

文章编号: 1007-6735(2015)04-0322-05

DOI: 10.13255/j.cnki.jusst.2015.04.004

格上时滞单种群模型的行波解的渐近性

刘艺昕, 余志先

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究一类格上时滞单种群模型行波解的渐近行为. 许多学者结合上下解及单调迭代的方法研究了该系统行波解的存在性, 并且, 所构造的上下解保证非临界行波解(波速大于临界波速 c^*) 具有指数渐近行为. 本文借助于 Ikehara 定理的渐近理论不仅给出了该模型所有非临界行波解的指数渐近衰减行为, 而且进一步得到了临界行波解(波速等于 c^* , 即临界波速)具有代数指数渐近衰减行为, 完善并改进了这类行波解的渐近性结果.

关键词: 行波解; 渐近性; 格系统

中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

Asymptotics Behaviors of Traveling Waves for a Single Species with Delays on Lattices

LIU Yixin YU Zhixian

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The asymptotic behaviors of traveling waves for a single species model with delays on lattices were investigated. The existence of traveling wave solutions of the system was studied by using the monotone iterative technique with the help of the upper and lower solutions, whose constructed structures can ensure the exponential asymptotic behaviors of non-critical traveling wave solutions (the wave speed is greater than the critical speed). In the light of the asymptotic theory in the Ikehara theorem the exponential asymptotic behaviors of all non-critical traveling wave solutions were obtained and the algebraic exponential asymptotic behaviors of the critical traveling wave solutions (the wave velocity is equal to the critical velocity) were achieved. The results make up and improve the result on asymptotic behaviors of traveling wave solutions.

Key words: *traveling waves; asymptotic behavior; lattice system*

收稿日期: 2014-03-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11101282, 11271260); 上海市教委科研创新项目(14YZ096)

第一作者: 刘艺昕(1990-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 微分方程与动力系统. E-mail: waitingmiraclelyx@163

通信作者: 余志先(1982-), 男, 副教授. 研究方向: 微分方程与动力系统. E-mail: zxyu0902@163.com

1 问题的提出

研究格上时滞单种群模型

$$u'_n(t) = D[u_{n+1}(t) + u_{n-1}(t) - 2u_n(t)] - du_n(t) + b(u_n(t - \tau)), n \in \mathbb{Z}, t > 0 \quad (1)$$

式中, D, d 分别表示成熟种群的扩散系数和死亡率, $D > 0, d > 0$; 时滞 τ 是此种群的成熟时间, $\tau \geq 0$; 非线性函数 $b(u)$ 为出生函数.

若出生函数 $b \in C^1(\mathbb{R}_+)$ 满足条件:

(H1) $b'(0) > d, b'(u) \geq 0, \forall u \in (0, K)$ 有 $b'(0)u \geq b(u) > du$ 及 $\forall u \in (K, +\infty)$ 有 $b(u) < du$;

(H2) $b'(K) < d$ 和 $b(0) = dK - b(K) = 0$;

(H3) $b'(0)u - b(u) \leq Mu^{1+v}$ 对于所有 $u \in (0, K)$, 有 $M > 0$ 和 $v \in (0, 1]$;

(H4) 对所有 $u_1, u_2 \in (0, K)$ 和 $L > 0$, $|b'(u_1) - b'(u_2)| \leq L|u_1 - u_2|^v$.

Ma 等^[1]在上述条件下, 运用上下解和单调迭代的方法得到了行波解的存在性, 并进一步研究其唯一性和稳定性. 对于方程(1), 其传播现象就是研究连接两个非负平衡态 $u_1 = 0$ 与 $u_2 = K > 0$ 的行波解 $u_n(t) = U(n + ct)$ 的存在性, 其中, $U(\xi)$ 满足

$$cU'(\xi) = D[U(\xi + 1) + U(\xi - 1) - 2U(\xi)] - dU(\xi) + b(U(\xi - c\tau)) \quad (2)$$

和边界条件

$$U(-\infty) = 0, U(+\infty) = K \quad (3)$$

基于以上假设, 有一个经典的出生函数是 $b(u) = pue^{-au}$, 当 $1 < \frac{p}{d} \leq e$ 时, 它满足条件(H1) - (H4). 行波解现象不仅存在于种群模型中, 而且也存在于物理、化学、图象处理、材料科学及神经网络等领域中, 见文献[2-6], 因而具有重要的实际意义.

