文章编号:1007－6735(2015)03－0215－05　　DOI:10.13255/j.cnki.jusst.2015.03.003

一类特殊幂零李代数的结构

胡建华，　赵卫萍
(上海理工大学 理学院,上海　200093)

摘要: 鉴于幂零李代数的结构和表示在李理论中有着重要的地位,主要讨论复数域上一类特殊的 6 维带参数 ε 的幂零李代数的代数结构.首先,在同构意义下,利用同构的定义及性质,通过大量的推导计算,确定了此类幂零李代数的自同构群同构于 6 阶矩阵乘法群;其次,探讨了这类幂零李代数的 Centroid 代数的基本性质,给出了 Centroid 代数的矩阵表示,同时得出这类幂零李代数的 Centroid 代数是一个 6 维幂零李代数;最后,给出了该类幂零李代数的 δ－导子的矩阵表示.特别当 δ 为 1 时,探讨了该类幂零李代数的导子代数的结构,得出导子代数是 10 维李代数,外导子代数是 5 维李代数.

关键词: 李代数;幂零;自同构;δ－导子
中图分类号: O 152　　**文献标志码:** A

Structure of a Certain Class of Nilpotent Lie Algebras

HU Jianhua，　ZHAO Weiping
(*College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China*)

Abstract: The structure and representation of nilpotent Lie algebra play an important role in the Lie theory. The algebraic structure of a certain class of six-dimensional nilpotent Lie algebras with the parameter ε over the complex field was discussed. It is determined that in the sense of isomorphism, the automorphism group of this class of six-dimensional nilpotent Lie algebra is isomorphic to a six-order matrix multiplication group by using the definition and properties of isomorphism and a large amount of calculation. Then the properties of Centroid algebras of this class of six-dimensional nilpotent Lie algebra were analysed and its matrix representation was given. It is shown that the Centroid algebra is a six-dimensional nilpotent Lie algebra. Finally, the δ-derivation of this class of six-dimensional nilpotent Lie algebras was determined. Especially in the case of $\delta = 1$, the structure of derivation algebras was discussed and it is concluded that the derivation algebra is a ten-dimensional Lie algebra and outer derivation algebra is a five-dimensional Lie algebra.

Key words: *Lie algebra*; *nilpotent*; *automorphism*; *δ-derivation*

收稿日期: 2014－04－15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11201299)
第一作者: 胡建华(1978－),女,讲师.研究方向:代数群及其表示理论.E-mail:smilydragon2011@163.com

幂零李代数是李理论中一类重要的李代数，其结构和表示在李理论中有着重要的地位. 幂零李代数因其结构的复杂性还有很多问题尚未解决，受到许多学者的关注，低维幂零李代数成为学者们探索的对象. Schneider[1]通过确定基的方法给出了低维幂零李代数的分类；Graaf[2]利用中心扩张的方法给出了特征不为2的小于等于6维的幂零李代数的分类；杨恒云等[3]确定了二上同调群的结构. 本文在此基础上，研究复数域上一类6维带参数的幂零李代数的代数结构.

1 概 念

定义 1[4] 设 $\boldsymbol{L}$ 是域 F 上的向量空间，在 $\boldsymbol{L}$ 中定义了一个李括号积(记为[· , ·])，对 $\forall x,y\in \boldsymbol{L}$，有 $[x,y]\in \boldsymbol{L}$，且以下三个条件成立，称 $\boldsymbol{L}$ 为域 F 上的一个李代数.

a. 李括号积是双线性的；

b. $[x,x]=0,\ \forall x\in \boldsymbol{L}$；

c. $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0,\ \forall x,y,z\in \boldsymbol{L}$(Jacobi 等式).

由条件 b 易得，当 $\mathrm{Char}F\neq 2$ 时，有 $[x,y]=-[y,x],\ \forall x,y\in \boldsymbol{L}$.

例 1[5] 对结合代数 $\boldsymbol{A}$，$\forall a,b\in \boldsymbol{A}$，定义运算 $[a,b]=ab-ba$，则 $\boldsymbol{A}$ 构成一个李代数.

定义 2[6] 设 $\boldsymbol{L}$ 是域 F 上的李代数，$\{\boldsymbol{L}^i\}(i\geqslant 0)$为 $\boldsymbol{L}$ 的降中心列. 若存在自然数 $n\in\mathbb{N}$，使得 $\boldsymbol{L}^n=\{0\}$，则称 $\boldsymbol{L}$ 为幂零李代数.

