

基于多元气温概率模型的气温期权定价方法研究

金哲植¹, 魏连鑫², 崔基哲³

(1. 延边大学 理学院, 延吉 133002; 2. 上海理工大学 理学院, 上海 200093;
3. 延边大学 经济管理学院, 延吉 133002)

摘要: 针对日常天气风险管理中的气温期权定价问题, Cao-Wei 模型不能充分反映气候变暖趋势和各地域之间的相关关系. 为解决这一问题, 提出了反映气候变暖趋势以及各地域间关联的新的多元气温概率模型, 并基于该模型, 利用燃烧分析法及蒙特卡洛模拟法对制冷日/制热日 (CDD/HDD) 指数期权进行了精确的定价. 结果表明, 采用蒙特卡洛模拟法对 CDD/HDD 指数期权定价更为合理, 分析得出的结论对天气衍生品市场提供了有效的理论依据, 对期权定价有较高实用价值, 为今后利用 CDD/HDD 指数期权对气象保险进行合理的风险对冲, 起到很好的风险管理效果.

关键词: 多元气温概率模型; 燃烧分析法; 蒙特卡洛模拟法; CDD/HDD
中图分类号: F 830 **文献标志码:** A

Pricing Method for Weather Options Based on
Multivariate Temperature Model

JIN Zhezhi¹, WEI Lianxin², CUI Jizhe³

(1. College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China; 2. College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China; 3. College of Economic and Management, Yanbian University, Yanji 133002, China)

Abstract: Regarding the pricing problem of temperature option in everyday weather risks management, the Cao-Wei model is insufficient to reflect the global warming trend and correlation among geographical regions. In order to resolve this problem, a new multivariate temperature model was proposed. Based on the model, the cooling design day/heating design day (CDD/HDD) index options were priced accurately by using the burn-analysis method and Monte-Carlo simulations. The simulation results indicate that using Monte-Carlo simulations to price CDD/HDD index options is not only effective but also reasonable. In addition, the result provides for the weather derivatives market an effective theoretical evidence and also has practical value for option pricing. The necessary theoretical basis for the future development of domestic insurance and weather derivatives was supplied, and the future use of the CDD index option can be more reasonable to hedge weather insurance and will play an effective role in risk management.

Key words: multivariate temperature model; burn-analysis method; Monte-Karlo simulation; CDD/HDD

近年来,涂春丽等^[1-3]在天气风险管理以及衍生品定价方面开展了研究. Cao等^[4-5]为了表示气温变化的不确定性,提出了Cao-Wei气温概率模型,但该模型不能很好地反映气候变暖趋势和各地域之间的相关关系. 为此,金哲植^[6]在2012年提出了能够较好地反映气候变暖趋势和各地域间相关关系的多元气温概率模型,但针对天气衍生品相关的诸多问题没有进行进一步的探讨.

为了多元气候概率模型的有效推广及金融衍生品定价方面的具体应用,本文对天气衍生品进行了进一步的模型分析. 在改善原有模型的基础上,利用燃烧分析法^[7]以及蒙特卡洛模拟法^[8],对制冷日/制热日(CDD/HDD)指数期权进行精确的定价.

1 多元气温概率模型

Cao-Wei模型一次只能对一个地域进行模型化分析,需要对多个不同地域构造气温模型,该模型有它的局限性. 很多现实中碰到的气温期权问题需要对多个地域的数据进行分析,进而建立一个能准确地反映地域间关联的概率模型. Cao等^[4-5]提出的气温概率模型如下:

$$\epsilon_{yr,t} = Y_{yr,t} - \hat{Y}_{yr,t}, \forall yr = 1, 2, \dots, T, \\ t = 1, 2, \dots, 365 \quad (1)$$

$$\epsilon_{yr,t} = \sum_{i=1}^k \rho_i \epsilon_{yr,t-i} + \sigma_{yr,t} \times \xi_{yr,t}, \\ \xi_{yr,t} \sim \text{i.i.d. } N(0,1) \quad (2)$$

$$\sigma_{yr,t} = \alpha - \beta \left| \sin\left(\frac{\pi t}{365} + \phi\right) \right| \quad (3)$$

式中, $\epsilon_{yr,t}$ 为残差; $Y_{yr,t}$ 为特定日期的平均气温; $\hat{Y}_{yr,t}$ 为平均化的平均气温估计值; $\sigma_{yr,t}$ 为平均气温的标准差; α, β, ρ 为优化参数.

