

广义 Boussinesq 方程孤波解的轨道稳定性

陈 旭, 张卫国, 李 想

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 应用 Grillakis-Shatah-Strauss 提出的轨道稳定性理论, 研究了具有两个非线性项的广义 Boussinesq 方程孤波解的轨道稳定性与不稳定性, 得到了判断该方程孤波解轨道稳定性的一般性结论. 进一步根据方程的两个精确钟状孤波解, 推出了它们的轨道稳定判别式的显式表达式, 从而具体给出了使这两个孤波解轨道稳定的波速变化区间. 另外, 分析了方程中两个非线性项作用的大小对这两个孤波解轨道稳定波速变化区间的影响, 给出了使这两个孤波解轨道稳定的最大波速变化范围.

关键词: 广义 Boussinesq 方程; 多个非线性项; 孤立波; 轨道稳定性

中图分类号: O 175.2

文献标志码: A

Orbital Stability of Solitary Waves for Generalized Boussinesq Equations

CHEN Xu, ZHANG Weiguo, LI Xiang

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The abstract results of Grillakis-Shatah-Strauss were used directly and the orbital stability and instability of solitary waves solutions for the generalized Boussinesq equations with two nonlinear terms were investigated. The general conclusions on the orbital stability of solitary waves were obtained. Furthermore, the explicit expression of discrimination $d''(c)$ was deduced according to two exact solitary waves solutions of the equations. And the wave speed interval which makes the two solitary waves stable was given. Moreover, the influence of the interaction between the two nonlinear terms of the equations on the wave speed interval which makes the two solitary waves stable was also analyzed. Finally, the biggest wave speed interval which makes the two solitary waves stable was presented.

Key words: *generalized Boussinesq equation; multiple nonlinear terms; solitary wave; orbital stability*

收稿日期: 2014-07-31

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11471215); 上海市教委科研创新项目(13ZZ118); 上海市一流学科(系统科学)建设项目(XTKX2012); 沪江基金资助项目(B14005)

第一作者: 陈 旭(1986-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 非线性系统的理论与应用. E-mail: snoopychenxu@163.com

通信作者: 张卫国(1957-), 男, 教授. 研究方向: 非线性系统的理论与应用. E-mail: zwgzwm@126.com

1 问题的提出

Boussinesq 方程

$$u_{tt} + u_{xxxx} - u_{xx} - b_1(u^2)_{xx} = 0 \quad (1)$$

描述在弱非线性和弱色散介质中波的传播,是物理学和力学中的重要模型方程^[1-4].对 Boussinesq 方程(1)已有很多研究,除了文献[1-4]外,文献[5-7]还研究了它的 Painlevé 性质、Bäcklund 变换、Lax 对等.文献[8]用逆散射方法研究了 Boussinesq 方程(1)的初值问题的可解性.文献[9-10]研究了方程(1)的推广形式

$$u_{tt} + \delta u_{xxxx} - \alpha u_{xx} - (\sigma(u))_{xx} = 0, \\ x \in R, t > 0 \quad (2)$$

的初值问题解的整体存在性以及解的稳定性等.

在孤波解的稳定性方面,多位学者研究过 Boussinesq 型方程孤波解的轨道稳定性,例如,文献[9,11]分别研究了一类广义 Boussinesq 方程

$$u_{tt} - u_{xx} + (f(u) + u_{xx})_{xx} = 0 \quad (3)$$

的孤波解的轨道稳定性和轨道不稳定性.研究结果表明,若 $f(s) = |s|^{p-1}s$, $p > 1$, c 为波速,那么,当 $1 < p < 5$, $c^2 \leq \frac{p-1}{4} < 1$ 或者 $p \geq 5$, $c^2 < 1$ 时,方程(3)的孤波解是轨道不稳定的;当 $1 < p < 5$, $\frac{p-1}{4} < c^2 < 1$ 时,方程(3)的孤波解是轨道稳定的.最近,文献[12]研究了一类广义六阶 Boussinesq (GSBQ) 方程

$$u_{tt} - u_{xx} - \beta u_{xxxx} - u_{xxxxxx} + \\ (f(u))_{xx} = 0 \quad (4)$$

的孤波解的轨道稳定性和不稳定性,研究结果表明,如果 $f(s) = |s|^{p-1}s$, $p > 1$, c 为波速,当方程(4)中 $\beta = 0$ 时, $d(c) = (1 - c^2)^{\frac{3p+5}{4(p-1)}} d(0)$, 若 $p \geq 9$, 则在 $c^2 < 1$ 时,孤波解轨道不稳定;若 $p < 9$, 则在 $c^2 < \frac{2(p-1)}{p+7}$ 时,孤波解轨道不稳定,在 $c^2 > \frac{2(p-1)}{p+7}$ 时,孤波解轨道稳定.

近年来有多位学者^[13-18]研究了下列具有两个非线性项的广义 Boussinesq 方程

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} - (b_1 u^{p+1} + \\ b_2 u^{2p+1})_{xx} = 0, p > 0 \quad (5)$$

显然,当 $p = 1$, $b_2 = 0$ 时,方程(5)变为经典的 Boussinesq 方程(1).当 $p = 2$ 时,方程(5)中的非线性项是混合立方-五次方项,它一般出现在原子链

和形状记忆合金理论研究的一些模型中^[13-14].

文献[15]利用待定假设方法求出了方程(5)的精确孤波解.文献[16-17]采用不同的数值技术来研究方程(5)的局部定态解,并分析了定态解的时空演化规律.文献[18]利用 Nehari 泛函证明了方程(5)全局解的存在性和唯一性,并找到了该方程弱解在有限时间内爆破的条件.

