 \|u_n\|_{L^2(\{|\eta|_{\mathbb{H}^N} < M\})}^2 \quad (11)$$

由条件 e, 存在 $a_0 > 0, b_0 > 0$, 使得

$$F(\eta, s) \geq a_0 |s|^\theta - b_0, \quad \text{a.e. } \eta \in \{|\eta|_{\mathbb{H}^N} < M\}, \forall s \in \mathbb{R} \quad (12)$$

由式(11)和式(12)有

$$\min(\alpha_1, \frac{\theta}{4} - \frac{\gamma}{2}) \|u_n\|^2 + \theta(\gamma - 1) \cdot \|u_n\|_{L^\theta(\{|\eta|_{\mathbb{H}^N} < M\})}^\theta \leq C_6(1 + \|u_n\|) + C_7 \|u_n\|_{L^\theta(\{|\eta|_{\mathbb{H}^N} < M\})}^\theta + b_0 \theta(\gamma - 1) m(\{|\eta|_{\mathbb{H}^N} < M\}) \quad (13)$$

利用 Young 不等式得到

$$\|u_n\|_{L^\theta(\{|\eta|_{\mathbb{H}^N} < M\})}^\theta \leq C(\varepsilon) + \varepsilon \|u_n\|_{L^\theta(\{|\eta|_{\mathbb{H}^N} < M\})}^\theta$$

在上式中选取充分小的 ε , 利用式(13)有

$$\min(\alpha_1, \frac{\theta}{4} - \frac{\gamma}{2}) \|u_n\|^2 \leq C_6(1 + \|u_n\|) + C(\varepsilon) + b_0 \theta(\gamma - 1) m(\{|\eta|_{\mathbb{H}^N} < M\})$$

故序列 $\{u_n\}$ 在 E 中有界.

引理7 设序列 $\{u_n\}$ 由引理 4 给出, 则存在 $\{u_n\}$ 的子列(仍记为 $\{u_n\}$) 在 E 中强收敛于 u .

证明 由引理 4 可知, 在 E 中 $u_n \xrightarrow{\text{弱}} u (n \rightarrow \infty)$, 且 u 是泛函 I 的临界点. 因此在式(7)中取测试函数 $h = u$, 有

$$\int_{\mathbb{H}^N} (A(\eta, u) |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 + \frac{1}{2} A_s(\eta, u) |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 u + (b(\eta) - \lambda) u^2 - f(\eta, u) u) = 0 \quad (14)$$

再利用引理 4, 有 $\nabla_{\mathbb{H}} u_n \rightarrow \nabla_{\mathbb{H}} u$, a.e. $\eta \in \mathbb{H}^N$, 这样利用 Fatou 引理, 可以得到

$$\int_{\mathbb{H}^N} A_s(\eta, u) |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 u \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{H}^N} A_s(\eta, u_n) |\nabla_{\mathbb{H}} u_n|^2 u_n \quad (15)$$

由于 E 紧嵌入 $L^2(\mathbb{H}^N)$, 故

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{H}^N} u_n^2 = \int_{\mathbb{H}^N} u^2 \quad (16)$$

由条件 f 有 $|f(\eta, u_n) u_n| \leq c_0 |u_n|^{q+1}$. 又因

E 紧嵌入 $L^{q+1}(\mathbb{H}^N)$, 其中 $1 \leq q < \frac{Q+2}{Q-2}$, 利用 Fatou 引理, 可以得到

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{H}^N} f(\eta, u_n) u_n = \int_{\mathbb{H}^N} f(\eta, u) u \quad (17)$$

由式(14)—(17), 对式(9)取上极限得到

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{H}^N} A(\eta, u_n) |\nabla_{\mathbb{H}} u_n|^2 + \int_{\mathbb{H}^N} b(\eta) u_n^2 \leq \int_{\mathbb{H}^N} A(\eta, u) |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 + \int_{\mathbb{H}^N} b(\eta) u^2 \quad (18)$$

