

具奇异非线性项 p -Laplace 方程 Dirichlet 问题解的存在唯一性

陈雨彤, 魏公明

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 针对 p -Laplace 方程拟线性及非线性项在边界上的奇异特征, 运用弱比较原理、上下解方法得到了该方程解的存在唯一性, 证明了一类奇异拟线性方程边值问题的解的存在性和唯一性. 通过研究该问题的逼近问题的解的存在性, 得到了该问题的解存在且唯一, 并且逼近问题的解收敛于该类问题的解. 此外, 还研究了一类奇异拟线性椭圆方程 Dirichlet 问题解的存在性, 该类问题主要运用了上下解方法等得到了其解的存在性, 并且通过证明其逼近问题解的存在性, 得到了该类奇异拟线性椭圆方程 Dirichlet 问题解的存在性, 所得到的解是弱解.

关键词: p -Laplace 算子; Sobolev 空间; 弱解; 比较原理

中图分类号: O 175.25 **文献标志码:** A

Existence and Uniqueness of Solutions for the p -Laplace Equation Dirichlet Problem with Singular Nonlinear Term

CHEN Yutong, WEI Gongming

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The feature of the p -Laplace equation is that the nonlinear term is singular and the equation is quasilinear. The comparison principle and the method of upper and lower solutions were used to inspect the existence and uniqueness of solutions of this equation. The existence and uniqueness of the solutions of a class of quasilinear equations boundary value problems with singular term were proved. Through the study of the existence of solutions of an approximation problem, it is shown that the solution exists and is unique, and the solutions of the approximation problem converge to the solution of such a problem. The existence of solutions of the quasilinear equation Dirichlet problems with singular nonlinear term was also discussed. The method of upper and lower solutions was mainly used to inspect the existence of its solution, and through the proof of its approximation problems, the existence of solutions of Dirichlet linear elliptic equations was proved. The obtained solution is a weak solution.

Key words: p -Laplace operator; Sobolev space; weak solution; comparison principle

收稿日期: 2014-06-03

基金项目: 上海理工大学国家级项目培育课题(14XPM02)

第一作者: 陈雨彤(1990-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: ytchen122@163.com

通信作者: 魏公明(1974-), 男, 副教授. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: gmweixy@163.com

长期以来,非线性椭圆问题一直受到人们的广泛关注,其原因是许多数学物理问题,如源于非线性源的非线性扩散理论、量子场论、统计力学以及星系的重力平衡理论与非线性椭圆问题有极大的联系.而且数学内部的许多分支,如几何学中的 Yamabe 问题和等周不等式、调和分析中的 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式、Yang-Mills 泛函的非极小解的存在性与非线性椭圆问题有着深刻的联系.国内外关于非线性椭圆型方程可解性的研究较广泛,解决这类问题的方法主要有不动点定理、上下解方法、拓扑度理论、隐函数(组)定理、椭圆正则化方法、紧微法、变分法等.

具奇异非线性项椭圆型方程 Dirichlet 问题是偏微分方程领域的重要研究内容.许多学者对奇异非线性椭圆型方程 Dirichlet 问题解的存在性和唯一性作了深入的研究. Crandall 等^[1]研究了下列非线性边界值问题

$$\begin{cases} Lu = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} + \\ c(x)u = g(x, u), x \in \Omega \\ u = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

得到了方程解的存在性,得到式(1)的古典解 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 存在且唯一,且在 Ω 中 $u > 0$. Fulks 等^[2]得到了下列问题的解的存在性

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = g(x, t, u), x \in \Omega \\ u = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

假设 g 关于 u 非增,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $g(x, t, u) \rightarrow g(x, u)$, 得到式(2)的古典解 u 存在且唯一. Stuart^[3]处理了以下问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), x \in \Omega \\ u = \varphi, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

的解的存在性. Cocite 等^[4]得到了下列问题的解的存在性

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x, u) + h(x, \lambda u), x \in \Omega \\ u = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4)$$

然而,近年来非线性边界值问题已被广泛研究,对于 p -Laplace 算子的非线性边界值问题的研究已有许多结果,如文献[5—8]. 文献[9—10]具有相同的特点,即在 $u = 0$ 处非线性项是奇异的,边值问题的解在所定义的区域中是严格正的,即 $u > 0$.