为此,笔者在2012年提出了一个多元时间序列模型^[6]. 此模型在单元模型的基础上,添加每地域虚拟变量作为分析因素建立的模型,使用了表示不同地域的虚拟变量和交互变量,其中的虚拟变量可以同时反映地域和日值效果,体现出不同地域的气温效果.

单元模型与多元模型公式如下:

单元模型

$$Y'_{yr,t} = \beta'_0 + \beta_1 X'_{1,2} + \beta_2 X'_{1,3} + \dots + \\ \beta_{365} X'_{12,31} + \gamma T' + \xi'_{yr,t} \quad (4) \\ \xi'_{yr,t} = \xi'_s = \rho \xi'_{s-1} + a_s,$$

$$a_s \sim \text{i.i.d. } N(0,1) \quad (5)$$

多元模型

$$Y'_{r, yr, t} = \beta'_0 + \beta_1 X'_{1,2} + \beta_2 X'_{1,2} + \dots + \\ \beta_{365} X'_{12,31} + \delta_1 R'_1 + \dots + \delta_5 R'_5 + \\ \eta_1 R_1 X'_{1,2} + \dots + \eta_{365} R_1 X'_{12,31} + \\ \eta_{366} R_2 X'_{1,2} + \dots + \eta_{1825} R_5 X'_{12,31} + \\ \gamma_0 T' + \gamma_1 R_1 T' + \dots + \gamma_5 R_5 T' + \xi_{r, yr, t'}, \\ \xi_{r, yr, t'} \sim \text{i.i.d. } N(0,1) \quad (6)$$

$$R_r = \begin{cases} 1, & r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (7)$$

式中, Y', X', T' 分别为标准化后的平均气温、虚拟变量和总趋势; R 为地域; $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 分别代表地域北京、武汉、重庆、天津、上海、广州.

上述多元模型不能明确表示各地域之间的相关关系. 现利用多元时间序列模型, VAR1 (vector autoregressive 1 models) 对残差进行建模, 估计不同地域间的相关关系和自相关性, 建立一个能够表现出残差结构的模型

$$\mathbf{E}_s = \Phi \mathbf{E}_{s-1} + A_s, s = (yr - 1) \times 366 + t \quad (8)$$

$$\mathbf{E}_s = \begin{bmatrix} \xi'_{1, yr, t} \\ \vdots \\ \xi'_{6, yr, t} \end{bmatrix}^T_{6 \times 1}, \\ [\xi'_{1, yr, t}]^T = [\xi_{r, 1, 1} \xi_{r, 1, 2} \dots \xi_{r, 30, 366}] \quad (9)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \dots & \phi_{1,6} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{6,1} & \dots & \phi_{6,6} \end{bmatrix}_{6 \times 6},$$

$$A_s \sim \text{i.i.d. } MVN(0_{6 \times 1}, \sum_{6 \times 6}) \quad (10)$$

2 CDD/HDD 期权的定价

本文研究的期权主要是企业为了对冲气温风险所利用的场外期权. 这样的场外期权大部分是对夏季(5月—9月)和冬季(11月—3月)的气温而言, 是到期时间为6个月以上的长期期权. 期权价值不仅与到期时的温度有关, 又是受一定时间内温度变化影响的路径依赖型(path-dependent)期权. 在这里对未来由时刻 T_1 到时刻 T_2 的CDD/HDD指数期权进行定价.

