

非线性优化问题的光滑化序列二次规划方法

宇振盛, 张丽娜, 秦 毅

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 为了获得序列二次规划方法的全局收敛性,通常需要借助一个罚函数,但常用的罚函数由于具有不可微性从而给计算带来一定的困难,拉格朗日函数虽然可以克服此困难,但其形式较为复杂,为解决该问题,给出了一类光滑化罚函数.基于一类双曲余弦型光滑化罚函数,提出了等式约束优化问题的一个光滑化序列二次规划方法.该光滑化函数具有良好的连续、可微性和凸性质,在适当条件下,获得了算法的全局收敛性,并给出数值测试说明了算法的有效性.

关键词: 等式约束优化; 光滑化函数; 序列二次规划方法; 全局收敛性

中图分类号: O 221

文献标志码: A

Smoothing Sequence Quadratic Programming Method for Nonlinear Optimization

YU Zhensheng, ZHANG Lina, QIN Yi

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: To obtain the global convergence in the sequence quadratic programming (SQP) method, one often uses a penalty function. Due to its non-differentiability, the general penalty function will cause some numerical difficulty. The Lagrange function can overcome this difficulty, but it is complex in form. In the paper, a kind of smoothing penalty functions was developed and a sequence quadratic programming algorithm for equality constrained optimization problems was proposed. The smoothing function is based on the cosh function and it is continuous, differentiable and convex. The global convergence was achieved under certain conditions. The numerical tests were also given to show the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: equality constrained optimization; smoothing penalty function; sequence quadratic programming method; global convergence

收稿日期: 2014-05-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11171221); 上海市教委科研创新资助项目(14YZ094); 上理工大学国家级项目培育项目(12XGM03)

第一作者: 宇振盛(1973-), 男, 副教授. 研究方向: 最优化理论与方法. E-mail: zhenshengyu@usst.edu.cn

1 问题的提出

考虑非线性优化问题

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g(x) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $x \in R^n, f: R^n \rightarrow R, g: R^n \rightarrow R^m$ 是连续可微函数.

此类问题广泛应用于随机规划、最优控制以及半无限规划和原始分解算法中^[1-3], 在过去的几十年里, 人们已经提出了许多数值方法来解决这一问题. 其中, 序列二次规划法 (sequential quadratic programming, SQP) 是使用最广泛的方法之一, 这类算法具有良好的全局收敛性, 得到最优解时需要的迭代次数也较少. 该方法由 Wilson^[4] 最早针对凸优化问题提出, 并由 Biggs^[5], Han^[6] 和 Powell^[7-8] 等推广到一般问题, 有关综述报告可参见文献^[9].

由与问题(1)相关的 SQP 理论可知, 可以通过迭代公式

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k \quad (2)$$

来产生出收敛到问题(1)的 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 点的点列. 其中, λ_k 是由某些线搜索方法获得的, 用来降低评价函数的函数值的步长, d_k 是二次规划问题

$$\begin{aligned} \min_{d \in R^n} \quad & \nabla f(x_k)^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d \\ \text{s.t.} \quad & g(x_k) + \nabla g(x_k) d = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

的解. B_k 是目标函数的拉格朗日函数的近似 Hessian 矩阵, 通常由拟牛顿法获得.

在 SQP 理论中, 最常使用的评价函数是不可微精确罚函数

$$\Psi(x, \alpha) = f(x) + \alpha \sum_{i=1}^m |g_i(x)|$$

因为函数 $\Psi(x, \alpha)$ 的不可微性, 从而给计算带来一定的困难. 为克服此困难, 通常可用光滑的罚函数作为其评价函数^[10]. 本文使用逼近光滑罚函数^[10-11]

$$\begin{aligned} \Phi(x, \alpha, \mu) = f(x) + \alpha \sum_{i=1}^m \frac{1}{\mu} [\ln 2 + \\ \ln(1 + \cosh(\mu g_i(x)))] \end{aligned}$$

来作为 SQP 算法的评价函数. 其中, $\Phi(x, \alpha, \mu)$ 是逼近于 $\Psi(x, \alpha)$ 的, 并且是连续可微的. 文献^[11]中的数值试验显示, 该光滑罚函数的性态良好.