采用文献[2]的记号，$\boldsymbol{L}_{6,21}(\varepsilon)$表示复数域 $\mathbb{C}$ 上这样一个6维李代数，其基为 $\{x_1,x_2,\cdots,x_6\}$，其李括号积为

$$[x_1,x_2]=x_3,[x_1,x_3]=x_4,[x_2,x_3]=x_5,$$
$$[x_1,x_4]=x_6,[x_2,x_5]=\varepsilon x_6$$

其余的李括号积 $[x_i,x_j]=0$. 这是一个带参数 $\varepsilon\in\mathbb{C}$ 的幂零李代数，且 $\boldsymbol{L}^5=\{0\}$，x_6 是中心元，并且由文献[2]知，对参数 $\eta\in\mathbb{C}$，$\boldsymbol{L}_{6,21}(\varepsilon)\cong\boldsymbol{L}_{6,21}(\eta)$，当且仅当存在 $\alpha\in\mathbb{C}$，使得 $\eta=\alpha^2\varepsilon$. 本文将刻画复数域上李代数 $\boldsymbol{L}_{6,21}(\varepsilon)$的自同构群、Centroid 代数、导子代数以及 δ-导子.

2 自同构群

定义 3[4,7] 设 $\boldsymbol{L}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的李代数，若线性变换 $\phi:\boldsymbol{L}\to\boldsymbol{L}$ 满足

$$\phi([x,y])=[\phi(x),\phi(y)],\ \forall x,y\in\boldsymbol{L}$$

则称 ϕ 是 $\boldsymbol{L}$ 的同态映射，$\boldsymbol{L}$ 的所有同态映射的集合记为 $\mathrm{End}(\boldsymbol{L})$. 若 ϕ 是可逆线性变换，则称 ϕ 是 $\boldsymbol{L}$ 的自同构映射，$\boldsymbol{L}$ 的所有自同构映射构成一个群，称为 $\boldsymbol{L}$ 的自同构群，记作 $\mathrm{Aut}\boldsymbol{L}$.

定理 1 李代数 $\boldsymbol{L}_{6,21}(\varepsilon)$的自同构群 $\mathrm{Aut}\,\boldsymbol{L}_{6,21}(\varepsilon)$同构于6阶矩阵乘法群

$$G_1=\left\{A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0\\ a_{31} & a_{32} & t & 0 & 0 & 0\\ a_{41} & a_{42} & a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12} & a_{11}t & a_{12}t & 0\\ a_{51} & a_{52} & a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22} & a_{21}t & a_{22}t & 0\\ a_{61} & a_{62} & (a_{11}a_{42}-a_{41}a_{12})+(a_{21}a_{52}-a_{51}a_{22})\varepsilon & a_{11}a_{43}+a_{21}a_{53}\varepsilon & a_{12}a_{43}+a_{22}a_{53}\varepsilon & t(a_{11}^2+a_{21}^2\varepsilon)\end{pmatrix}\right\}$$

式中，a_{ij} 是任意的复数；$t=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，$\varepsilon a_{11}^2+a_{21}^2\varepsilon^2=a_{12}^2+a_{22}^2\varepsilon$，$a_{12}a_{11}+a_{22}a_{21}\varepsilon=0$.

证明 任取 $\phi\in\mathrm{Aut}\,\boldsymbol{L}_{6,21}(\varepsilon)$，$\phi(x_i)\in\boldsymbol{L}$，$i=1,2,\cdots,6$，令

$$\phi(x_i)=\sum_{j=1}^{6}a_{ji}x_j,\ i=1,2,\cdots,6,\ a_{ji}\in\mathbb{C}^{[8]}$$

记 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{6\times 6}$，即 $\boldsymbol{A}$ 为 ϕ 在基 $\{x_1,x_2,\cdots,x_6\}$ 下的矩阵. 由于 ϕ 是自同构，从而 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵[9]. 下面逐步计算得出 $\boldsymbol{A}$ 的一般表达式. 由 $\phi([x_1,x_2])=\phi(x_3)=[\phi(x_1),\phi(x_2)]$，有

$$\sum_{j=1}^{6}a_{j3}x_j=\left[\sum_{j=1}^{6}a_{j1}x_j,\sum_{j=1}^{6}a_{j2}x_j\right]=$$
$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_3+(a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12})x_4+$$
$$(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})x_5+(a_{11}a_{42}-a_{41}a_{12}+$$
$$a_{21}a_{52}\varepsilon-a_{51}a_{22}\varepsilon)x_6$$