首先, 对未来时刻 T_1 到时刻 T_2 的计算HDD和CDD指数公式为

$$\begin{cases} HDD(T_1, T_2) = \sum_{\tau=T_1}^{T_2} \max(18 - Y_\tau, 0) \\ CDD(T_1, T_2) = \sum_{\tau=T_1}^{T_2} \max(Y_\tau - 18, 0) \end{cases} \quad (11)$$

利用上述定义的 HDD 指数,计算期权价格的公式为

$$C_{\text{HDD}}(t, T_1, T_2, K) = e^{-r(T_2 - t)} E_t \{ \max(\text{HDD}(T_1, T_2) - K, 0) \}$$

(12)

$$P_{\text{HDD}}(t, T_1, T_2, K) = e^{-r(T_2 - t)} E_t \{ \max(K - \text{HDD}(T_1, T_2), 0) \}$$

(13)

式中, t 是时间; K 是期权的执行价; r 是无风险利率. 通过上式可以得到利率 r 下任一时刻 t 的期权价格, 在风险中性概率的情况下, 可以用无风险利率近似. 同样, 对于 CDD 的看涨期权和看跌期权, 价格计算公式

$$C_{\text{CDD}}(t, T_1, T_2, X) = e^{-r(T_2 - t)} E_t \{ \max(\text{CDD}(T_1, T_2) - K, 0) \}$$

(14)

$$P_{\text{CDD}}(t, T_1, T_2, X) = e^{-r(T_2 - t)} E_t \{ \max(K - \text{CDD}(T_1, T_2), 0) \}$$

(15)

根据期权定价的公式求出解析解是非常困难的. 相比对于解释影响期权价格的参数, 鉴于路径依赖型期权的特征, 决定通过模拟气温期权的价格作出评价. 本文采用了两种模拟方法: 一种是用燃烧分析法, 用过去的气温预测未来的气温, 这时假定气温按照过往历史作规律性变化; 另一种是采用蒙特卡洛模拟实验方法, 用已估计的参数和生成的随机数计算和预测所需时期内的期权价格.

3 CDD/HDD 指数期权定价方法

选取北京等 6 个城市 1980 年 1 月 1 日到 2009 年 12 月 31 日, 共 30 年日值平均气温数据进行实证分析, 考虑到中国气象的复杂性分为内陆和海岸, 从中各选取 3 个主要城市作了数据分析. 具体考虑到闰年的情况, 每年 2 月份的数据设为共 29 天. 每年数据个数为 366 个, 共 $30 \times 366 = 10\,980$ 个, 本文提出的多元气温概率模型中总的参数个数为 373 个, 利用以上数据进行具体的实证分析.

3.1 常用天气衍生品期权定价方法

a. 基于燃烧分析法的期权定价

Black-Scholes 定价模型广泛应用于金融衍生品的定价, 但该模型需要一系列假设条件基础, 加上天气衍生品并不符合该模型的前提假设条件, 天气衍生品中无法使用. 很多文献使用燃烧分析法来定价天气衍生品^[2,6-8], 它是基于历史数据进行模拟来解决天气衍生品定价的一种近似方法. 以基于温度的天气衍生品(CDD/HDD 指数期权)为例, 使用燃烧分析法进行定价时, 基本可按以下三个步骤进行: 首先, 收集和整理某一特定时间段的温度数据, 将剔除

时间趋势等因素影响后的温度数据转化为对应的温度指数; 其次, 通过对温度指数进行历史模拟, 计算此特定时期内的每期收益, 进而得出平均收益; 最后, 对平均收益进行贴现, 所得基于温度的天气衍生品的公平价格即为所得历史收益的平均值. 图 1 是基于燃烧分析法计算的 CDD 指数, 图 2 是基于该方法计算的 HDD 指数, 分别以北京地区为例, 30 年(1980 年—2009 年)的 CDD/HDD 指数历史年份数据(来源于中国气象科学数据共享服务网)画出时序图及其拟合曲线.