2 光滑化 SQP 算法

使用逼近光滑罚函数

$$\begin{aligned} \Phi(x, \alpha, \mu) = f(x) + \alpha \sum_{i=1}^m \frac{1}{\mu} [\ln 2 + \\ \ln(1 + \cosh(\mu g_i(x)))] \end{aligned} \quad (4)$$

作为 SQP 算法的评价函数. 首先给出函数 $\Phi(x, \alpha, \mu)$ 的性质.

引理 1 函数 $\Phi(x, \alpha, \mu)$ 的性质^[11]

a. 对任意固定的 μ , 若 $f(x), g_i(x)$ 是 k 阶连续可微的, $i = 1, 2, \dots, m$, 则 $\Phi(x, \alpha, \mu)$ 也是 k 阶连续可微的. 若 $f(x), g_i(x)$ 是两阶连续可微的, 则有

$$\begin{aligned} \nabla_x \Phi(x, \alpha, \mu) = \nabla_x f(x) + \\ \alpha \sum_{i=1}^m \frac{\sinh(\mu g_i(x))}{1 + \cosh(\mu g_i(x))} \nabla_x g_i(x) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \nabla_{xx}^2 \Phi(x, \alpha, \mu) = \nabla_{xx}^2 f(x) + \\ \alpha \mu \sum_{i=1}^m \frac{1}{1 + \cosh(\mu g_i(x))} \nabla_x g_i(x) \nabla_x g_i(x)^T + \\ \alpha \sum_{i=1}^m \frac{\sinh(\mu g_i(x))}{1 + \cosh(\mu g_i(x))} \nabla_{xx}^2 g_i(x) \end{aligned}$$

b. 若 $f(x), g_i(x)$ 是凸的, $i = 1, 2, \dots, m$, 则 $\Phi(x, \alpha, \mu)$ 也是凸的.

c. $\Phi(x, \alpha, \mu) > \Psi(x, \alpha), \forall x \in R^n$.

d. $\sup_{x \in R^n} (\Phi(x, \alpha, \mu) - \Psi(x, \alpha)) \leq \frac{m\alpha}{\mu} \ln 4$.

e. $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \Phi(x, \alpha, \mu) = \Psi(x, \alpha)$.

f. 若 $\mu_1 < \mu_2$, 则 $\Phi(x, \alpha, \mu_1) > \Phi(x, \alpha, \mu_2)$, $\forall x \in R^n$.

现在考虑 SQP 算法的迭代公式

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$$

其中, d_k 是下列二次子问题的解

$$\begin{aligned} \min_{d \in R^n} \quad & \frac{1}{2} d^T B_k d + \nabla f(x_k)^T d \\ \text{s.t.} \quad & \nabla g(x_k) d + g(x_k) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

式中, B_k 是 $n \times n$ 对称正定矩阵.

本文中总是假定子问题(5)是可行的. 在这种假设下, 如果 B_k 是正定矩阵, 那么, 子问题(5)有唯一解 d_k , 并且 d_k 是子问题(5)的解当且仅当存在拉格朗日乘数 p_k 使得 KKT 条件成立

$$\begin{cases} \mathbf{B}_k \mathbf{d}_k + \nabla f(x_k) + \nabla g(x_k)^T \boldsymbol{\rho}_k = 0 \\ \nabla g(x_k) \mathbf{d}_k + g(x_k) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

引理 2^[12] 假设 $\mathbf{B}_k$ 是对称正定矩阵,则点对 $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\rho}})$ 是问题(1)的 KTT 点对当且仅当 $(\bar{\mathbf{d}}, \bar{\boldsymbol{\rho}}) = (0, \bar{\boldsymbol{\rho}})$ 是子问题(5)的 KTT 点对.

下面叙述基于光滑化罚函数(4)的 SQP 算法.

算法 1

步骤 0 给定 $x_1 \in R^n, \rho_1 \in R^m, \beta \in (0, 1), \gamma \in (0, 1), \varepsilon \geq 0, \mathbf{B}_1 \in R^{n \times n}$ 为对称正定矩阵, $\mu_0 > 1, \alpha_0 > 1, M > 1$, 令 $k := 1$.

步骤 1 求解子问题(6), 得到 $\mathbf{d}_k$ 和 $\boldsymbol{\rho}_k^*$. 若 $|\mathbf{d}_k| \leq \varepsilon$, 则算法终止.