本文研究上述广义 Boussinesq 方程(5)孤波解的轨道稳定性.

需要指出的是,以往文献研究 Boussinesq 型方程孤波解的轨道稳定性问题主要集中于方程中仅含有单个非线性项的特殊情形^[9-11],而且其要求所考虑的孤波解 $(\varphi_c, \psi_c)^T$ 中的 $\varphi_c > 0$.而本文所研究的 Boussinesq 型方程(5)具有两个非线性项.若把本文所研究的方程(5)化为方程(3)的形式,则 $f(u) = -b_1 u^{p+1} - b_2 u^{2p+1}$, 这里, $f(u)$ 的表达式中有两个非线性项,且 b_1, b_2 不取定符号,当 $u > 0$ 时, $f(u)$ 不保持恒正.另外,方程(5)实际上有两个钟状孤波解 $(\varphi_i, \psi_i)^T$ ($i = 1, 2$), 其中, $\varphi_1(\xi) > 0$, $\varphi_2(\xi) < 0$, 文献[9-11]中没有考虑孤波解 $(\varphi_2(\xi), \psi_2(\xi))^T$ 的轨道稳定性,而本文将研究 $(\varphi_2, \psi_2)^T$ 的轨道稳定性问题,故本文的研究内容是新的.由于 $p = 1$, $p = 2$ 时的方程(5)有实际背景,故对这两种情形孤波解稳定性的研究具有实际意义,特别是本文将研究方程中两个非线性项的相互作用对孤波解轨道稳定性的影响,这在理论上是有益的.本文中首先应用 Grillakis-Shatah-Strauss 的轨道稳定性理论,导出了判断 Boussinesq 方程(5)孤波解轨道稳定的一般性结论.进一步,根据方程(5)的两个精确钟状孤波解,推出了它们轨道稳定判别式的显式表达式,从而具体给出了使这两个孤波解轨道稳定的波速变化区间.本文还分析了方程(5)中两个非线性项作用的大小对这两个孤波解轨道稳定波速变化区间的影响.在方程(5)中,当低次非线性项占主要地位时,使孤波解稳定的波速区间将变大;当高次非线性项占主要地位时,使孤波解稳定的波速区间将变小.而使孤波解轨道稳定的最大波速区间满足 $c^2 \in (\frac{p}{p+2}, 1)$.

为了后面讨论的方便,现将文献[15]中求出的 Boussinesq 方程(5)两个精确孤波解的有关结果进行引述.

引理 1 令 c 为波速,且设 $c^2 - 1 < 0$.

a. 若 $b_2 < 0$ 或 $b_2 = 0$ 且 $b_1 < 0$, 则方程(5)有如

下的钟状孤波解:

$$u_1(x, t) = \varphi_1(\xi) = [f_1(x - ct)]^{\frac{1}{p}} \quad (6)$$

这里

$$f_1(\xi) = \frac{A_1 \operatorname{sech}^2 \frac{\alpha_1}{2} \xi}{4 + B_1 \operatorname{sech}^2 \frac{\alpha_1}{2} \xi}, \quad \xi = x - ct \quad (7)$$

$$\alpha_1 = p \sqrt{1 - c^2} \quad (8a)$$

$$A_1 = \frac{2(p+2) \sqrt{p+1} (1-c^2)}{\sqrt{(p+1)b_1^2 + b_2(c^2-1)(p+2)^2}} \quad (8b)$$

$$B_1 = -2 - \frac{2b_1 \sqrt{p+1}}{\sqrt{(p+1)b_1^2 + b_2(c^2-1)(p+2)^2}} \quad (8c)$$

b. 若 p 使得 $z^{\frac{1}{p}}$ ($z < 0$) 有意义, 当 $b_2 < 0$ 或 $b_2 = 0$ 且 $b_1 > 0$, 则方程(5)还有钟状孤波解

$$u_2(x, t) = \varphi_2(\xi) = [f_2(x - ct)]^{\frac{1}{p}} \quad (9)$$

这里

$$f_2(\xi) = \frac{A_2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\alpha_2}{2} \xi \right)}{4 + B_2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\alpha_2}{2} \xi \right)}, \quad \xi = x - ct \quad (10)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1$$

$$A_2 = -A_1 B_2 = -2 +$$

$$\frac{2b_1 \sqrt{p+1}}{\sqrt{(p+1)b_1^2 + b_2(c^2-1)(p+2)^2}} = -4 - B_1 \quad (11)$$

显然, 在引理1条件下, 函数 $f_1(\xi)$ 恒正, $f_2(\xi)$ 恒负.

应用 C_0 半群理论^[19], 本文有关于方程(5)的柯西问题解的局部存在性的如下结论:

引理2 对任意的 $u_0 \in X(H^1(R) \times L^2(R))$, 存在 $t_0 > 0$, t_0 仅依赖于 $\|u_0\|_X$, 使得方程(5)存在唯一的解 $u \in C([0, t_0]; H^1(R) \times L^2(R))$, 满足 $u(0) = u_0$.

现定义 $d(c): R \rightarrow R$ 为 $d(c) = E(\varphi_c) - cV(\varphi_c)$, 仿照文献[20], 可以验证方程(5)及其孤波解满足轨道稳定性理论^[21-22]的要求, 进而可得下面关于广义 Boussinesq 方程孤波解轨道稳定的一般性结论.