根据文献[1]的结果可知, 这个行波解的指数渐近行为是仅当 $c > c^*$ 时被给出, 而行波解的唯一性是在渐近条件下得到的. 很自然地, 会考虑下面的问题: 当 $c = c^*$ 时, 行波的渐近行为是怎样的, 本文不仅会回答这些问题, 而且得到了当 $c \geq c^*$ 时, 所有非负行波解的渐近行为. 为了说明结论, 将假设条件(H3'): $b \in C^2([0, K])$ 替代(H3)和(H4). 易见 $b \in C^2([0, K])$ 蕴含(H3)和(H4)成立.

定理 1 假定(H1), (H2)和(H3')成立, 并且

$\tilde{U}(\xi)$ 是式(2)的任何非负的具有波速 $c \geq c^*$ 的行波解, 则 $0 < \tilde{U}(\xi) < K, \xi \in \mathbb{R}$, 且

a. 如果 $c \geq c^*$, $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{U}(\xi) e^{-\lambda_1(c)\xi}$ 与 $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{U}'(\xi) e^{-\lambda_1(c)\xi}$ 存在.

b. 如果 $c = c^*$, 存在正数一个 $\lambda_1(c^*)$, 使得 $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{U}(\xi) \xi^{-1} e^{-\lambda_1(c^*)\xi}$ 和 $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{U}'(\xi) \xi^{-1} e^{-\lambda_1(c^*)\xi}$ 存在, 其中, $\lambda_1(c^*)$ 是 $\Delta(\lambda, c) = c\lambda - D[e^\lambda + e^{-\lambda} - 2] + d - b'(0)e^{-\lambda c\tau} = 0$ 的二重根.

在定理 1 中, 得到了 $c = c^*$ 时的行波解的渐近行为, 因此, 完善了文献[1]中的结果. 在文献[1]中, 作者仅给出了存在某行波解满足渐近行为, 在本文的结果中, 指出所有的行波解具有指数渐近行为.

2 行波解的渐近性

Ikehara 定理的渐近理论在文献[7]中用来确定非局部扩散系统行波解的渐近行为, 可参见文献[8-13]. 现将通过 Ikehara 定理的渐近理论来判定行波解的指数渐近行为. 首先叙述如下 Ikehara 定理的渐近理论.

引理 1^[7] 令 $l(\lambda) = \int_0^{+\infty} u(x) e^{-\lambda x} dx$, u 是一个正的单调递减函数. 假设 $l(\lambda)$ 可表示为 $l(\lambda) = \frac{e(\lambda)}{(\lambda + \alpha)^{k+1}}$, 且 $e(\lambda)$ 在 $-\alpha \leq \operatorname{Re} \lambda < 0$ 上是解析的, 其中, $k \geq -1$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{x^k e^{-\alpha x}} = \frac{e(-\alpha)}{\Gamma(\alpha + 1)}$.

假定 $\tilde{U}(x + ct)$ 是具有波速 $c > 0$ 的任何非负的行波解, 且满足式(2)和式(3).

引理 2 $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{U}(\xi) = 0$ 和 $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{U}'(\xi) = 0$.

证明 因为 $\tilde{U}$ 是方程(2)的行波解且满足方程(2), 所以, $\tilde{U}(-\infty) = 0$. 又因为 $c \tilde{U}'(\xi) = D[\tilde{U}(\xi + 1) + \tilde{U}(\xi - 1) - 2\tilde{U}(\xi)] - d\tilde{U}(\xi) + b(\tilde{U}(\xi - c\tau))$, 则 $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{U}'(\xi) = 0$.

引理 3 假设(H1) - (H3)成立, 则 $0 < \tilde{U}(\xi) < K, \xi \in \mathbb{R}$.