本文研究下列形式的非线性椭圆边界值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x, u), x \in \Omega \\ u = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5)$$

式中, Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑开区域, $\partial\Omega$ 是 Ω 的边

界,且 $\partial\Omega$ 是 C^1 阶的, $p > 1$.

本文主要研究式(5)的解的存在性,给出下列假设:

(g1) 对于 $x \in \bar{\Omega}$ 一致成立;

(g2) 函数 $g(x, u): \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 连续、递减.

本文的主要结果为:

定理 1 假设条件(g1)和(g2)成立,则式(5)存在唯一解 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 且在 Ω 中 $u > 0$.

1 重要命题和引理

在本节,将给出一些为了证明定理 1 而需要的命题和引理.

定义 1 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ 是式(5)的弱解,若对任意的 $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ 有

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \eta dx = \int_{\Omega} g(x, u) \eta dx$$

Sobolev 嵌入定理^[11] 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界光滑开区域, $n < p < +\infty$, $W^{k+1,p}(\Omega) \rightarrow C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, 其中 $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$.

定义 2^[12] 函数 $\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ 是式(5)的一个上解,如果

$$\begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}|^{p-2} \nabla \bar{u} \nabla \varphi dx \geq \int_{\Omega} g(x, \bar{u}) \varphi dx, \\ \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \varphi \geq 0 \\ \bar{u} \geq 0, x \in \partial\Omega \end{cases}$$

成立.

定义 3^[12] 函数 $\underline{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ 是式(5)的一个下解,如果

$$\begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \nabla \varphi dx \leq \int_{\Omega} g(x, \underline{u}) \varphi dx, \\ \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \varphi \geq 0 \\ \underline{u} \leq 0, x \in \partial\Omega \end{cases}$$

成立.

最大值原理^[13] 若 $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ 满足在 Ω 中 $-\Delta_p u \geq 0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u = 0$, 则在 Ω 中 $u \geq 0$.

强最大值原理^[13] 若在 Ω 中 $-\Delta_p u \geq 0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u = 0$, 且在 Ω 中 $u \neq 0$, 则对任意的 $x \in \Omega$, $u(x) > 0$ 且 $\frac{\partial u}{\partial \gamma}|_{\partial\Omega} < 0$.

弱比较原理^[13] 如果对于任何 $u_1, u_2 \in W^{1,p}(\Omega)$, 由 $-\Delta_p u_1 \leq -\Delta_p u_2$ ($x \in \Omega$), $u_1 \leq$

$u_2(x \in \partial\Omega)$ 可以推出 $u_1 \leq u_2(x \in \Omega)$.

为了得到式(5)的解,研究下列问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\varepsilon = g(x, \varepsilon + u_\varepsilon), & x \in \Omega \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\varepsilon > 0$, 则在下面的证明中将会得到当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时, u_ε 收敛于式(5)的解 u .

引理 1 假设条件 (g_1) 和 (g_2) 成立, 当 $x \in \Omega$ 时, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 当 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ 时, $g(x, \varepsilon) > 0$, 则

a. 式(6)存在唯一正解 u_ε ;

b. 当 $0 < \varepsilon \leq \delta < \varepsilon_0$ 时, $u_\varepsilon \geq u_\delta$, 且 $\varepsilon + u_\varepsilon \leq \delta + u_\delta$, 其中 u_ε, u_δ 是式(6)的任意两个解.

证明 因为当 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ 时, $g(x, \varepsilon) > 0$, 而对 $\forall \eta \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 且 $\eta \geq 0$, 有 $\int_\Omega 0 \nabla \eta dx \leq \int_\Omega g(x, \varepsilon) \cdot \eta dx = \int_\Omega g(x, 0 + \varepsilon) \eta dx$, 可知 0 是式(6)的下解.

下面定义 $\omega_\varepsilon \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta_p \omega_\varepsilon = g(x, \varepsilon), & x \in \Omega \\ \omega_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (7)$$

假设式(7)存在两个解 ω_1, ω_2 , 当 $x \in A \subset \Omega$ 时, $\omega_1(x) < \omega_2(x)$, 则 $g(x, \omega_1) \geq g(x, \omega_2)$; 当 $x \in \partial A$ 时, $\omega_1 = \omega_2 = 0$, 由弱比较原理可知, 当 $x \in A$ 时, $\omega_1 \geq \omega_2$, 故 A 为空集. 同理可证 $\omega_1 \leq \omega_2$, 故 $\omega_1 = \omega_2$, 因此 ω_ε 是式(7)的唯一解. 再由强最大值原理可知, 当 $x \in \Omega$ 时, $\omega_\varepsilon(x) > 0$.