定理1 设 $b_2 < 0$ 或 $b_2 = 0$ 时 $b_1 \neq 0$, 波速 c 满足 $c^2 < 1$, $\varphi_c = T(ct)\varphi(x)$ 为方程(5)的孤波解, 则 a. 若 $d''(c) > 0$ 时, 则 φ_c 是轨道稳定的. b. 若 $d''(c) < 0$ 时, 则 φ_c 是轨道不稳定的.

定理1中结论b的证明参看文献[11], 也可参

照文献[11]中的方法给出证明.

2 广义 Boussinesq 方程(5)孤立波的轨道稳定性和不稳定性

为了考虑广义 Boussinesq 方程(5)的钟状孤波解的轨道稳定性, 由定理1可知, 只需要考查 $d(c) = E(\varphi_c) - cV(\varphi_c)$ 二阶导数 $d''(c)$ 的符号. 此处

$$d'(c) = [E'(\varphi_c), \varphi'_c] - c[V'(\varphi_c), \varphi'_c] -$$

$$V(\varphi_c) = -V(\varphi_c) = -c \int_R \varphi_c^2 dx \quad (12)$$

首先讨论 $b_2 = 0$ 时方程(5)孤波解的轨道稳定性, 然后利用引理1中给出的两个孤波解 φ_{ic} ($i = 1, 2$) 的精确表达式, 在 $0 < p \leq 2$ 条件下分别导出它们的轨道稳定性判别式 $d''(c)$ 和 $\tilde{d}''(c)$ 的显式表达式. 进一步利用分析方法, 分别给出判别孤波解式(6)和式(9)轨道稳定的充分条件.

2.1 $b_2 = 0$ 时广义 Boussinesq 方程孤立波解的轨道稳定性

当 $b_2 = 0$ 时, 广义 Boussinesq 方程(5)可以化为如下形式:

$$u_{tt} - u_{xx} - (b_1 u^{p+1})_{xx} + u_{xxxx} = 0 \quad (13)$$

根据引理1, 即可推得下面关于方程(13)孤波解的结论.

命题1 设波速 c 满足 $c^2 < 1$, $b_1 < 0$ 或 $b_1 > 0$, p 使 $(-b_1)^{\frac{1}{p}}$ 在实数范围有意义, 则方程(13)有钟状孤波解

$$u(x - ct) = \left(\frac{(p+2)(c^2-1)}{2b_1} \right)^{\frac{1}{p}} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{p \sqrt{1-c^2}}{2} (x - ct) \right) \quad (14)$$

根据式(12)和式(14), 有

$$d'(c) = -c \left(\frac{(p+2)(c^2-1)}{2b_1} \right)^{\frac{2}{p}}.$$

$$\int_R \left(\operatorname{sech} \left(\frac{p}{2} \sqrt{1-c^2} x \right) \right)^{\frac{4}{p}} dx = - \left(\frac{p+2}{2} \right)^{\frac{2}{p}} \frac{2M}{p(-b_1)^{\frac{2}{p}}} (1-c^2)^{\frac{2}{p}-\frac{1}{2}} c$$

其中, $M = \int_R \operatorname{sech}^{\frac{4}{p}} y dy > 0$. 上式关于 c 求导得

$$d''(c) = \frac{2M}{p(-b_1)^{\frac{2}{p}}} \left(\frac{p+2}{2} \right)^{\frac{2}{p}} (1-c^2)^{\frac{4-3p}{2p}} \cdot \left(\frac{4}{p} c^2 - 1 \right) \quad (15)$$

由于当 $b_1 < 0$ 或 $b_1 > 0$ 且使 $(-b_1)^{\frac{1}{p}}$ 在实数范

围有意义时, 总有 $(-b_1)^{\frac{2}{p}} > 0$. 根据式(15)可得, 对于广义 Boussinesq 方程(13)的孤波解式(14), 有

$$d''(c) \begin{cases} > 0, & c^2 > p/4 \\ = 0, & c^2 = p/4 \\ < 0, & c^2 < p/4 \end{cases} \quad (16)$$

故得定理 2.

定理 2 设 $b_1 < 0$ 或 $b_1 > 0$ 且 p 使 $(-b_1)^{\frac{1}{p}}$ 在实数范围有意义, 波速 c 满足 $c^2 < 1$, 则

a. 当 $0 < p < 4$ 时, 若 $p/4 < c^2 < 1$, Boussinesq 型方程(13)的孤波解式(14)是轨道稳定的; 否则, 若 $c^2 < p/4 < 1$, 方程的孤波解是轨道不稳定的.

b. 当 $p \geq 4$ 时, 方程(13)的孤波解(14)也是轨道不稳定的.

事实上, 基于定理 1、定理 2 中结论 a 可直接从式(16)导出, 而结论 b 可从式(15)推出.

当 $b_1 < 0$ 时, 定理 2 与文献[9, 11]中的结论吻合. 定理 2 的结论表明, 当 b_1 和 p 满足定理 2 假设条件, 若方程(5)只含有一个非线性项 $b_1 u^{p+1}$ 时, b_1 取正或取负对钟状孤波解的稳定性没有影响. 从式(16)也可以清楚地看出, $c^2 = p/4$ 时, $d''(c) = 0$, 此时本文所用轨道稳定性判别法失效.

2.2 $b_2 < 0$ 时广义 Boussinesq 方程(5)孤波解式(6)的轨道稳定性

基于引理 1, 始终假定方程(5)中 $b_2 < 0$.