证明 首先, 证明 $0 \leq \tilde{U}(\xi) \leq K, \xi \in \mathbb{R}$. 假定不成立, 存在 $\xi_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $\tilde{U}(\xi_0) = \max_{\xi \in \mathbb{R}} \tilde{U}(\xi) >$

K . 于是 $\tilde{U}(\xi) \leq \tilde{U}(\xi_0)$, $\xi \in \mathbb{R}$ 且 $\tilde{U}'(\xi_0) = 0$. 由 (H1), 得出 $d\tilde{U}(\xi_0) - b(\tilde{U}(\xi_0)) > 0$. 因此, 有

$$\begin{aligned} 0 &\geq -c\tilde{U}'(\xi_0) + D[\tilde{U}(\xi_0 + 1) + \\ &\quad \tilde{U}(\xi_0 - 1) - 2\tilde{U}(\xi_0)] = \\ &d\tilde{U}(\xi_0) - b(\tilde{U}(\xi_0 - c\tau)) \geq \\ &d\tilde{U}(\xi_0) - b(\tilde{U}(\xi_0)) > 0 \end{aligned}$$

这是一个矛盾. 从而, $0 \leq \tilde{U}(\xi) \leq K$, $\xi \in \mathbb{R}$. 如果存在 ξ_1 , 使得 $U(\xi_1) = K$, 那么, 它是一个最大值, 且 $U'(\xi_1) = 0$. 根据方程(2), 得到

$$\begin{aligned} 0 &= -c\tilde{U}'(\xi_1) + D[\tilde{U}(\xi_1 + 1) + \tilde{U}(\xi_1 - 1) - \\ &\quad 2K] - dK + b(\tilde{U}(\xi_1 - c\tau)) \leq \\ D[\tilde{U}(\xi_1 + 1) + \tilde{U}(\xi_1 - 1) - 2K] - dK + b(K) &= \\ D[\tilde{U}(\xi_1 + 1) + \tilde{U}(\xi_1 - 1) - 2K] &\leq 0 \end{aligned}$$

这蕴含了 $\tilde{U}(\xi_1 + 1) + \tilde{U}(\xi_1 - 1) = 2K$, 即 $\tilde{U}(\xi_1 \pm 1) = K$.

由递推法, 对所有的 $m \in \mathbb{Z}^+$, 得到 $U(\xi_1 - m) = K$, 这与 $U(-\infty) = 0$ 矛盾, 因此, $U(\xi) < K$, $\xi \in \mathbb{R}$.

其次, 证明 $U(\xi) > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$. 如果存在 ξ_2 , 使得 $U(\xi_2) = 0$, 那么, 它是一个最小值, 且 $U'(\xi_2) = 0$. 由方程(2), 有 $0 = D[\tilde{U}(\xi_2 + 1) + \tilde{U}(\xi_2 - 1)] + b(\tilde{U}(\xi_2 - c\tau))$, 这表明了 $\tilde{U}(\xi_2 \pm 1) = 0$. 由递推法, 可以得到 $U(\xi_2 + m) = 0$, 对所有的 $m \in \mathbb{Z}^+$, 这与 $U(+\infty) = K$ 矛盾, 于是, $U(\xi) > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$.

引理 4 假设 (H1), (H2) 和 (H3') 成立, 另外, 对 $\xi \in \mathbb{R}$, $U(\xi)$ 是非负的, 则 $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{\xi} \tilde{U}(\theta) d\theta < \infty$.

证明 令 $\tilde{\omega}_1 = b'(0) - d > 0$ 和 $\tilde{\omega}_2 = b'(0) + d$. 因为, $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{U}(\xi) = 0$, 所以, 存在 $\xi' < 0$, 使得对所有 $\xi < \xi'$, 有不等式 $\frac{\tilde{\omega}_1}{4}(\tilde{U}(\xi) + \tilde{U}(\xi - c\tau)) > M\tilde{U}^2(\xi - c\tau)$ 成立, 其中, $M = \max_{u \in [0, K]} \left| \frac{b''(u)}{2} \right|$. 由 Taylor 展开, 对任何 $\xi < \xi'$, 得到