另一方面, 由 Lebesgue 控制收敛定理和在 E 中 $u_n \xrightarrow{\text{弱}} u$, 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{H}^N} A(\eta, u_n) \nabla_{\mathbb{H}} u_n \nabla_{\mathbb{H}} u = \int_{\mathbb{H}^N} A(\eta, u) |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{H}^N} b(\eta) u_n u = \int_{\mathbb{H}^N} b(\eta) u^2 \quad (20)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{H}^N} A(\eta, u_n) |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 = \int_{\mathbb{H}^N} A(\eta, u) |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \quad (21)$$

结合式(18)—(21), 得到

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{H}^N} (A(\eta, u_n) |\nabla_{\mathbb{H}} u_n - \nabla_{\mathbb{H}} u|^2 + b(\eta) |u_n - u|^2) \leq 0$$

因此, 在 E 中序列 $\{u_n\}$ 强收敛于 u .

由引理 6 和引理 7 可知, 对每一个实数 c , 泛函 I 满足 $(C-P-S)_c$ 条件.

3 定理 1 的证明

容易验证泛函 I 是连续且为偶泛函. 进一步由引理 2, 对于 $\forall c \in \mathbb{R}$, 泛函 I 满足 $(PS)_c$ 条件.

首先, 证明泛函 I 满足引理 1 的假设 a.

设 W 是空间 E 的有限维子空间, 且 $u \in W$ 使得 $I(u) \geq 0$. 于是由假设 b 得到

$$\max(1, \beta) \|u\|^2 - \lambda \|u\|_{L^2(\mathbb{H}^N)}^2 - \int_{\mathbb{H}^N} F(\eta, u) \geq 0 \quad (22)$$

由条件 e 和条件 f, 存在 $m(\eta) \in L^\infty(\mathbb{H}^N)$ 满足 $m(\eta) > 0$, a.e. $\eta \in \mathbb{H}^N$ 和一个正常数 C , 使得

$$F(\eta, s) \geq m(\eta) |s|^\theta - C |s|^2, \quad \text{a.e. } \eta \in \mathbb{H}^N, \text{ 且 } \forall s \in \mathbb{R}$$

结合式(22), 从而有

$$\max(1, \beta) \|u\|^2 \geq \int_{\mathbb{H}^N} m(\eta) |u|^\theta - C \int_{\mathbb{H}^N} |u|^2 \quad (23)$$

因为 W 是空间 E 的有限维子空间, $\left(\int_{\mathbb{H}^N} m(\eta) |u|^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}$ 是 W 上的范数, 所以由式(23), 存在 $C_1 > 0$, 使得 $\|u\|^\theta \leq C_1 \|u\|^2$.

因为 $\theta > 2$, 故集合 $\{u \in W, I(u) \geq 0\}$ 在 E 上有界, 说明引理 1 的假设 a 成立.

其次, 证明泛函 I 满足引理 1 的假设 b.

由条件 b 和条件 f, 对 $u \in E$, 有

$$I(u) \geq \frac{\min(1, \alpha)}{2} \|u\|^2 - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{H}^N} u^2 - C_2 \|u\|^{p+1} \quad (24)$$

若 $\frac{\lambda}{\min(1, \alpha)} < \lambda_1$, 则由式(24)知存在足够小的 $\rho > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $\|u\| = \rho$ 时, $I(u) \geq \delta > I(0)$ 成立; 若 $\frac{\lambda}{\min(1, \alpha)} \in [\lambda_k, \lambda_{k+1})$, $k \geq 1$. 设 $\{v_j\}$ 是算子 $L(u) = -\Delta_{\mathbb{H}} u + b(\eta) u$ 特征向量所构成的标准正交基, 记 $V_k = (\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\})^\perp$, 由式(24)得到

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \left(\min(1, \alpha) - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}} \right) \|u\|^2 - C_3 \|u\|^{p+1}$$

从而存在 $\rho > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $u \in V_k$, $\|u\| = \rho$ 时, $I(u) \geq \delta > I(0)$ 成立.

因此, 当选取 $V = V_k$ 时, 引理 1 的假设 b 成立. 故定理 1 的结论成立.