步骤 2 若 $\nabla \Phi(x_k, \alpha_{k-1}, \mu_{k-1})^T \mathbf{d}_k \leq -\frac{1}{2} \mathbf{d}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{d}_k$, 则令 $\alpha_k := \alpha_{k-1}, \mu_k := \mu_{k-1}$, 转步骤 7; 否则, 转步骤 3.

步骤 3 若

$$\sum_{i=1}^m \frac{\sinh(\mu_{k-1} g_i(x_k))}{1 + \cosh(\mu_{k-1} g_i(x_k))} g_i(x_k) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{i \in I^+} g_i(x_k) - \sum_{i \in I^-} g_i(x_k) \right)$$

其中

$$I^+ = \{i | g_i(x_k) > 0\}, I^- = \{i | g_i(x_k) < 0\}$$

则令 $\mu_k := \mu_{k-1}$, 转步骤 5; 否则, 转步骤 4.

步骤 4 令 $\mu_{k-1} := M\mu_{k-1}$, 转步骤 3.

步骤 5 若

$$\nabla \Phi(x_k, \alpha_{k-1}, \mu_k)^T \mathbf{d}_k \leq -\frac{1}{2} \mathbf{d}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{d}_k$$

则令 $\alpha_k := \alpha_{k-1}$, 转步骤 7; 否则, 转步骤 6.

步骤 6 令 $\alpha_{k-1} := M\alpha_{k-1}$, 转步骤 5.

步骤 7 令 λ_k 为序列 $\{1, \gamma, \gamma^2, \dots\}$ 中使下列不等式成立的最大值:

$$\Phi(x_k + \lambda_k \mathbf{d}_k, \alpha_k, \mu_k) \leq \Phi(x_k, \alpha_k, \mu_k) + \beta \lambda_k \nabla \Phi(x_k, \alpha_k, \mu_k)^T \mathbf{d}_k \quad (7)$$

步骤 8 令 $x_{k+1} = x_k + \lambda_k \mathbf{d}_k, \boldsymbol{\rho}_{k+1} = \boldsymbol{\rho}_k - \lambda_k (\boldsymbol{\rho}_k^* + \boldsymbol{\rho}_k)$, 通过 BFGS 校正公式将 $\mathbf{B}_k$ 修正为 $\mathbf{B}_{k+1}$, 令 $k := k + 1$, 转步骤 1.

算法 1 中提到的 BFGS 校正公式如下^[12]:

利用拟牛顿法的基本原理, 对 Lagrange 函数 $L(x_k, \boldsymbol{\rho}_k) = f(x_k) + \boldsymbol{\rho}_k^T g(x_k)$ 的 Hessian 矩阵 $\nabla_{xx}^2 L(x_k, \boldsymbol{\rho}_k)$ 的近似(对称正定)矩阵 $\mathbf{B}_k$ 进行修

正. 令

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{y}_k = \nabla_x L(x_{k+1}, \boldsymbol{\rho}_{k+1}) - \nabla_x L(x_k, \boldsymbol{\rho}_{k+1})$$

令

$$\mathbf{r}_k = \theta_k \mathbf{y}_k + (1 - \theta_k) \mathbf{B}_k \mathbf{s}_k$$

式中, 参数 θ_k 定义为

$$\theta_k = \begin{cases} 1, & \mathbf{s}_k^T \mathbf{y}_k \geq 0.2 \mathbf{s}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{s}_k \\ 0.8 \frac{\mathbf{s}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{s}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{s}_k - \mathbf{s}_k^T \mathbf{y}_k}, & \mathbf{s}_k^T \mathbf{y}_k < 0.2 \mathbf{s}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{s}_k \end{cases}$$

于是, 矩阵 $\mathbf{B}_k$ 的 BFGS 校正公式为

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k - \frac{\mathbf{B}_k \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \mathbf{B}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{s}_k} + \frac{\mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{r}_k}$$

3 算法的全局收敛性

在分析算法 1 的全局收敛性之前, 假设以下的条件成立.

假设 A:

a. $\{x_k\}$ 和 $\{\boldsymbol{\rho}_k\}$ 是有界序列;

b. 存在常数 $a \geq b > 0$, 使得

$$b \|\mathbf{y}\|^2 \leq \mathbf{y}^T \mathbf{B}_k \mathbf{y} \leq a \|\mathbf{y}\|^2, \forall \mathbf{y} \in R^n, k = 1, 2, \dots$$

假设 A 的 a 并不是很强的, 因为, M-F 限制条件可以确保 $\{\boldsymbol{\rho}_k\}$ 是一个有界序列.