$$\begin{aligned} c\tilde{U}'(\xi) &= D[\tilde{U}(\xi + 1) + \tilde{U}(\xi - 1) - 2\tilde{U}(\xi)] - \\ &d\tilde{U}(\xi) + b(\tilde{U}(\xi - c\tau)) \geq \\ D[\tilde{U}(\xi + 1) + \tilde{U}(\xi - 1) - 2\tilde{U}(\xi)] - d\tilde{U}(\xi) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &b'(0)(\tilde{U}(\xi - c\tau)) - M\tilde{U}^2(\xi - c\tau) = \\ D[\tilde{U}(\xi + 1) + \tilde{U}(\xi - 1) - 2\tilde{U}(\xi)] - d\tilde{U}(\xi) - \\ &M\tilde{U}^2(\xi - c\tau) + \frac{\tilde{\omega}_1}{4}(\tilde{U}(\xi)) + \\ &\frac{\tilde{\omega}_2}{2}(\tilde{U}(\xi - c\tau) - \tilde{U}(\xi)) + \frac{\tilde{\omega}_1}{4}(\tilde{U}(\xi - c\tau)) + \\ &\frac{\tilde{\omega}_1}{4}(\tilde{U}(\xi - c\tau) + \tilde{U}(\xi)) \geq D[\tilde{U}(\xi + 1) + \\ &\tilde{U}(\xi - 1) - 2\tilde{U}(\xi)] + \frac{\tilde{\omega}_1}{4}(\tilde{U}(\xi)) + \\ &\frac{\tilde{\omega}_2}{2}(\tilde{U}(\xi - c\tau) - \tilde{U}(\xi)) + \frac{\tilde{\omega}_1}{4}(\tilde{U}(\xi - c\tau)) \quad (4) \end{aligned}$$

根据 Lebesgue 的控制收敛定理, 当 $\eta \rightarrow -\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} &\int_{\eta}^{\xi} (\tilde{U}(\theta - c\tau) - \tilde{U}(\theta)) d\theta = \\ &-c\tau \int_{\eta}^{\xi} \int_0^1 \tilde{U}'(\theta - \vartheta c\tau) d\vartheta d\theta = \\ &-c\tau \int_0^1 (\tilde{U}(\xi - \vartheta c\tau) - \tilde{U}(\eta - \vartheta c\tau)) d\vartheta \rightarrow \\ &-c\tau \int_0^1 \tilde{U}(\xi - \vartheta c\tau) d\vartheta \quad (5) \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} &\int_{\eta}^{\xi} (\tilde{U}(\theta + 1) + \tilde{U}(\theta - 1) - 2\tilde{U}(\theta)) d\theta = \\ &\int_{\eta}^{\xi} \left(\int_0^1 (\tilde{U}(\theta + \vartheta) + \tilde{U}(\theta - \vartheta)) d\vartheta \right) d\theta = \\ &\int_0^1 \left\{ [\tilde{U}(\theta + \vartheta) - \tilde{U}(\theta - \vartheta)] - \right. \\ &\quad \left. [\tilde{U}(\theta + \vartheta) - \tilde{U}(\theta - \vartheta)] \right\} d\theta \rightarrow \\ &\left(\int_0^1 (\tilde{U}(\xi + \vartheta) + \tilde{U}(\xi - \vartheta)) d\vartheta \right) \quad (6) \end{aligned}$$

对不等式(4)从 $-\infty$ 到 ξ 进行积分, 再根据式(5)和式(6), 对任何 $\xi < \xi'$, 有

$$\begin{aligned} &c\tilde{U}(\xi) + \frac{c\tau\omega_2}{2} \int_0^1 \tilde{U}(\xi - \vartheta c\tau) d\vartheta - \\ &D \int_0^1 \tilde{U}(\xi + \vartheta) - \tilde{U}(\xi - \vartheta) d\vartheta \geq \\ &\frac{\omega_1}{4} \int_{-\infty}^{\xi} \tilde{U}(\theta) d\theta + \frac{\omega_1}{4} \int_{-\infty}^{\xi} \tilde{U}(\theta - c\tau) d\theta \end{aligned}$$

这表明对于 $\xi < \xi'$, $\tilde{U}(\xi)$ 和 $\tilde{U}(\xi - c\tau)$ 是在 $(-\infty, \xi]$ 可积的. 这就证明了引理 4.

引理 5 假设引理 4 的条件成立, 那么, 存在一个正的常数 γ , 有 $\tilde{U}(\xi) = O(e^{\gamma\xi})$ ($\xi \rightarrow -\infty$), 并且 $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \tilde{U}(\xi) e^{-\gamma\xi} < \infty$.