2.2.1 孤波解式(6)的轨道稳定性判别式 $d''(c)$

首先考察方程(5)的孤波解式(6)的轨道稳定性判别式 $d''(c)$. 为方便起见, 式(6)可改写为

$$u_1(x, t) = \varphi_1(\xi) = \left[\frac{1}{d_1 + d_2 \cosh^2 d_3(\xi)} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (17)$$

其中, $\xi = x - ct$.

$$d_1 = \frac{B_1}{A_1} = -\frac{\sqrt{(p+1)b_1^2 + b_2(c^2-1)(p+2)^2 + b_1\sqrt{p+1}}}{(p+2)\sqrt{p+1}(1-c^2)} \quad (18)$$

$$d_2 = \frac{4}{A_1} = \frac{2\sqrt{(p+1)b_1^2 + b_2(c^2-1)(p+2)^2}}{(p+2)\sqrt{p+1}(1-c^2)} \quad (19)$$

$$d_3 = \frac{p}{2} \sqrt{1-c^2} \quad (20)$$

在式(12)中, 取 $\varphi_c(x) = \varphi_1(x)$, 则有

$$d'(c) = -c \int_R \left[\frac{1}{d_1 + d_2 \cosh^2(d_3 x)} \right]^{\frac{2}{p}} dx \quad (21)$$

为讨论 $d''(c)$ 的正负号, 先对式(21)中的被积函数求关于 c 的导数, 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dc} \left(\frac{1}{d_1 + d_2 \cosh^2(d_3 x)} \right)^{\frac{2}{p}} &= -\frac{2}{p} \left(\frac{1}{d_1 + d_2 \cosh^2(d_3 x)} \right)^{\frac{2}{p}-1} \cdot \\ &\frac{\left(d'_1 - \frac{d_1 d'_2}{d_2} \right) + \frac{d'_2}{d_2} (d_1 + d_2 \cosh^2(d_3 x)) + 2d_2 d'_3 x \cosh(d_3 x) \sinh(d_3 x)}{(d_1 + d_2 \cosh^2(d_3 x))^2} \end{aligned} \quad (22)$$

由于 $d_1 + d_2 \cosh^2(d_3 x) \rightarrow \infty$ (当 $x \rightarrow \infty$), 当 $0 < p \leq 2$ 时, $\left(\frac{1}{d_1 + d_2 \cosh^2(d_3 x)} \right)^{\frac{2}{p}-1}$ 或是趋于 0 ($x \rightarrow \infty$) 的有界函数, 或是常数 1. 由式(22)可知,

$\int_R \frac{d}{dc} \left[\frac{1}{d_1 + d_2 \cosh^2(d_3 x)} \right]^{\frac{2}{p}} dx$ 具内闭一致收敛性, 故根据含参量积分的求导方法及式(21)和式(22), 当 $0 < p \leq 2$ 时, 有

$$\begin{aligned} d''(c) &= - \int_R \left(\frac{1}{d_1 + d_2 \cosh^2(d_3 x)} \right)^{\frac{2}{p}} dx - c \int_R \frac{d}{dc} \left(\frac{1}{d_1 + d_2 \cosh^2(d_3 x)} \right)^{\frac{2}{p}} dx = \\ &- \int_R \left(\frac{1}{d_1 + d_2 \cosh^2(d_3 x)} \right)^{\frac{2}{p}} dx + \frac{2c}{p} \int_R \left(\frac{1}{d_1 + d_2 \cosh^2(d_3 x)} \right)^{\frac{2}{p}-1} \cdot \\ &\frac{\left(d'_1 - \frac{d_1 d'_2}{d_2} \right) + \frac{d'_2}{d_2} (d_1 + d_2 \cosh^2(d_3 x)) + 2d_2 d'_3 x \cosh(d_3 x) \sinh(d_3 x)}{(d_1 + d_2 \cosh^2(d_3 x))^2} dx \end{aligned} \quad (23)$$

利用分部积分方法, 可得

$$\int_R \frac{x \cosh(d_3 x) \sinh(d_3 x)}{(d_1 + d_2 \cosh^2(d_3 x))^2} dx =$$

$$\frac{1}{2d_2 d_3} \int_R \frac{xd(d_1 + d_2 \cosh^2(d_3 x))}{(d_1 + d_2 \cosh^2(d_3 x))^2} dx =$$

再利利用积分中值公式,并将上式代入式(23),得

$$d''(c) = \left(\frac{1}{d_1 + d_2 \cosh^2(d_3 x^*)} \right)^{\frac{2}{p}-1} I(c) \quad (24)$$

其中, $x^* \in R$.

$$\begin{aligned} I(c) = & - \int_R \frac{dx}{d_1 + d_2 ch^2(d_3 x)} + \\ & \frac{2c}{p} \left(d'_1 - \frac{d_1 d'_2}{d_2} \right) \cdot \\ & \int_R \frac{dx}{(d_1 + d_2 ch^2(d_3 x))^2} + \\ & \frac{2c}{p} \left(\frac{d'_2}{d_2} + \frac{d'_3}{d_3} \right) \int_R \frac{dx}{d_1 + d_2 ch^2(d_3 x)} \quad (25) \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \int_R \frac{dx}{(d_1 + d_2 ch^2(d_3 x))^2} &= \frac{16}{d_2^2} \cdot \\ \int_R \frac{e^{4d_3 x}}{\left[\left(e^{2d_3 x} + 2 \frac{d_1}{d_2} + 1 \right)^2 + 1 - \left(2 \frac{d_1}{d_2} + 1 \right)^2 \right]^2} dx & \end{aligned}$$