首先分析算法 1 的可行性.

引理 3 算法 1 不会在步骤 3 和步骤 4 之间无限循环.

证明

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m \frac{\sinh(\mu_{k-1} g_i(x))}{1 + \cosh(\mu_{k-1} g_i(x))} g_i(x) &= \\ \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I^+} \frac{\sinh(\mu_{k-1} g_i(x))}{1 + \cosh(\mu_{k-1} g_i(x))} g_i(x) &+ \\ \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I^-} \frac{\sinh(\mu_{k-1} g_i(x))}{1 + \cosh(\mu_{k-1} g_i(x))} g_i(x) & \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I^+} \frac{\sinh(\mu_{k-1} g_i(x))}{1 + \cosh(\mu_{k-1} g_i(x))} g_i(x_k) &= \\ \sum_{i \in I^+} g_i(x_k) & \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I^-} \frac{\sinh(\mu_{k-1} g_i(x))}{1 + \cosh(\mu_{k-1} g_i(x))} g_i(x_k) &= \\ - \sum_{i \in I^-} g_i(x_k) & \end{aligned}$$

引理 3 得证.

引理 4 算法 1 不会在步骤 5 和步骤 6 之间无限循环.

证明 当 $\alpha_k \geq 2|\boldsymbol{\rho}_k|$ 时, 由式(6), 有

$$\begin{aligned} \nabla \Phi(x_k, \alpha_k, \mu_k)^T \mathbf{d}_k &= \nabla f(x_k)^T \mathbf{d}_k + \\ &\alpha_k \sum_{i=1}^m \frac{\sinh(\mu_k g_i(x_k))}{1 + \cosh(\mu_k g_i(x_k))} \nabla g_i(x_k)^T \mathbf{d}_k = \\ &- \mathbf{d}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{d}_k + \boldsymbol{\rho}_k^T g(x_k) - \\ &\alpha_k \sum_{i=1}^m \frac{\sinh(\mu_k g_i(x_k))}{1 + \cosh(\mu_k g_i(x_k))} g_i(x_k) \leq \\ &- \mathbf{d}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{d}_k + \sum_{i \in I^+} \left(\boldsymbol{\rho}_k - \frac{\alpha_k}{2} \right) g_i(x_k) - \\ &\sum_{i \in I^-} \left(\boldsymbol{\rho}_k - \frac{\alpha_k}{2} \right) g_i(x_k) \leq \\ &- \mathbf{d}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{d}_k < -\frac{1}{2} \mathbf{d}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{d}_k \end{aligned}$$

引理 4 得证.

从引理 4 的证明过程中可以得知, 当不等式 $\alpha_k \geq 2|\boldsymbol{\rho}_k|$ 成立时, 步骤 5 中的不等式成立. 由假设 A 的 a, $\{\boldsymbol{\rho}_k\}$ 是一个有界序列. 所以, 在有限次的迭代之后, 不等式 $\alpha_k \geq 2|\boldsymbol{\rho}_k|$ 成立, 从而步骤 5 中的不等式成立, α_k 的值不再增加, 即在有限次的迭代之后, α_k 变为常数. 所以, 为了方便起见, 不失一般性, 可以假设 $\alpha_k = \alpha, \forall k$.

引理 5 当算法 1 到达步骤 7 时, 有

$$\nabla \Phi(x_k, \alpha, \mu_k)^T \mathbf{d}_k \leq -\frac{1}{2} \mathbf{d}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{d}_k$$

引理 5 的成立是显然的.

定理 1 由算法 1 所产生的序列 $\{x_k\}$ 的任一聚点均为问题(1)的 KTT 点.

证明 首先, 证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{d}_k = 0$$

从算法 1 中可以得知, $\{\mu_k\}$ 是单调非减序列.