得

$$a_{13}=a_{23}=0$$
$$a_{33}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$
$$a_{43}=a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12}$$
$$a_{53}=a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}$$
$$a_{63}=(a_{11}a_{42}-a_{41}a_{12})+(a_{21}a_{52}-a_{51}a_{22})\varepsilon$$

类似地，分别将 ϕ 作用于 $[x_1,x_3]=x_4$，$[x_2,x_3]=x_5$，$[x_1,x_4]=x_6$ 的两边，得到

$$a_{14}=a_{24}=a_{34}=a_{15}=a_{25}=a_{35}=$$
$$a_{16}=a_{26}=a_{36}=a_{46}=a_{56}=0$$

$$a_{44} = a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$
$$a_{54} = a_{21}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$
$$a_{64} = a_{11}a_{43} + a_{21}a_{53}\varepsilon$$
$$a_{45} = a_{12}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$
$$a_{55} = a_{22}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$
$$a_{65} = a_{12}a_{43} + a_{22}a_{53}\varepsilon$$
$$a_{66} = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(a_{11}^2 + a_{21}^2\varepsilon)$$

由于 ϕ 是可逆的,知 $a_{33} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, $a_{66} \neq 0$. 再将 ϕ 作用于 $[x_2, x_5] = \varepsilon x_6$ 的两边,得 $\varepsilon a_{66} = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(a_{12}^2 + a_{22}^2\varepsilon)$,从而 $\varepsilon a_{11}^2 + a_{21}^2\varepsilon^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2\varepsilon$. 将 ϕ 分别作用于 $[x_1, x_5] = 0$, $[x_2, x_4] = 0$ 的两边,得 $a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21}\varepsilon = 0$. 令 $t = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$,定理得证.

3　Centroid 代数

定义 4[4,10]　设 L 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的李代数,若线性变换 $\sigma \in \mathrm{End}(L)$ 且

$$\sigma([x, y]) = [x, \sigma(y)], \forall x, y \in L$$

则称变换 σ 是 L 的 Centroid. L 上所有 Centroid 的集合记为 $\mathrm{Cent}(L)$.

性质 1　对 $\forall \sigma \in \mathrm{Cent}(L)$,恒有 $[x, \sigma(y)] = [\sigma(x), y]$.

证明　由 $\sigma([x, y]) = [x, \sigma(y)] = [\sigma(x), \sigma(y)]$, $\sigma([y, x]) = [y, \sigma(x)] = [\sigma(y), \sigma(x)]$,又 $[x, y] = -[y, x]$,所以 $[x, \sigma(y)] = -[y, \sigma(x)]$,从而 $[x, \sigma(y)] = [\sigma(x), y]$.

性质 2[11]　设 L 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的李代数,则 $\mathrm{Cent}(L)$ 是李代数.

证明　$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{Cent}(L)$,定义李括号 $[\sigma_1, \sigma_2] = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1$. 只需证 $[\sigma_1, \sigma_2] \in \mathrm{Cent}(L)$. 显然 $[\sigma_1, \sigma_2] \in \mathrm{End}(L)$. 又因为 $\forall x, y \in L$

$$\begin{aligned}[\sigma_1, \sigma_2]([x, y]) &= (\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1)([x, y]) = \\ &\sigma_1([x, \sigma_2 y]) - \sigma_2([x, \sigma_1 y]) = \\ &[x, \sigma_1\sigma_2 y] - [x, \sigma_2\sigma_1 y] = \\ &[x, \sigma_1\sigma_2 y - \sigma_2\sigma_1 y] = [x, [\sigma_1, \sigma_2](y)]\end{aligned}$$

故 $\mathrm{Cent}(L)$ 是一个李代数.

记 E 表示 6 阶单位矩阵, E_{ij} 表示第 i 行第 j 列的元素为 1,其余元素均为 0 的 6 阶矩阵.