而对于 $\forall \eta \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 且 $\eta \geq 0$ 有

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla \omega_\varepsilon|^{p-2} \nabla \omega_\varepsilon \nabla \eta dx &= \int_{\partial\Omega} |\nabla \omega_\varepsilon|^{p-2} \nabla \omega_\varepsilon \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \nu} dx - \int_\Omega |\nabla \omega_\varepsilon|^p \eta dx = \int_\Omega -\Delta_p \omega_\varepsilon \eta dx = \\ &= \int_\Omega g(x, \varepsilon) \eta dx \geq \int_\Omega g(x, \varepsilon + \omega_\varepsilon) \eta dx \end{aligned}$$

可知 ω_ε 是式(6)的上解.

假设当 $x \in A \subset \Omega$ 时, $u_\varepsilon > \omega_\varepsilon$, 则 $g(x, \varepsilon + u_\varepsilon) \leq g(x, u_\varepsilon) \leq g(x, \omega_\varepsilon)$, 即 $-\Delta_p u_\varepsilon \leq -\Delta_p \omega_\varepsilon$; 当 $x \in \partial A$ 时, $u_\varepsilon = \omega_\varepsilon = 0$, 由弱比较原理可知, 当 $x \in A$ 时, $u_\varepsilon \leq \omega_\varepsilon$, 故 A 为空集. 明显地, 0 不是式(6)的解, 故 Ω 中 $0 < u_\varepsilon \leq \omega_\varepsilon$. 因此式(6)的解存在.

接下来证明不等式当 $0 < \varepsilon \leq \delta < \varepsilon_0$ 时,

$$u_\varepsilon \geq u_\delta, \varepsilon + u_\varepsilon \leq \delta + u_\delta \quad (8)$$

式中, u_ε, u_δ 是任意两个解, 令 $\tilde{u} = u_\varepsilon - u_\delta$ 或 $\tilde{u} = (\delta + u_\delta) - (\varepsilon + u_\varepsilon)$. 要证式(8)成立, 即证 $\tilde{u} \geq 0$.

当 $\tilde{u} = u_\varepsilon - u_\delta$ 时, 假设在集合 $A \subset \Omega$ 上 $\tilde{u} < 0$, 则 $g(x, \varepsilon + u_\varepsilon) \geq g(x, \varepsilon + u_\delta)$, 即当 $x \in A$ 时,

$-\Delta_p u_\varepsilon \geq -\Delta_p u_\delta$; 当 $x \in \partial A$ 时, $u_\varepsilon = u_\delta = 0$, 由弱比较原理可知, 当 $x \in A$ 时, $u_\varepsilon \geq u_\delta$, 故 $A = \emptyset$, 因此当 $x \in \Omega$ 时, $u_\varepsilon \geq u_\delta$. 同理可证得当 $\tilde{u} = (\delta + u_\delta) - (\varepsilon + u_\varepsilon)$ 时, $\tilde{u} \geq 0$, 因此式(8)成立.

由式(8)可知

$$0 \leq u_\varepsilon - u_\delta \leq \delta - \varepsilon \quad (9)$$

式中, 当 $\varepsilon \rightarrow 0^+, \delta \rightarrow 0^+$ 时, 可知 $u_\varepsilon = u_\delta$, 故证得解的唯一性.

假设 j 是一个非负整数, p 是大于 1 的实数, 对于函数 $u(x) \in C^j(\bar{\Omega})$, 定义范数

$$\|u\|_{j, L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq j} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}$$

式中, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

令 $h = (h_1, \dots, h_n)$ 是一个非零向量,

$$\delta_h u = \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|}.$$

引理 2 令 $u \in W^{1,p}(\Omega)$, 假设存在常数 C , 使得对任意子区域 $\Omega_1, \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$, 有

$$\|\delta_h u\|_{1, L_p(\Omega_1)} \leq C$$

h 是任意足够小的向量, 则 $u \in W^{2,p}(\Omega)$, 且

$$\|D_i u\|_{1, L_p(\Omega)} \leq C, i = 1, \dots, n$$

该引理的证明见参考文献[14]中的引理 3.3.

2 定理 1 的证明

在本节中, 运用最大值原理、弱比较原理、引理 1 和引理 2 来完成定理 1 的证明.