作代换 $z = e^{2d_3 x} + 2 \frac{d_1}{d_2} + 1, z_x = 2d_3 e^{2d_3 x}$, 则

$$\begin{aligned} \int_R \frac{dx}{(d_1 + d_2 ch^2(d_3 x))^2} &= \frac{8}{d_2^2 d_3} \cdot \\ \int_{2\frac{d_1}{d_2}+1}^{+\infty} \frac{z-1-2\frac{d_1}{d_2}}{\left[z^2 + 1 - \left(2 \frac{d_1}{d_2} + 1 \right)^2 \right]^2} dz &= \\ \frac{4}{d_2^2 d_3} - \frac{4(2d_1 + d_2)}{d_3 [-4d_1(d_2 + d_1)]^{\frac{3}{2}}} \cdot \end{aligned}$$

$$d'_1 - \frac{d_1 d'_2}{d_2} = - \frac{cb_1 b_2 (p+2)}{(c^2-1)(b_1^2 p + b_1^2 + b_2 c^2 p^2 + 4b_2 c^2 p + 4b_2 c^2 - b_2 p^2 - 4b_2 p - 4b_2)} \quad (28)$$

$$\frac{d'_2}{d_2} + \frac{d'_3}{d_3} = - \frac{cb_1^2 (p+1)}{(c^2-1)(b_1^2 p + b_1^2 + b_2 c^2 p^2 + 4b_2 c^2 p + 4b_2 c^2 - b_2 p^2 - 4b_2 p - 4b_2)} \quad (29)$$

$$\frac{2d_1 + d_2}{d_1(d_2 + d_1)} = - \frac{2b_1(p+1)}{b_2(p+2)} \quad (30)$$

将式(28)–(30)代入式(27),得

$$\begin{aligned} I(c) = & \frac{2c}{p} \frac{4}{d_2^2 d_3} \left(d'_1 - \frac{d_1 d'_2}{d_2} \right) \cdot \\ & \left[1 - \frac{(2d_1 + d_2)^2}{4d_1(d_2 + d_1)} \right] - \frac{2}{d_3 \sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)}} \cdot \\ & \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{2d_1 + d_2}{\sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)}} \right] = \\ & \frac{-8b_1 c^2}{pd_2^2 d_3} \frac{1}{(p+2)(c^2-1)^2} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{2d_1 + d_2}{\sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)}} - \right. \\ & \left. \frac{1}{d_2^2} (2d_1 + d_2) \sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)} \right] \\ & \text{通过作与计算上式相同的变量代换,可得} \\ & \int_R \frac{dx}{d_1 + d_2 ch^2(d_3 x)} = \frac{2}{d_2 d_3} \cdot \\ & \int_{2\frac{d_1}{d_2}+1}^{+\infty} \frac{dz}{z^2 + 1 - \left(2 \frac{d_1}{d_2} + 1 \right)^2} = \\ & \frac{2}{d_3 \sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)}} \cdot \\ & \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{2d_1 + d_2}{\sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)}} \right] \quad (26) \end{aligned}$$

将以上两个积分算式代入式(25),可得

$$\begin{aligned} I(c) = & \frac{2c}{p} \frac{4}{d_2^2 d_3} \left(d'_1 - \frac{d_1 d'_2}{d_2} \right) \cdot \\ & \left[1 - \frac{(2d_1 + d_2)^2}{4d_1(d_2 + d_1)} \right] + \\ & \left[-1 + \frac{c}{p} \left(d'_1 - \frac{d_1 d'_2}{d_2} \right) \cdot \right. \\ & \left. \frac{2d_1 + d_2}{d_1(d_2 + d_1)} + \frac{2c}{p} \left(\frac{d'_2}{d_2} + \frac{d'_3}{d_3} \right) \right] \cdot \\ & \frac{2}{d_3 \sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)}} \cdot \\ & \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{2d_1 + d_2}{\sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)}} \right] \quad (27) \end{aligned}$$

经计算可得

$$d'_1 - \frac{d_1 d'_2}{d_2} = - \frac{cb_1 b_2 (p+2)}{(c^2-1)(b_1^2 p + b_1^2 + b_2 c^2 p^2 + 4b_2 c^2 p + 4b_2 c^2 - b_2 p^2 - 4b_2 p - 4b_2)} \quad (28)$$

$$\frac{d'_2}{d_2} + \frac{d'_3}{d_3} = - \frac{cb_1^2 (p+1)}{(c^2-1)(b_1^2 p + b_1^2 + b_2 c^2 p^2 + 4b_2 c^2 p + 4b_2 c^2 - b_2 p^2 - 4b_2 p - 4b_2)} \quad (29)$$

$$\frac{2d_1 + d_2}{d_1(d_2 + d_1)} = - \frac{2b_1(p+1)}{b_2(p+2)} \quad (30)$$

将式(28)–(30)代入式(27),得

$$\begin{aligned} I(c) = & \frac{2c}{p} \frac{4}{d_2^2 d_3} \left(d'_1 - \frac{d_1 d'_2}{d_2} \right) \cdot \\ & \left[1 - \frac{(2d_1 + d_2)^2}{4d_1(d_2 + d_1)} \right] - \frac{2}{d_3 \sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)}} \cdot \\ & \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{2d_1 + d_2}{\sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)}} \right] = \\ & \frac{-8b_1 c^2}{pd_2^2 d_3} \frac{1}{(p+2)(c^2-1)^2} - \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} & \frac{2}{d_3 \sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)}} \cdot \\ & \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{2d_1 + d_2}{\sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)}} \right] \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{-\sqrt{p+1} b_1}{(p+2) \sqrt{-b_2}} \\ M_1 &= \frac{2d_1 + d_2}{\sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)}} \cdot \\ & \left[\pi - 2 \arctan \left(\frac{2d_1 + d_2}{\sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)}} \right) \right] \quad (32) \end{aligned}$$