证明 令 $V(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \tilde{U}(\theta) d\theta$, 易知 $V(\xi)$ 是单调增加的, 并且 $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} V(\xi) = 0$. 先证明 $V(\xi)$ 在 $(-\infty, \xi]$ 是可积的. 对任何 $\xi < \xi'$ (这里的 ξ' 是在引理 4 中给出的), 对不等式(4)从 $-\infty$ 到 ξ 进行积分, 再由引理 1, 得到

$$c\tilde{U}(\xi) \geq D[V(\xi+1) + V(\xi-1) - 2V(\xi)] + \frac{\tilde{\omega}_1}{4} V(\xi) + \frac{\tilde{\omega}_2}{2} (V(\xi - c\tau) - V(\xi)) + \frac{\tilde{\omega}_1}{4} V(\xi - c\tau) \quad (7)$$

通过引理 4 的证明过程和对不等式(7)从 $-\infty$ 到 ξ 进行积分, 有

$$c\tilde{U}(\xi) \geq D \int_{-\infty}^{\xi} [V(\theta+1) + V(\theta-1) - 2V(\theta)] d\theta + \frac{\tilde{\omega}_1}{4} \int_{-\infty}^{\xi} V(\theta) d\theta - \frac{\tilde{\omega}_2 c\tau}{2} \cdot \int_0^1 V(\xi - \theta c\tau) d\theta + \frac{\tilde{\omega}_1}{4} \int_{-\infty}^{\xi} V(\theta - c\tau) d\theta = D \int_0^1 [V(\xi+t) - V(\xi-t)] dt + \frac{\tilde{\omega}_1}{4} \int_{-\infty}^{\xi} V(\theta) d\theta - \frac{\tilde{\omega}_2 c\tau}{2} \int_0^1 V(\xi - \theta c\tau) d\theta + \frac{\tilde{\omega}_1}{4} \int_{-\infty}^{\xi} V(\theta - c\tau) d\theta \quad (8)$$

因此

$$cV(\xi) \geq \frac{\tilde{\omega}_1}{4} \int_{-\infty}^{\xi} V(\theta) d\theta - \frac{\tilde{\omega}_2 c\tau}{2} \cdot \int_0^1 V(\xi - \theta c\tau) d\theta + \frac{\tilde{\omega}_1}{4} \int_{-\infty}^{\xi} V(\theta - c\tau) d\theta$$

因为, $V(\xi)$ 是非负的, 得到

$$cV(\xi) \geq \frac{\tilde{\omega}_1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} V(\theta - c\tau) d\theta - \frac{\tilde{\omega}_2 c\tau}{2} V(\xi) \quad (9)$$

在不等式(9)中, $V(\xi)$ 在 $(-\infty, \xi']$ 是可积的. 这说明了 $V(\xi)$ 在 $(-\infty, \xi]$ 是可积的. 现进一步可以证明 $V(\xi) = O(e^{\gamma\xi})$ ($\xi \rightarrow -\infty$).

事实上, 对任何的 $r > 0$ 和 $\xi < \xi'$, 由不等式(9)可以得到

$$\frac{2c + c\tau\omega_2}{2} V(\xi) \geq \frac{\omega_1}{2} \int_{\xi-r}^{\xi} V(\theta - c\tau) d\theta \geq \frac{r\omega_1}{2} V(\xi - r - c\tau)$$

因此, 存在 $r_0 > 0$ 和 p ($0 < p < 1$), 使得 $V(\xi - r_0) \leq \rho V(\xi)$.

令 $h(\xi) = V(\xi)e^{-\gamma\xi}$, 其中, $\gamma = \frac{1}{r_0} \ln \frac{1}{\rho} > 0$, 那么

$$h(\xi - r_0) = V(\xi - r_0)e^{-\gamma(\xi - r_0)} =$$

$$\rho V(\xi)e^{-\gamma(\xi - r_0)} \leq V(\xi)e^{-\gamma\xi} = h(\xi) \quad (10)$$

由于 $h(\xi)$ 对所有 $\xi \in [\xi' - r_0, \xi']$ 是有界的, 那么, 不等式(10)表明了对任何 $\xi \leq \xi'$, $h(\xi)$ 是有界的, 即当 $\xi \rightarrow -\infty$ 时, $V(\xi) = O(e^{\gamma\xi})$.