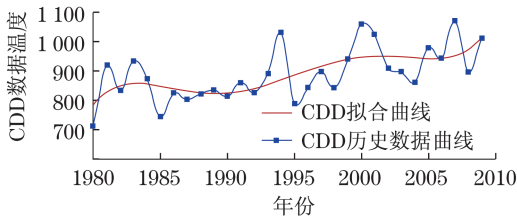


图 1 基于燃烧分析法计算的 CDD 指数
Fig.1 CDD index based on burn-analysis method

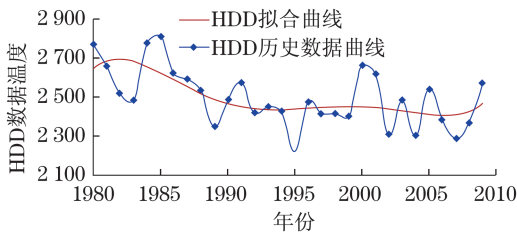


图 2 基于燃烧分析法计算的 HDD 指数
Fig.2 HDD index based on burn-analysis method

利用燃烧分析法对 CDD/HDD 指数期权定价计算结果如表 1 所示, 其中 CDD 指数期权执行价格设计为 930, HDD 指数期权执行价格设计为 2 500, 执行价 $\approx$ 平均 + 0.5 $\times$ 标准差^[9]. 可以看出, 由于选择数据资料期间的不同, 所计算出的 CDD/HDD 指数期权价格没有统一性. Lee^[9] 和 Dischel^[10] 在天气衍生品定价研究中采用燃烧分析法, 也得出数据选择周期对天气衍生品的价值影响很大. 权元太^[7] 也用燃烧分析法得出同样的结论. 国内的袁国军等^[11] 和郝静文等^[12] 也提出了不同的期权定价方法及统计分析方法. 本文是按 1980 年到 2009 年共 30 年气温数据, 用燃烧法进行模拟, 也得出同样的结论, 无法判断其衍生品价值.

采用燃烧法定价主要面临两个问题: 一是采用多少年历史数据, 这主要与时间窗选择有关, 对计算结果产生不可忽略的误差; 二是燃烧法是对历史数据进行分析, 所以不需要温度的预测, 不能针对历史温度资料赋予权重, 模型显得较为粗糙.

表 1 利用燃烧分析法对 CDD/HDD 指数期权定价
Tab.1 CDD/HDD index option pricing by
burn-analysis method

年限	CDD 指数		HDD 指数	
	看涨价格	看跌价格	看涨价格	看跌价格
5	57.6	6.6	22.2	93.1
10	51.2	15.5	38.6	87.5
20	31.2	41.2	22.9	84.0
30	21.0	60.7	57.5	61.9

b. 蒙特卡洛模拟实验期权定价

蒙特卡洛法是随机运动路径得到价值期望的数值方法. 针对金融分析时,它通过模拟标的资产价格来实现. 针对传统金融衍生品定价时,它是通过模拟标的资产价格来实现. 如果要用在天气衍生品定价上,需模拟出天气衍生品标的指数随机路径来实现. 本文模拟气温变化时,考虑气温的季节性变化、气温均值回复过程、地理位置气温变化等因素. 本方法要用气温的统计特征模拟出大量随机数和各种天气情况,灵活对不同地区的各种天气衍生品进行定价.

3.2 本文天气衍生品期权定价方法

在多元气温概率模型和 Cao-Wei 模型的基础上,使用蒙特卡洛模拟法计算了占据气温期权商品交易 95% 以上的 CDD/HDD 指数期权价格作比较.

基于多元气温概率模型的蒙特卡洛模拟法实施步骤如下:

步骤 1 利用多元气温概率模型和 Cao-Wei 模型生成 2010 年平均气温的预测值.