证明 由式(8)和式(9)可知, 对于 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u_\varepsilon = u$ 在 $C^{1,\alpha}(\Omega)$ 中存在, 且在 Ω 中 $u \geq u_\varepsilon > 0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u = 0$. 因此可以得到 $u \in C^1(\Omega)$, $g(x, \varepsilon + u_\varepsilon)$ 在 Ω 的紧子集上一致收敛于 $g(x, u)$.

由引理 2, 假设 σ_1 是 Ω 中的任意开区域, 使得 $\bar{\sigma}_1 \subset \Omega, p > 1$, 则存在 C , 使得

$$\|D_i u_\varepsilon\|_{1, L_p(\Omega)} \leq C \quad (10)$$

且 $u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$.

选择 $\alpha \in (0, 1)$, $p > n/(1-\alpha)$, 由 Sobolev 嵌入定理得 $\{u_\varepsilon\}$ 在 $C^{1,\alpha}(\Omega)$ 中是紧的, 且在 $C^1(\Omega)$ 中 $g(x, \varepsilon + u_\varepsilon) \rightarrow g(x, u)$, 由不等式(10)可知 u_ε 在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中有界, 故在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中 u_ε 弱收敛于 u , 且当 $x \in \partial\Omega$ 时, $u(x) = 0$. 因此可得 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 在 Ω 中 $-\Delta_p u = g(x, u)$, 故得到了 u 是式(5)的解.

下面证明解的唯一性,假设 u, v 是两个解,当 $x \in A \subset \Omega$ 时, $u(x) < v(x)$, 则 $g(x, u) \geq g(x, v)$, 即当 $x \in A$ 时, $-\Delta_p u \geq -\Delta_p v$; 当 $x \in \partial A$ 时, $u = v = 0$, 由弱最大值原理得到当 $x \in A$ 时, $u(x) \geq v(x)$, $A = \emptyset$. 由对称性可证得 $v(x) \geq u(x)$, 则 $u = v$. 定理 1 证毕.

3 更一般的非线性边界值问题

将式(5) 拓展,研究更一般的非线性边界值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x, u) + h(x, \lambda u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (11)$$

其中 $\lambda \geq 0$, Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑开区域, $h \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+)$.

假设(g1)和(g2)成立,且

(g3) 存在 $\hat{\varepsilon} > 0$, 当 $0 < \varepsilon < \hat{\varepsilon}$ 时, $g(x, \varepsilon) > 0$;

(g4) 存在常数 $A \in \mathbb{R}$, 使得当 $x \in \bar{\Omega}$, $s \geq 1$ 时, $g(x, s) \leq A$, $h(x, s)$ 关于 s 单调递增.

假设 $\partial\Omega$ 是 C^1 阶的, 令

$$\|u\|_\infty = \max\{|u(x)| \mid x \in \bar{\Omega}; u \in C(\bar{\Omega})\}$$

令 μ 是

$$\begin{cases} -\Delta_p u = 1, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (12)$$

的解, μ 是弱解, $\mu \in W_0^{1,p}(\Omega)$. 由强最大值原理知, 在 Ω 中 $\mu > 0$.

定理 2 若假设(g1)–(g4)均成立, 存在 $\lambda(g, h) \in (0, +\infty)$, 使得对任意的 $\lambda \in [0, \lambda(g, h))$, 式(11)至少有一个解 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 且 u 是弱解. 特别地, 若 $\lim_{s \rightarrow +\infty} s^{-1}h(x, s) \leq 0$ 对 $x \in \bar{\Omega}$ 一致成立, 则对 $\forall \lambda \geq 0$, 式(11)至少有一个解 u .

由假设(g4)和参考文献[3]的引理 5, 存在 $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+)$ 单调递减, 使得 $g(x, s) \leq \varphi(s)$, $(x, s) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+$. (g1)表明, 存在 $\hat{\varepsilon} > 0$ 使得当 $0 < \varepsilon < \hat{\varepsilon}$ 时, $\varphi(\varepsilon) > 0$.

文献[3]的引理 6 表明存在 $\psi \in C^1(\mathbb{R}_+)$ 递增, 使得 $h(x, s) \vee 0 \leq \psi(s)$, $(x, s) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+$.

下面令 $\lambda(g, h) = \sup_{\alpha > 0} \frac{\alpha}{(|\varphi(\varepsilon)|_\infty + \psi(\alpha)) \|\mu\|_\infty}$.