从 $-\infty$ 到 ξ 积分不等式(4)的第一个等式, 且

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{U}(\xi) = 0, \text{ 有}$$

$$c\tilde{U}(\xi) = D[V(\xi+1) + V(\xi-1) - 2V(\xi)] - dV(\xi) + \int_{-\infty}^{\xi} b(\tilde{U}(\theta - c\tau)) d\theta \leq D[V(\xi+1) + V(\xi-1) - 2V(\xi)] - dV(\xi) + \int_{-\infty}^{\xi} b'(0) \tilde{U}'(\theta - c\tau) d\theta = D[V(\xi+1) + V(\xi-1) - 2V(\xi)] - dV(\xi) + b'(0) V(\xi - c\tau) \leq D[V(\xi+1) + V(\xi-1) - 2V(\xi)] - dV(\xi) + b'(0) V(\xi)$$

这表明当 $\xi \rightarrow -\infty$ 时, $\tilde{U}(\xi) = O(e^{\gamma\xi})$. 因为, 当 $\xi > \xi'$ 时, $\tilde{U}(\xi)$ 和 $e^{-\gamma\xi}$ 均为有界的, 那么, $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \tilde{U}(\xi)e^{-\gamma\xi} < \infty$. 引理 5 得证.

引理 5 表明, 当 $0 < \operatorname{Re} \lambda < \gamma$ 时,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \tilde{U}(\theta) e^{-\lambda\theta} d\theta \right| < \infty$$

现证明定理 1.

证明 定义 $\tilde{U}$ 的双边 Laplace 变换为

$$L(\lambda) \equiv \int_{\mathbb{R}} \tilde{U}(\theta) e^{-\lambda\theta} d\theta$$

那么, 对任何 λ 满足 $0 < \operatorname{Re} \lambda < \gamma$, $L(\lambda)$ 是有定义的. 注意到

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda\theta} [\tilde{U}(\theta+1) + \tilde{U}(\theta-1) - 2\tilde{U}(\theta)] d\theta = L(\lambda)(e^{\lambda} + e^{-\lambda} - 2)$$

因为

$$c\tilde{U}'(\xi) - D[\tilde{U}(\xi+1) + \tilde{U}(\xi-1) - 2\tilde{U}(\xi)] + d\tilde{U}(\xi) - b'(0)\tilde{U}(\xi - c\tau) = -b'(0)\tilde{U}(\xi - c\tau) + b(\tilde{U}(\xi - c\tau))$$

所以

$$\Delta(\lambda, c)L(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\theta} [-b'(0)\tilde{U}(\theta - c\tau) + b(\tilde{U}(\theta - c\tau))] d\theta \quad (11)$$

由引理 2, 当 $\xi \rightarrow -\infty$ 时, 得到

$$-b'(0)\tilde{U}(\xi - c\tau) + b(\tilde{U}(\xi - c\tau)) = O(\tilde{U}^2(\xi - c\tau))$$

在方程(11)中的右边对于 λ 在 $0 < \operatorname{Re} \lambda < 2\gamma$ 是有定义的. 现在运用文献[14]中的 Laplace 变换的性质. 因为, $\tilde{U}(\xi) > 0$, 存在一个正常数 κ , 使得对于 $0 < \operatorname{Re} \lambda < \kappa$, $L(\lambda)$ 是解析的, 并且 $L(\lambda)$ 有一个奇点在 $\lambda = \kappa$. 因此, 当 $c \geq c^*$, $L(\lambda)$ 在 $0 < \operatorname{Re} \lambda < \lambda_1(c)$ 上是有定义的.

考虑 $c \geq c^*$ 和 $0 < \operatorname{Re} \lambda < \lambda_1(c)$. 改写方程(11)为

$$\int_{-\infty}^0 \tilde{U}(\theta) e^{-\lambda \theta} d\theta = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \theta} [-b'(0) \tilde{U}(\theta - c\tau) + b(\tilde{U}(\theta - c\tau))] d\theta}{\Delta(\lambda, c)} - \int_0^{\infty} \tilde{U}(\theta) e^{-\lambda \theta} d\theta$$