定理 2　李代数 $\mathrm{Cent}(L_{6,21}(\varepsilon))$ 同构于 6 阶矩阵代数

$$\begin{aligned}M = \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}E_{41} \oplus \mathbb{C}(E_{51} - \varepsilon E_{42} - \varepsilon E_{63}) \\ \oplus \mathbb{C}E_{52} \oplus \mathbb{C}E_{61} \oplus \mathbb{C}E_{62}\end{aligned}$$

证明　任取 $\sigma \in \mathrm{Cent}(L_{6,21}(\varepsilon))$, $\sigma(x_i) \in L$, $i = 1, 2, \cdots, 6$. 令

$$\sigma(x_i) = \sum_{j=1}^{6} b_{ji}x_j, i = 1, 2, \cdots, 6, b_{ji} \in \mathbb{C}$$

记 $B = (b_{ij})_{6\times 6}$,即 B 为 σ 在基 $\{x_1, x_2, \cdots, x_6\}$ 下的矩阵. 因为 $\sigma \in \mathrm{End}(L)$,则除了可逆性之外, B 与 A 有相同的其它性质. 又由 $\sigma([x_1, x_2]) = [x_1, \sigma(x_2)] = \sigma(x_3)$,得到

$$b_{13} = b_{23} = b_{53} = 0$$
$$b_{22} = b_{33}, b_{32} = b_{43}, b_{42} = b_{63}$$

分别将 σ 作用于 $[x_1, x_3] = x_4$, $[x_2, x_3] = x_5$, $[x_1, x_4] = x_6$, $[x_2, x_5] = \varepsilon x_6$ 的两边,得到

$$\begin{aligned}b_{14} = b_{24} = b_{34} = b_{15} = b_{25} = b_{35} = \\ b_{16} = b_{26} = b_{36} = b_{46} = b_{56} = 0\end{aligned}$$
$$b_{54} = b_{45} = b_{65} = 0$$
$$b_{64} = b_{43} = b_{32}$$
$$b_{22} = b_{44} = b_{33} = b_{66} = b_{55}$$

同理,利用 $\sigma([x, y]) = [\sigma(x), y]$,将 σ 分别作用于 $[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = x_4$, $[x_2, x_3] = x_5$, $[x_1, x_4] = x_6$, $[x_2, x_5] = \varepsilon x_6$ 的两边,得到

$$b_{12} = b_{21} = b_{31} = b_{43} = 0$$
$$b_{42} = b_{63} = -\varepsilon b_{51}$$
$$b_{11} = b_{22} = b_{44} = b_{33} = b_{66} = b_{55}$$

综上所述,有

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{41} & -\varepsilon b_{51} & 0 & b_{11} & 0 & 0 \\ b_{51} & b_{52} & 0 & 0 & b_{11} & 0 \\ b_{61} & b_{62} & -\varepsilon b_{51} & 0 & 0 & b_{11} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}b_{11}E + b_{41}E_{41} + b_{51}(E_{51} - \varepsilon E_{42} - \varepsilon E_{63}) + \\ b_{52}E_{52} + b_{61}E_{61} + b_{62}E_{62}\end{aligned}$$

式中, b_{ij} 是任意的复数[12],定理得证.

推论 1　李代数 $\mathrm{Cent}(L_{6,21}(\varepsilon))$ 是幂零李代数,且其维数是 6.

证明　由定理 2 可知, $\mathrm{Cent}(L_{6,21}(\varepsilon))$ 同构于矩阵代数 M,而 M 由对角线元素全相等的下三角矩阵生成,从而 M 是幂零的,故 $\mathrm{Cent}(L_{6,21}(\varepsilon))$ 是幂零的且维数等于 M 的维数,为 6.

4　δ-导子

定义 5[6]　设 L 是域 $\mathbb{C}$ 上的李代数,若线性变换 $D: L \to L$,满足

$$\boldsymbol{D}([x,y]) = [\boldsymbol{D}(x),y]+[x,\boldsymbol{D}(y)],\forall x,y\in \boldsymbol{L}$$

则称 $\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{L}$ 的导子,$\boldsymbol{L}$ 的所有导子所成的集合记为 $\mathrm{Der}(\boldsymbol{L})$.

性质 3[6] 设 $\boldsymbol{L}$ 是域 $\mathbb{C}$ 上的李代数,$\mathrm{Der}(\boldsymbol{L})$ 是一个李代数.