引理 3 对所有的 $\lambda \in [0, \lambda(g, h))$, 存在 $\hat{\varepsilon} > 0$, 当 $\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon})$ 时, 问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\varepsilon = g(x, \varepsilon + u_\varepsilon) + h(x, \lambda u_\varepsilon), & x \in \Omega \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (13)$$

有一个上解 $\bar{u}_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 且在 Ω 中 $\bar{u}_\varepsilon > 0$. 特别地, 若 $\lim_{s \rightarrow +\infty} s^{-1}h(x, s) \leq 0$ 对 $x \in \bar{\Omega}$ 一致成立, 则对 $\forall \lambda \geq 0$, 式(13)有一个上解 $\bar{u}_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 且在 Ω 中 $\bar{u}_\varepsilon > 0$.

证明 当 $\lambda = 0$ 时, 令 $\bar{u}_\varepsilon = (\varphi(\varepsilon) + \psi(0))\mu$, 则对任意的 $\eta \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 且 $\eta \geq 0$ 有

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla \bar{u}_\varepsilon|^{p-2} \nabla \bar{u}_\varepsilon \nabla \eta dx &= \int_\Omega -\Delta_p((\varphi(\varepsilon) + \psi(0))\mu) \eta dx = \int_\Omega (\varphi(\varepsilon) + \psi(0)) \eta dx \geq \\ \int_\Omega (g(x, \varepsilon) + h(x, 0)) \eta dx &\geq \int_\Omega (g(x, \varepsilon + (\varphi(\varepsilon) + \psi(0))\mu) + h(x, 0)) \eta dx \geq \\ \int_\Omega (g(x, \varepsilon + \bar{u}_\varepsilon) + h(x, 0)) \eta dx \end{aligned}$$

可知此时 $\bar{u}_\varepsilon$ 为式(13)的上解, 且在 Ω 中 $\bar{u}_\varepsilon > 0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $\bar{u}_\varepsilon = 0$.

当 $\lambda \in (0, \lambda(g, h))$, 由 $\lambda(g, h)$ 的定义, 存在 $\alpha > 0$, 使得 $\lambda < \frac{\alpha}{(|\varphi(\varepsilon)|_\infty + \psi(\alpha)) \|\mu\|_\infty}$.

令 $\bar{u}_\varepsilon = (\varphi(\varepsilon) + \psi(\alpha))\mu$, 则对任意的 $\eta \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 且 $\eta \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla \bar{u}_\varepsilon|^{p-2} \nabla \bar{u}_\varepsilon \nabla \eta dx &= \int_\Omega -\Delta_p((\varphi(\varepsilon) + \psi(\alpha))\mu) \eta dx = \int_\Omega (\varphi(\varepsilon) + \psi(\alpha)) \eta dx \geq \\ \int_\Omega (g(x, \varepsilon) + h(x, \alpha)) \eta dx &\geq \int_\Omega (g(x, \varepsilon + \bar{u}_\varepsilon) + h(x, \alpha)) \eta dx \end{aligned}$$

由于 $\alpha > \lambda((|\varphi(\varepsilon)|_\infty + \psi(\alpha)) \|\mu\|_\infty) > \lambda \bar{u}_\varepsilon$, 而 h 递增, 故

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla \bar{u}_\varepsilon|^{p-2} \nabla \bar{u}_\varepsilon \nabla \eta dx &\geq \int_\Omega (g(x, \varepsilon + \bar{u}_\varepsilon) + h(x, \lambda \bar{u}_\varepsilon)) \eta dx \end{aligned}$$

因此 $\bar{u}_\varepsilon$ 为式(13)的上解且在 Ω 中 $\bar{u}_\varepsilon > 0$, 在 $\partial\Omega$ 是 $\bar{u}_\varepsilon = 0$.