可见, 当 $\operatorname{Re} \lambda > 0$ 时, $\int_0^{\infty} \tilde{U}(\theta) e^{-\lambda \theta} d\theta$ 是解析的. 而且 $\Delta(\lambda, c) = 0$ 除了 $\lambda = \lambda_1(c)$ 没有任何 $\operatorname{Re} \lambda = \lambda_1(c)$ 的根. 事实上, 令 $\lambda = \lambda_1(c) + i\beta$, 那么, 由 $\Delta(\lambda, c) = 0$, 得到

$$c\lambda_1(c) = D[e^{\lambda_1(c)} \cos \beta + e^{-\lambda_1(c)} \cos \beta - 2] - d + b'(0)e^{-c\tau\lambda_1(c)} \cos(\beta c\tau) \quad (12)$$

和

$$c\beta = D[e^{\lambda_1(c)} \sin \beta + e^{-\lambda_1(c)} \sin \beta] + b'(0)e^{-c\tau\lambda_1(c)} \sin(\beta c\tau) \quad (13)$$

结合方程(12)和 $\Delta(\lambda_1(c), c) = 0$, 可以得到

$$D\left[e^{\lambda_1(c)} \sin^2 \frac{\beta}{2} + e^{-\lambda_1(c)} \sin^2 \frac{\beta}{2}\right] + b'(0)e^{-c\tau\lambda_1(c)} \sin^2 \frac{\beta c\tau}{2} = 0 \quad (14)$$

说明了 $\sin \frac{\beta}{2} = 0$ 和 $\sin \frac{\beta c\tau}{2} = 0$. 那么, 根据方程(13), $\beta = 0$.

如果对于很大的 $-\xi > 0$, $\tilde{U}(\xi)$ 是单增的, 可以对 $\tilde{U}$ 作一个平移, 使得对于 $\xi < 0$ 是单增的, 并令 $u(\xi) = \tilde{U}(-\xi)$. 于是, 当 $\xi > 0$ 时, $u(\xi)$ 是单调递减的. 由引理 1, 定理 1 中的 a 和 b 都成立.

如果对于很大的 $-\xi > 0$, $\tilde{U}(\xi)$ 不是单调的, 令 $p = \frac{2D+d}{c}$ 和 $\bar{U}(\xi) = \tilde{U}(\xi)e^{p\xi} > 0$, 那么, 通过不等式(4)的第一个等式和 $\tilde{U}(\xi) > 0$, 可以得到

$$\begin{aligned} c\bar{U}'(\xi) &= D[\bar{U}(\xi+1)e^{-p} + \bar{U}(\xi-1)e^p] + \\ &\quad (cp - 2D - d)\bar{U}(\xi) + \\ &\quad b(\tilde{U}(\xi - c\tau))e^{p\xi} > 0 \end{aligned}$$

这说明对于任何 $\xi \in \mathbb{R}$, 有 $\bar{U}'(\xi) > 0$. 令 $\bar{u}(\xi) = \bar{U}(-\xi)$, 很明显对于 $\xi > 0$, $\bar{u}(\xi)$ 是单调递减的. 令 $\bar{L}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\xi} \bar{U}(\xi) d\xi$. 因此,

$\bar{L}(\lambda) = L(\lambda - p)$. 对 $\bar{u}(\xi)$ 运用引理 1, 可见对 $c >$

c^* , $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\bar{u}(\xi)}{e^{-\langle p + \lambda_1(c) \rangle \xi}} = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{\bar{U}(\xi)}{e^{\lambda_1(c)\xi}}$ 存在, 且对

$c = c^*$, $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\bar{u}(\xi)}{\xi e^{-(p + \lambda_1(c^*))\xi}} = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{\bar{U}(\xi)}{\xi e^{\lambda_1(c^*)\xi}}$ 存在. 因为

$b(u) \in C^2([0, K])$, 对 $c > c^*$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} |b(\tilde{U}(\xi - c\tau)) - b'(0)\tilde{U}(\xi - c\tau)| e^{-\lambda_1(c)\xi} \leq$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} M\tilde{U}^2(\xi - c\tau) e^{-\lambda_1(c)\xi} = 0$$

和对 $c = c^*$, 有

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \xi^{-1} |b(\tilde{U}(\xi - c\tau)) - b'(0)| \cdot$$

$$\tilde{U}(\xi - c\tau) | e^{-\lambda_1(c^*)\xi} \leq$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} M\xi^{-1}\tilde{U}^2(\xi - c\tau) e^{-\lambda_1(c^*)\xi} = 0$$