基于上面提到的 Cao-Wei 模型中的式(1)—(3)及多元气温概率模型中的式(6)—(10),利用 30 年(1980 年—2009 年)平均气温数据计算生成 2010 年的平均气温预测值. 在具体分析中为了减少误差,应尽可能多地生成平均气温预测值数据.

步骤 2 计算对应预测值的 CDD/HDD 指数.

基于式(3)以及步骤 1 所计算出的平均气温预测值的 CDD/HDD 指数^[9],其中 CDD 指数的计算是从 2010 年 5 月到 2010 年 9 月的平均气温数据, HDD 指数的计算是从 2010 年 11 月到 2011 年 3 月,各使用了共 5 个月的气温数据.

步骤 3 计算 CDD/HDD 指数的期望值,再利用贴现的方法,计算相应期权价格.

基于式(3)—(6),以 CDD/HDD 指数为标的资产的 CDD/HDD 指数期权的价格为期望值,再进行贴现的方法计算出相应期权价格,计算上述特定时期(5 个月)内 CDD/HDD 指数期权的每期收益,得

出平均收益;最后,对平均收益利用无风险利率进行贴现,计算出最终的 CDD/HDD 指数期权的价格.

该多元气温概率模型与 Cao-Wei 模型相比,描述气候变暖趋势更明显,充分反映了各地域间的相关性,并克服了燃烧分析法期权定价中存在的问题. 本文模拟气温的变化时,考虑气温的季节性变化、气温的均值回复过程、不同地理位置的气温变化等基本因素,并将这些基本因素反映到多元气温概率模型中,提高了计算精度,从而提升了蒙特卡洛模拟实验法在期权定价问题中的实用性.

多元气温概率模型与 Cao-Wei 模型的计算结果比较如表 2 所示,主要以平均、标准差为基础计算 CDD/HDD 指数. 表 3 和表 4 分别是根据多元气温概率模型计算出的 CDD 和 HDD 指数期权价格.

表 2 基于蒙特卡洛模拟法的 CDD/HDD 指数基础统计量

Tab.2 Basic statistics of CDD/HDD index based on Monte-Carlo simulation

地域	参数	CDD		HDD	
		多元模型	Cao-Wei 模型	多元模型	Cao-Wei 模型
北京	指数平均	998.51	998.30	2 399.67	2 414.77
	指数标准差	62.77	74.30	76.71	89.83

表 3 CDD 指数期权定价
Tab.3 CDD index option pricing

执行价格	CDD 看涨期权		CDD 看跌期权	
	多元模型	Cao-Wei 模型	多元模型	Cao-Wei 模型
880	97.50	94.68	2.50	5.34
960	73.30	69.36	26.70	30.64
1 040	25.42	28.82	74.58	71.18
1 120	2.48	5.12	97.52	94.88

表 4 HDD 指数期权定价
Tab.4 HDD index option pricing

执行价格	HDD 看涨期权		HDD 看跌期权	
	多元模型	Cao-Wei 模型	多元模型	Cao-Wei 模型
2 100	90.46	89.84	9.54	10.16
2 200	49.30	56.70	50.70	43.30
2 300	9.86	17.00	90.14	83.00
2 400	0.38	1.96	99.62	98.04

均方根误差统计量 RMSE 的计算方法为

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n - k} \sum_{yr} \sum_t (\epsilon_{yr,t})^2},$$

$n = \text{年度数} \times t, k = \text{自由度}$ (16)

式中, $n = \text{年度数} \times t$, 其中年度数为 30 年, t 为 366; k 为自由度, 由式(6)的 373 个参数组成. 均方

根误差越小,对数据模型的拟合度越高.表5是RMSE为基准的模型拟合度比较,图3是根据RMSE为基础的模型拟合度输出的比较结果.