又由引理 1 和步骤 7, 可以知道

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, \alpha, \mu_0) &\geq \Phi(x_1, \alpha, \mu_1) \geq \Phi(x_2, \alpha, \mu_1) \geq \\ \Phi(x_2, \alpha, \mu_2) &\geq \cdots \geq \Phi(x_k, \alpha, \mu_{k-1}) \geq \\ \Phi(x_k, \alpha, \mu_k) &\geq \Phi(x_{k+1}, \alpha, \mu_k) \geq \cdots \end{aligned} \quad (8)$$

所以, $\{\Phi(x_k, \alpha, \mu_k)\}$ 是单调递减序列. 由假设 A 的 a 和引理 1 的 c, 可以知道 $\{\Phi(x_k, \alpha, \mu_k)\}$ 是有下界的, 因此, $\{\Phi(x_k, \alpha, \mu_k)\}$ 是收敛的, 即

$$\Phi(x_k, \alpha, \mu_k) - \Phi(x_{k+1}, \alpha, \mu_{k+1}) \rightarrow 0$$

由式(8), $\Phi(x_k, \alpha, \mu_k) - \Phi(x_{k+1}, \alpha, \mu_k) \rightarrow 0$.

又由步骤 7 可知

$$\lambda_k \nabla \Phi(x_k, \alpha, \mu_k)^T \mathbf{d}_k \rightarrow 0 \quad (9)$$

现证明 $\lambda_k \rightarrow 0$ 不成立. 反证, 若 $\lambda_k \rightarrow 0$, 从算法 1 中可以得知, 有

$$\begin{aligned} \Phi\left(x_k + \frac{\lambda_k}{\gamma} \mathbf{d}_k, \alpha, \mu_k\right) &> \Phi(x_k, \alpha, \mu_k) + \\ &\beta \frac{\lambda_k}{\gamma} \nabla \Phi(x_k, \alpha, \mu_k)^T \mathbf{d}_k \end{aligned} \quad (10)$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \Phi\left(x_k + \frac{\lambda_k}{\gamma} \mathbf{d}_k, \alpha, \mu_k\right) &= \Phi(x_k, \alpha, \mu_k) + \\ &\frac{\lambda_k}{\gamma} \nabla \Phi(x_k, \alpha, \mu_k)^T \mathbf{d}_k + o(\lambda_k^2) \end{aligned} \quad (11)$$

由式(10)和式(11), 有

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_k}{\gamma} \nabla \Phi(x_k, \alpha, \mu_k)^T \mathbf{d}_k + o(\lambda_k^2) &> \\ \beta \frac{\lambda_k}{\gamma} \nabla \Phi(x_k, \alpha, \mu_k)^T \mathbf{d}_k \end{aligned}$$

在上面不等式的两边同时除以 $\frac{\lambda_k}{\gamma}$, 得到

$$(1 - \beta) \nabla \Phi(x_k, \alpha, \mu_k)^T \mathbf{d}_k + o(\lambda_k) > 0 \quad (12)$$

然而, 由引理 5, 有

$$\nabla \Phi(x_k, \alpha, \mu_k)^T \mathbf{d}_k \leq -\frac{1}{2} \mathbf{d}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{d}_k < 0 \quad (13)$$

于是, 导出矛盾.

由式(9)和 $\lambda_k \rightarrow 0$ 不成立, 有

$$\nabla \Phi(x_k, \alpha, \mu_k)^T \mathbf{d}_k \rightarrow 0 \quad (14)$$

又由式(13), 假设 A 的 b 和式(14), 可以得到 $\mathbf{d}_k \rightarrow 0$.

由文献[13]中的定理 3.2.1、定理 4.3.3 和本文中的引理 3, 可知定理 1 的结论成立

4 数值测试

在一台 CPU 1.70 GHz, RAM 512 MB 的 PC 上利用 Mathematica 7.0.1 编程实现了算法 1. 测试函数取自文献[14-16], 计算结果如表 1 所示, 其中, HS(i) 表示文献[14]中的第 i 个算例, S(i) 表示文献[15]中的第 i 个算例. 在算法中, 各参数分别取为 $\beta = 0.5, \gamma = 0.5, M = 2, \mu_0 = 2, \alpha_0 = 2, \rho_1 = 0_{m \times 1}, B_1 = I_n, \varepsilon = 10^{-6}$. 表 1 的算例说明, 对于测试的问题, 本文的算法在很短的时间和较少的迭代次数内可求得问题较为满意的解.