因此, 对于 $c > c^*$, 有

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \xi^{-1} \tilde{U}'(\xi) e^{-\lambda_1(c)\xi} =$$

$$\frac{1}{c} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \left\{ D[\tilde{U}(\xi+1) + \tilde{U}(\xi-1) - 2\tilde{U}(\xi)] - \right.$$

$$\left. d\tilde{U}(\xi) + b(\tilde{U}(\xi - c\tau)) \right\} e^{-\lambda_1(c)\xi} =$$

$$\frac{1}{c} \left\{ D[e^{\lambda_1(c)} + e^{-\lambda_1(c)} - 2] - d + \right.$$

$$\left. b'(0)e^{-\lambda_1(c)c\tau} \right\} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{U}(\xi) e^{-\lambda_1(c)\xi} =$$

$$\lambda_1(c) \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{U}'(\xi) e^{-\lambda_1(c)\xi}$$

类似可以证明, 当 $c = c^*$ 时结论也成立. 所以, 定理 1 得证.

参考文献:

- [1] Ma S W, Zou X F. Existence, uniqueness and stability of traveling waves in a discrete reaction diffusion monostable equations with delay [J]. Journal of Differential Equations, 2005, 217(1): 54-87.
- [2] Chow S N. Lattice dynamical systems, dynamical systems[M] // Macki J W, Zecca P eds. Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer, 2003, 1822: 1-102.

(下转第 331 页)

- [13] Zhou T, Kuscik Z, Liu J G, et al. Solving the apparent diversity-accuracy dilemma of recommender systems [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2010, 107 (10): 4511 – 4515.
- [14] Zeng A, Yeung C H, Shang M S, et al. The reinforcing influence of recommendations on global diversification [J]. Europhysics Letters, 2012, 97(1): 18005.
- [15] Liu J, Deng G S. Link prediction in a user-object network based on time-weighted resource allocation [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2009, 388(17): 3643 – 3650.
- [16] Zhang Q M, Zeng A, Shang M S. Extracting the information backbone in online system [J]. PloS One, 2013, 8(5): e62624.
- [17] 朱郁筱, 吕琳媛. 推荐系统评价指标综述 [J]. 电子科技大学学报, 2012, 41(2): 163 – 175.
- (编辑: 石 瑛)

(上接第 326 页)

- [3] Chow S N, Mallet-Paret J, Shen W X. Traveling waves in lattice dynamical systems [J]. Journal of Differential Equations, 1998, 149(2): 248 – 291.
- [4] Keener J P. Propagation and its failure in coupled systems of discrete excitable cells [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1987, 47(3): 556 – 572.
- [5] 裴胜兵, 张卫国, 李想. 色散项系数为负的 MKdV-Burgers 方程的有界行波解 [J]. 上海理工大学学报, 2014, 36(3): 205 – 216.
- [6] 徐丽筱, 张天四, 黄晓鑫. 一类具有饱和发生率的随机 SIRS 模型全局正解的渐近行为 [J]. 上海理工大学学报, 2013, 35(6): 541 – 546.
- [7] Carr J, Chmaj A. Uniqueness of traveling waves for nonlocal monostable equations [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2004, 132 (8): 2433 – 2439.
- [8] Guo J S, Wu C H. Existence and uniqueness of traveling waves for a monostable 2 – D lattice dynamical system [J]. Osaka Journal of Mathematics, 2008, 45(2): 327 – 346.
- [9] Pan S X. Asymptotic behavior of traveling fronts of the delayed Fisher equation [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2009, 10(2): 1173 – 1182.
- [10] Wang Z C, Li W T, Ruan S G. Traveling fronts in monostable equations with nonlocal delayed effects [J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2008, 20(3): 563 – 607.
- [11] Yu Z X. Uniqueness of critical traveling waves for nonlocal lattice equations with delays [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2012, 140(11): 3853 – 3859.
- [12] Yu Z X, Yuan R. Existence and asymptotics of traveling waves for nonlocal diffusion systems [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2012, 45(11): 1361 – 1367.
- [13] Yu Z X, Mei M. Asymptotics and uniqueness of travelling waves for non-monotone delayed systems on 2D lattices [J]. Canadian Mathematics Bulletin, 2013, 56(3): 659 – 672.
- [14] Widder D V. The laplace tranform [M]. Princeton: Princeton University Press, 1941.
- (编辑: 石 瑛)