则

$$\frac{2d_1 + d_2}{\sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)}} = -\frac{b_1 \sqrt{p+1}}{\sqrt{-b_2}(p+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{k}{\sqrt{1-c^2}} \quad (33a)$$

$$M_1 = \frac{k}{\sqrt{1-c^2}} \left[\pi - 2 \arctan \left(\frac{k}{\sqrt{1-c^2}} \right) \right] \quad (33b)$$

将式(32)–(33)代入式(31),得

$$I(c) = \frac{1}{d_3} \left[-\frac{8b_1 c^2}{pd_2^2} \frac{1}{(p+2)(c^2-1)^2} - \frac{1}{2d_1 + d_2} M_1 \right] = \frac{(p+2)b_1}{d_3} \left[\frac{-2c^2}{p} \cdot \frac{p+1}{b_1^2(p+1)+b_2(c^2-1)(p+2)^2} + \frac{1-c^2}{2b_1^2} M_1 \right] \quad (34)$$

且

$$d''(c) = \left(\frac{1}{d_1 + d_3 c h^2(d_3 x^*)} \right)^{\frac{2}{p}-1} \frac{(p+2)b_1}{d_3} \cdot \left[\frac{-2c^2}{p} \frac{p+1}{b_1^2(p+1)+b_2(c^2-1)(p+2)^2} + \frac{1-c^2}{2b_1^2} M_1 \right] \quad (35)$$

2.2.2 孤波解式(6)的轨道稳定性

首先,由于孤波解式(6)中函数 $\varphi_1(\xi)$ 恒正, $d_3 > 0$, 根据式(24)和式(31)可知,当 $b_1 > 0$ 时,有 $I(c) < 0$, 进而 $d''(c) < 0$. 故当 $b_1 > 0$ 时,孤波解式(6)是轨道不稳定的.

现考虑 $b_1 < 0$ 时孤波解式(6)的轨道稳定性.

考察式(34)和式(35)中的 M_1 . 当 $b_1 < 0$ 时,根据式(32),易知此时 $k > 0$, 若设 $x = \frac{k}{\sqrt{1-c^2}}$, 则 $x \in (0, +\infty)$. 令 $g(x) = x(\pi - 2 \arctan x)$, 有

$$g'(x) = \pi - 2 \arctan x - \frac{2x}{1+x^2}$$

$$g''(x) = -\frac{4}{(1+x^2)^2} < 0$$

$g(x)$ 在 x_0 处取极大值, 这里, x_0 满足 $g'(x_0) = 0$, 有

$$g(x_0) = x_0(\pi - 2 \arctan x_0) = \frac{2x_0^2}{1+x_0^2} < 2$$

又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} M_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\pi - 2 \arctan x) = 2$$

故根据微积分知识推得, 当 $b_1 < 0$ 时, $M_1 \in (0, 2)$.

现考虑式(35), 易知在 $b_1 < 0$ 情形, $d''(c) > 0$

等价于

$$-\frac{2c^2}{p} \frac{p+1}{b_1^2(p+1)+b_2(c^2-1)(p+2)^2} + \frac{1-c^2}{2b_1^2} M_1 < 0$$

由于 $M_1 \in (0, 2)$, 有

$$-\frac{2c^2}{p} \frac{p+1}{b_1^2(p+1)+b_2(c^2-1)(p+2)^2} + \frac{1-c^2}{2b_1^2} M_1 < \frac{-2c^2}{p} \cdot \frac{p+1}{b_1^2(p+1)+b_2(c^2-1)(p+2)^2} + \frac{1-c^2}{b_1^2}$$

因此, 若

$$-\frac{2c^2}{p} \frac{p+1}{b_1^2(p+1)+b_2(c^2-1)(p+2)^2} + \frac{1-c^2}{b_1^2} < 0 \quad (36)$$

则 $I(c) > 0$, 进而 $d''(c) > 0$. 由此可知, 若式(36)条件成立, 方程(5)的孤波解(6)是轨道稳定的.

显然, 式(36)等价于下式

$$pb_2(p+2)^2 c^4 + (p+2)[b_1^2(p+1) - 2pb_2(p+2)]c^2 - p[b_1^2(p+1) - b_2(p+2)^2] > 0 \quad (37)$$

令 $c^2 = t$, 解方程

$$pb_2(p+2)^2 t^2 + (p+2)[b_1^2(p+1) - 2pb_2(p+2)]t - p[b_1^2(p+1) - b_2(p+2)^2] = 0$$

可得

$$t_1 = \frac{-(p+1)b_1^2}{2p(p+2)b_2} + \frac{\sqrt{p+1}b_1}{2p(p+2)b_2} \cdot \sqrt{b_1^2(p+1) - 8pb_2} + 1 \quad (38)$$

$$t_2 = \frac{-(p+1)b_1^2}{2p(p+2)b_2} - \frac{\sqrt{p+1}b_1}{2p(p+2)b_2} \cdot \sqrt{b_1^2(p+1) - 8pb_2} + 1 \quad (39)$$

由于始终假定 $b_2 < 0$, 故易知在 $b_1 < 0$ 的条件下, 有 $0 < t_2 < 1$, $t_1 > 1$. 又因为本文要求波速满足 $c^2 < 1$, 所以, 当 c 满足

$$1 > c^2 > \frac{-(p+1)b_1^2}{2p(p+2)b_2} - \frac{\sqrt{p+1}b_1}{2p(p+2)b_2} \sqrt{b_1^2(p+1) - 8pb_2} + 1 \quad (40)$$

时, 式(37)成立, 此时 $d''(c) > 0$. 由此可知, 方程(5)的孤波解式(6)在 c 满足式(40)条件下是轨道稳

定的.