参考文献:

- [1] Aouaoui S. Multiplicity of solutions for quasilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 370(2): 639–648.
- [2] Gazzola F. Positive solutions of critical quasilinear elliptic problems in general domains [J]. Abstract and Applied Analysis, 1998, 3(1/2): 65–84.
- [3] Salvatore A. Some multiplicity results for a superlinear elliptic problem in $\mathbb{R}^N$ [J]. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 2003, 21: 29–39.
- [4] 赵美玲, 贾高. 加权 Sobolev 空间中奇异拟线性椭圆方程共振问题 [J]. 上海理工大学学报, 2012, 34(6): 598–603.
- [5] 刘向平, 章国庆. 带非线性边界的 p -Laplacian 问题的多重解 [J]. 上海理工大学学报, 2013, 35(5): 449–451.
- [6] Garofalo N, Lanconelli E. Existence and nonexistence results for semilinear equations on the Heisenberg group [J]. Indiana University Mathematical Journal, 1992, 41(1): 71–98.
- [7] Niu P C. Nonexistence for semilinear equations and systems in the Heisenberg group [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1999, 240(1): 47–59.

(下转第 237 页)

[7] 侯海盟,李诗媛,吕清刚,等. 城市干化污泥循环流化床燃烧过程中 NO 和 N₂O 的排放特性[J]. 工程热物理学报,2012,33(12):2197-2201.

[8] 郭熙,张守玉,董爱霞,等. 高温烟气中单颗粒褐煤干燥特性实验研究[J]. 上海理工大学学报,2014,36(6):516-521.

[9] 刘亮. 污泥燃烧热解特性及其焚烧技术[M]. 长沙:中南大学出版社,2006:160-170.

[10] 钟北京,傅维标. 乳化重油含水量对锅炉 NO_x 和 SO₂ 排放的影响[J]. 燃烧科学与技术,1998,4(4):333-341.

[11] Mahmoudi S, Baeyens J, Seville J P K, et al. NO_x formation and selective non-catalytic reduction(SNCR) in a fluidized bed combustor of biomass[J]. Biomass and Bioenergy,2010,34(9):1393-1409.

[12] Maller J,Munk B,Crillesen K,et al. Life cycle assessment of selective non-catalytic reduction (SNCR) of nitrous oxides in a full-scale municipal solid waste incinerator[J]. Waste Management,2011,31(6):1184-1193.

[13] 侯祥松,李金平,张海,等. 石灰石脱硫对循环流化床中 NO_x 生成和排放的影响[J]. 电站系统工程,2005,21(1):5-16.

[14] 熊志波,韩奎华,高攀,等. 褐煤再燃/先进再燃脱硝特性[J]. 煤炭学报,2011,36(9):1544-1548.

[15] Khan T, Lee Y Y, Brown R A, et al. Homogeneous phase formation of nitrous oxide from hydrogen cyanide in a circulating fluidized bed combustor [C] // 12th International Conference on Fluidized Bed Combustion. San Diego:ASME,1993:441-446.

[16] 朱葛,赵长遂,林良生,等. 石化污泥与煤流化床混烧 NO_x 的排放特性[J]. 电站系统工程,2008,24(4):22-24.

(编辑:石 瑛)

(上接第 214 页)

[8] Squassina M. Existence of multiple solutions for quasilinear diagonal elliptic systems [J]. Electronic Journal of Differential Equations,1999(14):1-12.

[9] Brezis H,Browder F E. Sur une proprieta des espaces de Sobolev [J]. Comptes Rendus Mathématique Académie des Sciences Paris A-B, 1978, 287 (1): 113-115.

[10] Canino A. Multiplicity of solutions for quasilinear elliptic equations [J]. Topological Methods in Nonlinear Analysis,1995,6(2):357-370.

[11] Douik H. Variational methods in nonsmooth analysis and quasilinear equations[D]. Germany, North Rhine Westphalia:Aachen University,2003.

[12] Ladyaenskaya O A, Uralceva N N. Linear and quasilinear elliptic equations[M]. New York:Academic Press,1968.

[13] Rabinowttz P H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations[M]. Providence:American Mathematical Society,1986.

(编辑:董 伟)