由文献[4],对 $\forall x\in \boldsymbol{L}$,伴随算子 $\mathrm{ad}x\in \mathrm{Der}(\boldsymbol{L})$,称为 $\boldsymbol{L}$ 的内导子.$\boldsymbol{L}$ 的所有内导子的集合记为 $\mathrm{Ad}(\boldsymbol{L})$,构成 $\boldsymbol{L}$ 的内导子代数.商代数 $\mathrm{Der}(\boldsymbol{L})/\mathrm{Ad}(\boldsymbol{L})$ 称为外导子代数.

定义 6[13] 设 $\boldsymbol{L}$ 是域 $\mathbb{C}$ 上的李代数,$\delta\in\mathbb{C}$ 为任意不为零的数,若线性变换 $\boldsymbol{D}:\boldsymbol{L}\to\boldsymbol{L}$,满足

$$\boldsymbol{D}([x,y]) = \delta[\boldsymbol{D}(x),y]+\delta[x,\boldsymbol{D}(y)],\quad \forall x,y\in\boldsymbol{L}$$

则称 $\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{L}$ 的 δ-导子.$\boldsymbol{L}$ 的所有 δ-导子所成的集合记为 $\mathrm{Der}_\delta(\boldsymbol{L})$.显然[14],李代数 $\boldsymbol{L}$ 的导子是 1-导子;$\boldsymbol{L}$ 的Centroid是 $\frac{1}{2}$-导子;当 $\delta=-1$ 时称为反导子.

定理 3 对任意 $\boldsymbol{D}\in\mathrm{Der}_\delta(\boldsymbol{L}_{6,21}(\varepsilon))$,则 $\boldsymbol{D}$ 在基 $\{x_1,x_2,\cdots,x_6\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{D}_\delta$,其中

a. 当 $\delta\neq1$ 且 $\delta\neq-1$ 时,为

$$\boldsymbol{D}_\delta = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0\\ c_{31} & c_{32} & 2\delta c_{11} & 0 & 0 & 0\\ c_{41} & c_{42} & \delta c_{32} & (\delta+2\delta^2)c_{11} & 0 & 0\\ c_{51} & c_{52} & -\delta c_{31} & 0 & (\delta+2\delta^2)c_{11} & 0\\ c_{61} & c_{62} & \delta(c_{42}-c_{51}\varepsilon) & \delta^2 c_{32} & -\delta^2 c_{31} & (\delta+\delta^2+2\delta^3)c_{11}\end{pmatrix}$$

b. 当 $\delta=1$ 时,为

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & -\varepsilon c_{21} & 0 & 0 & 0 & 0\\ c_{21} & c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0\\ c_{31} & c_{32} & 2c_{11} & 0 & 0 & 0\\ c_{41} & c_{42} & c_{32} & 3c_{11} & -\varepsilon c_{21} & 0\\ c_{51} & c_{52} & -c_{31} & c_{21} & 3c_{11} & 0\\ c_{61} & c_{62} & c_{42}-c_{51}\varepsilon & c_{32} & -c_{31}\varepsilon & 4c_{11}\end{pmatrix}$$

c. 当 $\delta=-1$ 时,为

$$\boldsymbol{D}_{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & \varepsilon c_{21} & 0 & 0 & 0 & 0\\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & 0 & 0\\ c_{31} & c_{32} & -c_{11}-c_{22} & 0 & 0 & 0\\ c_{41} & c_{42} & -c_{32} & c_{22} & -\varepsilon c_{21} & 0\\ c_{51} & c_{52} & c_{31} & -c_{21} & c_{11} & 0\\ c_{61} & c_{62} & c_{51}\varepsilon-c_{42} & c_{32} & -c_{31} & -c_{11}-c_{22}\end{pmatrix}$$

证明 任取 $\boldsymbol{D}\in\mathrm{Der}_\delta(\boldsymbol{L}_{6,21}(\varepsilon))$,令 $\boldsymbol{D}(x_i)=\sum\limits_{j=1}^{6}c_{ji}x_j$,$i=1,2,\cdots,6$,$c_{ji}\in\mathbb{C}$,由 $\boldsymbol{D}([x_1,x_2])=\delta[\boldsymbol{D}(x_1),x_2]+\delta[x_1,\boldsymbol{D}(x_2)]=\boldsymbol{D}(x_3)$,可以得到

$$c_{13}=c_{23}=0,c_{33}=\delta(c_{11}+c_{22})$$
$$c_{43}=\delta c_{32},c_{53}=-\delta c_{31}$$
$$c_{63}=\delta(c_{42}-c_{51}\varepsilon)$$