综合上述讨论,可得定理3.

定理3 设 $b_2 < 0, 0 < p \leq 2, c^2 < 1$, 则对于方程(5)的孤波解式(6),有

a. 当 $b_1 > 0$ 时,孤波解式(6)是轨道不稳定的.

b. 当 $b_1 < 0$ 时,若波速 c 满足式(40),孤波解式(6)是轨道稳定的.

2.3 $b_2 < 0$ 时广义 Boussinesq 方程(5)孤波解式(9)的轨道稳定性

2.3.1 孤波解式(9)的轨道稳定性判别式 $\tilde{d}''(c)$

为不致混淆,将与孤波解式(9)对应的稳定性判别式记为 $\tilde{d}(c)$,现研究 $\tilde{d}''(c)$.

在式(12)中,取 $\varphi_c(x) = \varphi_2(x)$,则

$$\begin{aligned} \tilde{d}'(c) = & -c \int_R [\varphi_2(x)]^2 dx = \\ & -c \int_R \left[\frac{A_2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\alpha_2}{2}x\right)}{4 + B_2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\alpha_2}{2}x\right)} \right]^{\frac{2}{p}} dx \quad (41) \end{aligned}$$

式(41)可化为

$$\tilde{d}'(c) = -c \int_R \left[\frac{1}{\bar{d}_1 + \bar{d}_2 \cosh^2(\bar{d}_3 x)} \right]^{\frac{2}{p}} dx \quad (42)$$

其中, $\bar{d}_1 = \frac{B_2}{A_2}, \bar{d}_2 = \frac{4}{A_2}, \bar{d}_3 = \frac{\alpha_2}{2}$. 类似于前面对 $\varphi_1(\xi)$

轨道稳定性的讨论,当 $0 < p \leq 2$ 时,有

$$\tilde{d}''(c) = \left(\frac{1}{\bar{d}_1 + \bar{d}_2 \cosh^2(\bar{d}_3 x_0)} \right)^{\frac{2}{p}-1} \tilde{I}(c) \quad (43)$$

其中, $x_0 \in R$.

$$\tilde{I}(c) = \frac{2c}{p} \frac{4}{\bar{d}_2^2 \bar{d}_3} \left(\bar{d}_1' - \frac{\bar{d}_1 \bar{d}_2'}{\bar{d}_2} \right).$$

$$\left[1 - \frac{(2\bar{d}_1 + \bar{d}_2)^2}{4\bar{d}_1(\bar{d}_2 + \bar{d}_1)} \right] + \left[1 - \frac{c}{p} \left(\bar{d}_1' - \frac{\bar{d}_1 \bar{d}_2'}{\bar{d}_2} \right) \right].$$

$$\frac{2\bar{d}_1 + \bar{d}_2}{\bar{d}_1(\bar{d}_2 + \bar{d}_1)} - \frac{2c}{p} \left(\frac{\bar{d}_2'}{\bar{d}_2} + \frac{\bar{d}_3'}{\bar{d}_3} \right).$$

$$\frac{2}{\bar{d}_3 \sqrt{-4\bar{d}_1(\bar{d}_2 + \bar{d}_1)}}.$$

$$\left[\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{2\bar{d}_1 + \bar{d}_2}{\sqrt{-4\bar{d}_1(\bar{d}_2 + \bar{d}_1)}} \right] \quad (44)$$

由于 $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3$ 与 d_1, d_2, d_3 有下列关系:

$$\begin{cases} \bar{d}_1 = \frac{B_2}{A_2} = \frac{4}{A_1} + \frac{B_1}{A_1} = d_1 + d_2 \\ \bar{d}_2 = \frac{4}{A_2} = -\frac{4}{A_1} = -d_2 \\ \bar{d}_3 = \frac{\alpha_2}{2} = d_3 \end{cases} \quad (45)$$

于是,有

$$2\bar{d}_1 + \bar{d}_2 = 2d_1 + d_2$$

$$\bar{d}_1(\bar{d}_1 + \bar{d}_2) = d_1(d_1 + d_2)$$

$$\bar{d}_1' - \frac{\bar{d}_1 \bar{d}_2'}{\bar{d}_2} = d_1' - \frac{d_1 d_2'}{d_2}$$

$$\frac{\bar{d}_2'}{\bar{d}_2} + \frac{\bar{d}_3'}{\bar{d}_3} = \frac{d_2'}{d_2} + \frac{d_3'}{d_3}$$

将以上各式代入式(44),并利用式(28)—(30),得

$$\begin{aligned} \tilde{I}(c) = & \frac{2c}{p} \frac{4}{\bar{d}_2^2 \bar{d}_3} \left(d_1' - \frac{d_1 d_2'}{d_2} \right) \cdot \\ & \left[1 - \frac{(2d_1 + d_2)^2}{4d_1(d_2 + d_1)} \right] + \left[1 - \frac{c}{p} \left(d_1' - \frac{d_1 d_2'}{d_2} \right) \right] \cdot \\ & \frac{2d_1 + d_2}{d_1(d_2 + d_1)} - \frac{2c}{p} \left(\frac{d_2'}{d_2} + \frac{d_3'}{d_3} \right) \cdot \\ & \frac{2}{d_3 \sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)}} \left[\frac{\pi}{2} + \right. \\ & \left. \arctan \frac{2d_1 + d_2}{\sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)}} \right] = \\ & \frac{-8b_1 c^2}{p d_2^2 d_3} \frac{1}{(p+2)(c^2-1)^2} + \\ & \frac{2}{d_3 \sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)}} \cdot \\ & \left[\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{2d_1 + d_2}{\sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)}} \right] \quad (46) \end{aligned}$$