表1 数值测试结果

Fig.1 Numerical test results

测试函数	初始值 x_1	最优函数值 $f(x^*)$	迭代 次数	CPU 时间/s
HS(62)	(1,1,1,1)	-1	32	0.422
HS(65)	(1,1,1,1)	13.8579	10	0.093
HS(69)	(0.6,0.6,0.6,0.6,0.6)	5.92934×10^{-24}	54	0.641
HS(70)	(0.6,0.6,0.6,0.6,0.6)	1.73316×10^{-18}	29	0.344
HS(71)	(3,5,-3,2,-2)	1.54764×10^{-17}	10	0.141
HS(72)	(10,7,2,-3,0.8)	1.22597×10^{-24}	55	0.500
HS(73)	(35,-31,11,5,-5)	3.79393×10^{-13}	14	0.219
HS(74)	(2.5,0.5,2,-1,0.5)	9.6402×10^{-17}	11	0.156
HS(75)	(2,2,2,2,2)	5.32665	6	0.079
HS(83)	(0.5,-0.5,0.5)	-143.646	13	0.141
HS(97)	(1,1,1,1,1)	0.241505	17	0.344
HS(98)	(-2,1.5,2,-1,-1)	-2.9197	13	0.250
HS(99)	(2,2,2,2,2)	0.0787768	13	1.516
S(78)	(1,1,1)	-1.73205	13	0.203
S(93)	(1,1,1,1,1)	4.09302	27	0.688

5 结束语

结合一类双曲余弦型光滑化罚函数,给出了求解等式约束优化问题的 SQP 算法,获得了算法的全局收敛性,并验证了算法的有效性.对于该类函数如何结合一般的非光滑问题^[17]及其它有效算法,如信赖域算法^[18],值得进一步研究.

参考文献:

- [1] Qi L Q. Superlinearly convergent approximate Newton methods for LC1 optimization problems[J]. Mathematical Programming, 1994, 64(1/2/3): 277-294.
- [2] Rockafellar R T. Computational for large-scale problems in extended linear-quadratic programming [J]. Mathematical Programming, 1990, 48(1/2/3): 447-474.
- [3] Rockafellar R T, Wets R J B. Generalized linear-quadratic problems of deterministic and stochastic optimal control in discrete time[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1990, 28(4): 810-922.
- [4] Wilson R B. A simplicial method for convex programming [D]. Boston: Harvard University, 1963.
- [5] Biggs M S. Constrained minimization using recursive equality quadratic programming in numerical methods for nonlinear optimization [M] // Lootsma F A, ed. Numerical Methods for Nonlinear Optimization. London, New York: Academic Press, 1972: 411-428.
- [6] Han S P. A globally convergent method for nonlinear programming[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1977, 22(3): 297-309.
- [7] Powell M J D. A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations. Lecture Notes in Mathematics [M] // Waston G A. Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer Verlag, 1978, 630: 144-157.
- [8] Powell M J D. The convergence of variable metric methods for nonlinearly constrained optimization calculations [M] // Nonlinear Programming. New York: Academic Press, 1978: 27-63.
- [9] Gould N I M, Toint P L. SQP methods for large-scale nonlinear programming [C] // IFIP—the International Federation for Information Processing, 2000, 46: 149-178.
- [10] Zhang J L, Zhang X S. An SQP method based on smoothing penalty function for nonlinear optimizations with inequality constraint [J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2001, 14(2): 212-217.
- [11] Herty M, Klar A, Singh A K, et al. Smoothed penalty algorithms for optimization of nonlinear models [J]. Computation Optimization and Application, 2007, 37(2): 157-176.
- [12] 黄红选, 韩继业. 数学规划 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
- [13] Bank B, Guddatt J, Klatle D, et al. Nonlinear parametric optimization. Birkhäuser [M]. Berlin: Akademie-Verlag, 1982.
- [14] Hock W, Schittkowski K. Test examples for nonlinear programming codes [M] // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1981, 187.
- [15] Schittkowski K. More test examples for nonlinear programming codes [M] // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1981, 282.
- [16] Andrei N. An unconstrained optimization test functions collection [J]. Advanced Modeling and Optimization, 2008, 10(1): 147-161.
- [17] 刘晶, 高岩. 求解一类无限维非光滑算子方程的光滑化牛顿法 [J]. 上海理工大学学报, 2008, 30(2): 167-170.
- [18] 王安琪, 宇振盛, 曹倩倩. 线性约束优化的一个自适应非单调信赖域算法 [J]. 上海理工大学学报, 2010, 32(6): 545-548.

(编辑: 石 瑛)