将 $\boldsymbol{D}$ 分别作用于 $[x_1,x_3]=x_4$,$[x_2,x_3]=x_5$,$[x_1,x_4]=x_6$ 的两边,得到

$$c_{14}=c_{24}=c_{34}=c_{15}=c_{25}=c_{35}=c_{16}=c_{26}=c_{36}=c_{46}=c_{56}=0$$
$$c_{44}=(\delta+\delta^2)c_{11}+\delta^2c_{22},c_{54}=\delta c_{21}$$
$$c_{64}=\delta^2c_{32},c_{45}=\delta c_{12},c_{55}=(\delta+\delta^2)c_{22}+\delta^2c_{11}$$
$$c_{65}=-\delta^2\varepsilon c_{31},c_{66}=(\delta+\delta^2+\delta^3)c_{11}+\delta^3c_{22}$$

而将 $\boldsymbol{D}$ 作用于 $[x_2,x_5]=\varepsilon x_6$ 的两边,得到

$$c_{66}=(\delta+\delta^2+\delta^3)c_{22}+\delta^3c_{11}$$

从而可以得到 $\delta(1+\delta)(c_{11}-c_{22})=0$,即有 $\delta=-1$,或 $c_{11}=c_{22}$.

将 $\boldsymbol{D}$ 分别作用于 $[x_1,x_5]=0$,$[x_2,x_4]=0$ 的两边,得到

$$\varepsilon c_{21}+\delta c_{12}=0,\delta\varepsilon c_{21}+c_{12}=0$$

这样若 $\delta\neq\pm1$,有 $c_{21}=c_{12}=0$;若 $\delta=1$,有 $c_{12}=-\varepsilon c_{21}$;若 $\delta=-1$,有 $c_{12}=\varepsilon c_{21}$.

下面分情况讨论[15].

a. 当 $\delta\neq1$ 且 $\delta\neq-1$ 时,$c_{11}=c_{22}$,$c_{21}=c_{12}=0$,于是得到 D_δ;

b. 当 $\delta=1$ 时,$c_{11}=c_{22}$,$c_{12}=-\varepsilon c_{21}$,得到 D_1;

c. 当 $\delta=-1$ 时,$c_{12}=\varepsilon c_{21}$,得到 D_{-1}.

对伴随算子 $\mathrm{ad}x_i\in\mathrm{Der}(\boldsymbol{L}_{6,21}(\varepsilon))$,记其在基 $\{x_1,x_2,\cdots,x_6\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{F}_i$,$i=1,2,\cdots,6$.

经计算

$$\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{E}_{32}+\boldsymbol{E}_{43}+\boldsymbol{E}_{64}$$
$$\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{E}_{31}+\boldsymbol{E}_{53}+\varepsilon\boldsymbol{E}_{65}$$
$$\boldsymbol{F}_3=-\boldsymbol{E}_{41}-\boldsymbol{E}_{52},\boldsymbol{F}_4=-\boldsymbol{E}_{61}$$
$$\boldsymbol{F}_5=-\varepsilon\boldsymbol{E}_{62},\boldsymbol{F}_6=0$$

记 $h_i:\boldsymbol{L}\to\boldsymbol{L}$,$i=1,2,\cdots,5$ 表示这样的线性变换,其在基 $\{x_1,x_2,\cdots,x_6\}$ 下的矩阵分别为

$$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}+2\boldsymbol{E}_{33}+3\boldsymbol{E}_{44}+3\boldsymbol{E}_{55}+4\boldsymbol{E}_{66}$$
$$\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{E}_{21}-\varepsilon\boldsymbol{E}_{12}-\varepsilon\boldsymbol{E}_{45}+\boldsymbol{E}_{54}$$
$$\boldsymbol{H}_3=\boldsymbol{E}_{42}+\boldsymbol{E}_{63},\boldsymbol{H}_4=\boldsymbol{E}_{51}-\varepsilon\boldsymbol{E}_{63},\boldsymbol{H}_5=\boldsymbol{E}_{52}$$

由定义 5 知，$h_i \in \mathrm{Der}(\boldsymbol{L}_{6,21}(\varepsilon))$，$i=1,2,\cdots,5$.