下面证明第二部分, 由于 $\lim_{s \rightarrow +\infty} s^{-1}h(x, s) \leq 0$, 则对给定的 $\lambda > 0$, 存在 $c > 0$ 使得

$$h(x, s) \leq c + \frac{s}{2\lambda \|\mu\|_\infty}, \quad x \in \bar{\Omega}, s \geq 0$$

此时令 $\bar{u}_\varepsilon = (\varphi(\varepsilon) + (c + \alpha))\mu$, $\alpha = \varphi(\varepsilon) + c$, 此

时 $\frac{\bar{u}_\varepsilon}{2|\mu|_\infty} \leq \alpha$, 则

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (g(x, \varepsilon + \bar{u}_\varepsilon) + h(x, \lambda \bar{u}_\varepsilon)) \eta dx \leq \\ & \int_{\Omega} (g(x, \varepsilon) + (c + \alpha)) \eta dx \leq \int_{\Omega} (\varphi(\varepsilon) + \\ & (c + \alpha)) \eta dx \leq \int_{\Omega} -\Delta_p((\varphi(\varepsilon) + (c + \\ & \alpha))\mu) \eta dx \leq \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}_\varepsilon|^{p-2} \nabla \bar{u}_\varepsilon \nabla \eta dx \end{aligned}$$

故可知 $\bar{u}_\varepsilon$ 为式(13)的上解且在 Ω 中 $\bar{u}_\varepsilon > 0$, 在 $\partial\Omega$ 是 $\bar{u}_\varepsilon = 0$.

引理 4 对 $\forall \lambda > 0$, 存在 $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\lambda) > 0$, $\beta = \beta(\lambda) > 0$, 使得 $\underline{u} = \beta\mu$ 是式(13)的下解, 在 Ω 中 $\underline{u} \leq \bar{u}_\varepsilon$ 几乎处处成立, 其中 $0 < \varepsilon < \varepsilon_\lambda$, $\varepsilon_\lambda = \bar{\varepsilon} \wedge \hat{\varepsilon}$.

证明 令 $a_\lambda = \min\{h(x, \lambda s) \mid x \in \bar{\Omega}, 0 \leq s \leq 1\}$, 由 (g_1) 知, 存在 $R = R(\lambda) \in (0, 1]$, 使得

$$1 \leq g(x, s) + a_\lambda, x \in \bar{\Omega}, 0 < s < R(\lambda)$$

令 $\underline{u} = \beta\mu$, $\beta = 1 \wedge (R/(2|\mu|_\infty))$, 则对 $\forall \eta \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 且 $\eta \geq 0$ 有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla \underline{u}|^{p-2} |\nabla \underline{u}| \nabla \eta dx = \int_{\partial\Omega} |\nabla \underline{u}|^{p-2} |\nabla \underline{u}| \cdot \\ & \frac{\partial \eta}{\partial \gamma} ds - \int_{\Omega} |\nabla \underline{u}|^p \eta dx = \int_{\Omega} -\Delta_p \underline{u} \eta dx = \\ & \int_{\Omega} -\Delta_p(\beta\mu) \eta dx = \int_{\Omega} \beta \eta dx \leq \int_{\Omega} \eta dx \leq \\ & \int_{\Omega} (g(x, \varepsilon + \underline{u}) + h(x, \lambda \underline{u})) \eta dx \end{aligned}$$

故 $\underline{u}$ 为式(13)的下解.

下面证明在 Ω 中 $\underline{u} \leq \bar{u}_\varepsilon$ 几乎处处成立.

对于 $0 < \varepsilon < \varepsilon_\lambda$, 令 $A_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \underline{u} > \bar{u}_\varepsilon\}$, 当 $x \in A_\varepsilon$ 时, 对 $\forall \eta \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 且 $\eta \geq 0$ 有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} -\Delta_p \bar{u}_\varepsilon \eta dx = \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}_\varepsilon|^{p-2} \nabla \bar{u}_\varepsilon \nabla \eta dx \geq \\ & \int_{\Omega} (g(x, \varepsilon + \bar{u}_\varepsilon) + h(x, \lambda \bar{u}_\varepsilon)) \eta dx \geq \int_{\Omega} \eta dx \geq \\ & \int_{\Omega} |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \nabla \eta dx = \int_{\Omega} -\Delta_p \underline{u} \eta dx \end{aligned}$$

即 $-\Delta_p \bar{u}_\varepsilon \geq -\Delta_p \underline{u}$, 当 $x \in \partial A_\varepsilon$ 时, $\bar{u}_\varepsilon = \underline{u} = 0$. 由弱比较原理可知, 当 $x \in A_\varepsilon$ 时, $\bar{u}_\varepsilon \geq \underline{u}$. 因此 A_ε 为空集, 引理 4 证毕.