表 5 模型拟合度比较
Tab.5 Comparison of the models' fitting

地域	Cao-Wei 模型	单元模型	多元模型
北京	3.40	2.79	2.65
内陆 武汉	3.63	3.13	2.96
重庆	3.72	3.12	3.06
天津	3.40	2.66	2.57
海岸 上海	3.08	2.69	2.38
广州	3.38	2.93	2.55

可以看出,本文提出的模型与Cao-Wei模型、单元模型相比较,现有模型更接近实际,得出的结果在精确定价气温期权以及开发相应天气衍生品方面将起到良好的效果.

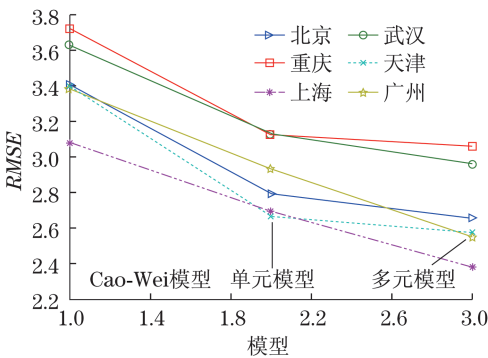


图 3 多元模型与其它模型的 RMSE 比较

Fig.3 RMSE comparison between the multivariate model and other models

4 结 论

提出了适用于日值气温变化、反应气候变暖趋势、不同地域相关关系的多元气温概率模型,并基于该模型利用燃烧分析及蒙特卡洛模拟法对CDD/HDD指数期权进行精确的定价.计算结果表明,该模型与Cao-Wei模型相比,平均值基本相同但偏差小,CDD/HDD指数期权的定价有效且合理.在气温期权定价方面,本文提出的天气风险管理中的多元化新模型,气候变化趋势比Cao-Wei模型更明显,解

决了Cao-Wei模型不能充分反映气候变化趋势的问题.此外,在分析方法上也有理论性突破:其一是解决了传统的燃烧分析法定价中的历史数据长度度量问题,减少了燃烧分析法产生的误差;其二是攻克了燃烧分析法不能对数据赋予权重的问题,这对地区间温度关联度分析具有更好的使用效果;其三是充分反映了各地域间的相关关系.该新模型反映了季节性变化、气温均值回复、不同地区气温变化等因素,提高了计算精度,提升了蒙特卡洛模拟法在期权定价问题中的实用性.

参考文献:

[1] 涂春丽,王芳.基于神经网络和蒙特卡洛方法的天气衍生品定价研究[J].中原工学院学报,2012,23(3):7-9.

[2] 王政.基于气温指数的天气期权定价研究[J].商业经济,2012(3):28-30.

[3] 胡正,董青马.天气风险管理及其最新研究进展[J].西南金融,2012(5):31-34.

[4] Cao M, Wei J. Pricing the weather[J]. Risk, 2000, 67-70.

[5] Cao M, Wei J. Weather derivatives valuation and market price of weather risk[J]. Journal of Futures Markets, 2004, 24(11): 1065-1089.

[6] 金哲植.基于多元气温概率模型的对气象保险的定价和风险评估[J].延边大学学报(自然科学版),2012,38(3):191-195.

[7] 权元太.气候变化的科学现状与前景[J].韩国气象学会学报,2005,41(1/2):217-337.

[8] 李昌洙.基于气温概率模型对气象保险定价的研究[J].保险开发研究,2008,19(2):55-76.

[9] Lee J H. A study on the valuation of the CDD/HDD weather options[J]. The Journal of Korean Securities Association, 2002, 31: 229-255.

[10] Dischel B. A model for weather risk[J]. Energy and Power Risk Management, 1999, 11(3): 20-21.

[11] 袁国军,肖庆宪.基于近似对冲的亚式期权定价模型与实证分析[J].上海理工大学学报,2014,36(5):416-424.

[12] 郝静文,陆秋君.安徽省碳排放量的实证研究[J].上海理工大学学报,2013,35(2):126-130.

(编辑:董伟)