定理 4　李代数 $\boldsymbol{L}_{6,21}(\varepsilon)$ 的导子代数

$$\mathrm{Der}(\boldsymbol{L}_{6,21}(\varepsilon)) = \bigoplus_{j=1}^{5} \mathbb{C} h_j \oplus \bigoplus_{i=1}^{5} \mathbb{C}\,\mathrm{ad}x_i$$

证明　由定理 3 知

$$\boldsymbol{D}_1 - c_{32}\boldsymbol{F}_1 + c_{31}\boldsymbol{F}_2 + c_{41}\boldsymbol{F}_3 + c_{61}\boldsymbol{F}_4 + \frac{1}{\varepsilon}c_{62}\boldsymbol{F}_5 =$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & -\varepsilon c_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{42} & 0 & 3c_{11} & -\varepsilon c_{21} & 0 \\ c_{51} & c_{52}-c_{41} & 0 & c_{21} & 3c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & c_{42}-c_{51}\varepsilon & 0 & 0 & 4c_{11} \end{pmatrix} =$$

$$c_{11}\boldsymbol{H}_1 + c_{21}\boldsymbol{H}_2 + c_{42}\boldsymbol{H}_3 + c_{51}\boldsymbol{H}_4 + (c_{52}-c_{41})\boldsymbol{H}_5$$

从而

$$\boldsymbol{D}_1 = c_{11}\boldsymbol{H}_1 + c_{21}\boldsymbol{H}_2 + c_{42}\boldsymbol{H}_3 + c_{51}\boldsymbol{H}_4 + (c_{52}-c_{41})\boldsymbol{H}_5 + c_{32}\boldsymbol{F}_1 - c_{31}\boldsymbol{F}_2 - c_{41}\boldsymbol{F}_3 - c_{61}\boldsymbol{F}_4 - \frac{1}{\varepsilon}c_{62}\boldsymbol{F}_5$$

由 c_{ij} 的任意性，定理得证.

推论 2　李代数 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_{6,21}(\varepsilon)$ 的外导子代数的维数 $\dim(\mathrm{Der}(\boldsymbol{L})/\mathrm{Ad}(\boldsymbol{L}))=5$.

参考文献：

[1] Schneider C. A computer-based approach to the classification of nilpotent Lie algebras [J]. Experimental Mathematics, 2005, 14(2): 153 - 160.

[2] de Graaf W A. Classification of six-dimension of nilpotent Lie algebras over fields of characteristic not 2[J]. Journal of Algebra, 2007, 309(2): 640 - 653.

[3] 杨恒云，叶鑫. 两类 6 维幂零李代数的上同调群[J]. 上海海事大学学报，2012，33(1)：91 - 94.

[4] Humphreys J E. Introduction to Lie algebras and representation theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1972.

[5] 苏育才，卢才辉，崔一敏. 有限维半单李代数简明教程[M]. 北京：科学出版社，2008.

[6] 孟道骥. 复半单李代数引论[M]. 北京：北京大学出版社，1998：110 - 115.

[7] Coelho S P. The automorphism group of a structural matrix algebra [J]. Linear Algebra and Its Applications, 1993, 195: 35 - 58.

[8] 胡建华，刘国华. 有限域上型 A1 的 Chevalley 群之间的同态[J]. 上海理工大学学报，2009，31，(4)：307 - 310.

[9] Varadarajan V S. Lie Groups, Lie algebra and their representations[M]. Beijing: Collaege Press, 1998: 49 - 67.

[10] Allison B, Benkart G, Gao Y. Central extensions of Lie algebras graded by finite root system [J]. Mathematische Annalen, 2000, 316(3): 499 - 527.

[11] Cicalò S, de Graaf W A, Schneider C. Six-dimensional nilpotent Lie algebras[J]. Linear Algebra and its Applications, 2012, 436(1): 163 - 189.

[12] 许成苏，胡建华. 四阶双曲型 Kac-Moody 代数的极小虚根[J]. 上海理工大学学报，2013，35(6)：531 - 535.

[13] Zusmanovich P. On δ-derivation of Lie algebras and superalgebras[J]. Journal of Algebra, 2010, 324: 3470 - 3486.

[14] Leger G F, Luks E. On derivations and holomorphs of nilpotent Lie algebras [J]. Nagoya Mathematical Journal, 1971, 44: 39 - 50.

[15] Skjelbred T, Sund T. Sur la classification des algèbres de Lie nilpotentes[J]. Academy des Science Paris Series, 1978, 286 (5): 1 - 2.

（编辑：董　伟）