引理 5 给予 $\lambda \in [0, \lambda(g, h))$, 对所有的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\lambda)$, $\bar{u}_\varepsilon, \underline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 分别是式(13)的上下解, 并且在 Ω 中 $\underline{u} \leq \bar{u}_\varepsilon$ 几乎处处成立, 那么式(13)在区间

$$\langle \underline{u}, \bar{u}_\varepsilon \rangle := \{u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega) \mid \underline{u}(x) \leq$$

$$u_\varepsilon(x) \leq \bar{u}_\varepsilon(x), x \in \Omega\}$$

内存在最大值 u^* 和最小值 u_* , 即式(13)的每一个属于 $\langle \underline{u}, \bar{u}_\varepsilon \rangle$ 的解 u_ε 都满足 $u_*(x) \leq u_\varepsilon(x) \leq u^*(x)$ 在 Ω 内几乎处处成立.

该引理的证明参考文献[12]的 294—295 页.

下面来证明定理 2.

证明 对于 $\lambda \in [0, \lambda(g, h))$, 令 $a_\lambda = \min\{h(x, \lambda s) \mid x \in \bar{\Omega}, 0 \leq s \leq 1\}$, $R \in (0, 1]$, 使得当 $x \in \bar{\Omega}, 0 < s < R$ 时, $1 \leq g(x, s) + a_\lambda$. 令 Ω_1 是 Ω 的开子集, 且 $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$, $p > 1$, 对 $\forall \eta > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| < \delta$ 时, $|u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}| \geq \eta$. 可取 $\eta = 100$, $u_{\varepsilon_1} = 100 + u_{\varepsilon_2}$, $\delta = 2$, $\varepsilon_1 = 1 + \varepsilon_2$, 则

$$-\Delta_p u_{\varepsilon_1} = -\Delta_p(100 + u_{\varepsilon_2}) = g(x, 1 + \varepsilon_2 + 100 + u_{\varepsilon_2}) + h(x, 100\lambda + 100u_{\varepsilon_2}) \quad (14)$$

$$-\Delta_p u_{\varepsilon_2} = g(x, \varepsilon_2 + u_{\varepsilon_2}) + h(x, \lambda u_{\varepsilon_2}) \quad (15)$$

可知 $-\Delta_p u_{\varepsilon_1} = -\Delta_p(100 + u_{\varepsilon_2}) = -\Delta_p u_{\varepsilon_2}$, 而式(14)与式(15)的右边不相等, 故矛盾. 因此, 对 $\forall \eta > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| < \delta$ 时, $|u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}| < \eta$, 由柯西收敛准则可知 $\{u_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < \varepsilon_\lambda}$ 收敛. 由于 $\{u_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < \varepsilon_\lambda}$ 收敛, 对任意的 $\eta > 0$, 当 $|h| < \delta$ 时, $|u_\varepsilon(x + h) - u_\varepsilon(x)| < \eta$, 由于 h 足够小, 而 $\|\delta_h u_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega_1)} = \left(\int_{\Omega_1} \left|D^\alpha \frac{u_\varepsilon(x+h) - u_\varepsilon(x)}{|h|}\right|^p dx\right)^{1/p} \leq C$, 由前面的引理 2 知 $u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$, 可选 $\alpha \in (0, 1)$, $p > n/(1-\alpha)$, 由 Sobolev 嵌入定理知 $\{u_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < \varepsilon_\lambda}$ 在 $C^{1,\alpha}(\Omega)$ 是紧的, 因此存在 $\{u_{\varepsilon_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$, 当 $\varepsilon_m \rightarrow 0$ 时, u_{ε_m} 在 $C^{1,\alpha}(\Omega)$ 中收敛, 令 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 是其极限. 同样的, 存在 $\{\bar{u}_{\varepsilon_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$, 当 $\varepsilon_m \rightarrow 0$ 时, $\bar{u}_{\varepsilon_m}$ 在 $C^{1,\alpha}(\Omega)$ 中收敛, 即存在 $\bar{u}$, 使得 $\lim_{\varepsilon_m \rightarrow 0} \bar{u}_{\varepsilon_m} = \bar{u}$. 因此可得 $\{u_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < \varepsilon_\lambda}$, $\{\bar{u}_{\varepsilon_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ 在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中分别收敛于 $u, \bar{u}$.

再由引理 5 知, 当 $x \in \Omega$ 时, $\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x)$, 且 $u|_{\partial\Omega} = 0$, 在 $C(\bar{\Omega})$ 中 $\lim_{\varepsilon_m \rightarrow 0} (g(x, \varepsilon + u_{\varepsilon_m}) + h(x, \lambda u_{\varepsilon_m})) = g(x, u) + h(x, \lambda u)$. 因此 $-\Delta_p u = g(x, u) + h(x, \lambda u)$, 得到 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 是式(11)的解.

参考文献:

- [1] Crandall M G, Rabinowitz P H, Tartar L. On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity [J].

- Communications in Partial Differential Equations, 1977, 2(2): 193 – 222.
- [2] Fulks W, Maybee J S. A singular nonlinear equations [J]. Osaka Journal Mathematics, 1960(12): 1 – 19.
- [3] Stuart C A. Existence and approximation of solutions of nonlinear elliptic problems [J]. Mathematische Zeitschrift, 1976, 147(1): 53 – 63.
- [4] Cocite M M, Palmieri G. On a singular nonlinear Dirichlet problem [J]. Communications in Partial Differential Equations, 1989, 14(10): 1315 – 1327.
- [5] Bonder F B, Rossi D R. Existence results for the p -Laplacian with nonlinear boundary conditions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 263(1): 195 – 223.
- [6] Chipot M, Shafrir I, Fila M. On the solutions to some elliptic equations with nonlinear boundary conditions [J]. Advance in Differential Equations, 1996, 1(1): 91 – 110.
- [7] Chipot M, Chlebík M, Fila M, et al. Existence of positive solutions of a semilinear elliptic equation in R^N with a nonlinear boundary condition [J]. Journal of Mathematical Analysis and Zeitschrift, 1998, 223(2): 429 – 471.
- [8] Terraccini S. Symmetry properties of positive solutions to some elliptic equations with nonlinear boundary conditions [J]. Differential & Integral Equations, 1995, 8(8): 1911 – 1922.
- [9] St. Cirstea F-C, Radulescu V D. Existence and non-existence results for a quasilinear problem with nonlinear boundary conditions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Zeitschrift, 2000, 244(1): 169 – 183.
- [10] Nowosad P. On the integral equation $Kf = 1/f$ arising in a problem in communications [J]. Journal of Mathematical Analysis and Zeitschrift, 1966, 14(3): 484 – 492.
- [11] 叶其孝, 李正元, 王明新, 等. 反应扩散方程引论第一版 [M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [12] 王明新. 非线性椭圆型方程 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [13] García-Melián J, de Lis J S. Maximum and comparison principles for operators involving the p -Laplacian [J]. Journal of Mathematical Analysis and Zeitschrift, 1998, 218(1): 49 – 65.
- [14] Agmon S. The L_p approach to the Dirichlet problem Part I: regularity theorems [J]. Annalidella Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, 1959 (13): 405 – 448.

(编辑: 董 伟)

(上接第 310 页)

- [6] Wu C J, Chen B, Dai X, et al. Schwinger boson mean field theory of the Heisenberg ferrimagnetic spin chain [J]. Physical Review B, 1999, 60(2): 1057 – 1060.
- [7] Li Y X, Chen B. Schwinger-boson mean-field theory of an anisotropic ferrimagnetic spin chain [J]. Physics Letter A, 2010, 374(34): 3514 – 3519.
- [8] Yamamoto S, Fukui T, Sakai T. Characterization of ferrimagnetic Heisenberg chains according to the constituent spins [J]. The European Physical Journal B, 2000, 15(2): 211 – 219.
- [9] Brehmer S, Mikeska H J, Yamamoto S. Low-temperature properties of quantum antiferromagnetic chains with alternating spins $s = 1$ and $s = 1/2$ [J]. Journal of Physical: Condensed Matter, 1997, 9(19): 3921 – 3924.
- [10] 谢桂兵, 耿滔, 王燕. 铁磁共振下磁各向异性材料的负折射特性研究 [J]. 上海理工大学学报, 2013, 35(5): 439 – 442.
- [11] Holstein T, Primakoff H. Field dependence of the intrinsic domain magnetization of a ferromagnet [J]. Physical Review, 1940, 58(12): 1098 – 1113.
- [12] 李正中. 固体理论 [M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2002.
- [13] Sakai T, Okamoto K. Quantum magnetization plateau of an anisotropic ferrimagnetic spin chain [J]. Physical Review B, 2002, 65(21): 4403 – 4406.

(编辑: 董 伟)