由于有式(32)和式(33),若记

$$\begin{aligned} M_2 = & \frac{2d_1 + d_2}{\sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)}} \cdot \\ & \left[\pi + 2\arctan \left(\frac{2d_1 + d_2}{\sqrt{-4d_1(d_2 + d_1)}} \right) \right] \end{aligned}$$

则

$$M_2 = \frac{k}{\sqrt{1-c^2}} \left[\pi + 2\arctan \left(\frac{k}{\sqrt{1-c^2}} \right) \right] \quad (47)$$

于是

$$\tilde{I}(c) = \frac{1}{d_3} \left\{ \frac{-8b_1 c^2}{p d_2^2} \frac{1}{(p+2)(c^2-1)^2} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2d_1 + d_2} M_2 \right\} = \frac{(p+2)b_1}{d_3} \left[\frac{-2c^2}{p} \cdot \frac{p+1}{b_1^2(p+1) + b_2(c^2-1)(p+2)^2} - \frac{1-c^2}{2b_1^2} M_2 \right] \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}''(c) = & \left(\frac{1}{\bar{d}_1 + \bar{d}_2 c h^2 \bar{d}_3 x_0} \right)^{\frac{2}{p}-1} \frac{(p+2)b_1}{d_3} \cdot \\ & \left[\frac{-2c^2}{p} \frac{p+1}{b_1^2(p+1) + b_2(c^2-1)(p+2)^2} - \frac{1-c^2}{2b_1^2} M_2 \right] \quad (49) \end{aligned}$$

2.3.2 孤波解式(9)的轨道稳定性

首先注意到, 当 $b_1 < 0$ 时, 根据式(46)可知, $\tilde{I}(c) > 0$. 由于孤波解式(9)中函数 $f_2(\xi)$ 恒负, 易知式(43)中 $\left(\frac{1}{\bar{d}_1 + \bar{d}_2 c h^2 \bar{d}_3 x_0} \right)^{\frac{2}{p}-1}$ 恒负, 从而 $\tilde{d}''(c) < 0$. 由此可知, 当 $b_1 < 0$ 时, 方程(5)的孤波解式(9)轨道不稳定.

现考虑 $b_1 > 0$ 的情形. 考察式(48)和式(49)中的 M_2 .

当 $b_1 > 0$ 时, 根据式(32)易知, 此时 $k < 0$, 若设 $x = \frac{k}{\sqrt{1-c^2}}$, 则 $x \in (-\infty, 0)$. 又

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} M_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\pi + 2\arctan x) = -2$$

故用对 M_1 分析时同样的微积分知识, 可证 $M_2 \in (-2, 0)$.

根据式(49)可知, 在 $b_1 > 0$ 的情形, $\tilde{d}''(c) > 0$ 等价于

$$\frac{-2c^2}{p} \frac{p+1}{b_1^2(p+1) + b_2(c^2-1)(p+2)^2} - \frac{1-c^2}{2b_1^2} M_2 < 0$$

由于 $M_2 \in (-2, 0)$, 有

$$\begin{aligned} \frac{-2c^2}{p} \frac{p+1}{b_1^2(p+1) + b_2(c^2-1)(p+2)^2} - \\ \frac{1-c^2}{2b_1^2} M_2 < \frac{-2c^2}{p} \cdot \\ \frac{p+1}{b_1^2(p+1) + b_2(c^2-1)(p+2)^2} + \frac{1-c^2}{b_1^2} \end{aligned}$$

因此, 若

$$\begin{aligned} \frac{-2c^2}{p} \frac{p+1}{b_1^2(p+1) + b_2(c^2-1)(p+2)^2} + \\ \frac{1-c^2}{b_1^2} < 0 \quad (50) \end{aligned}$$

则必有 $\tilde{d}''(c) > 0$. 由此可知, 在 $b_1 > 0$ 情形, c 满足式(50)条件下, 方程(5)的孤波解式(9)是轨道稳定的.

注意到不等式(50)与式(36)完全相同, 但当 $b_2 < 0, b_1 > 0$ 时, 有 $0 < t_1 < 1, t_2 > 1$. 这里, t_1, t_2 分别由式(38)和式(39)给定. 故易知, 在 $b_2 < 0, b_1 > 0$ 情况下, 当 c 满足

$$1 > c^2 > \frac{-(p+1)b_1^2}{2p(p+2)b_2} + \frac{\sqrt{p+1}b_1}{2p(p+2)b_2} \cdot \sqrt{b_1^2(p+1) - 8pb_2} + 1 \quad (51)$$

时, 式(50)成立, 从而 $\tilde{d}''(c) > 0$ 成立. 由此可知, 方程(5)的孤波解式(9)在 $b_1 > 0, c$ 满足式(51)情况下是轨道稳定的.

综合上述讨论, 可得定理 4.

定理 4 设 $b_2 < 0, 0 < p \leq 2, c^2 < 1$, 则对于方程(5)的孤波解式(9), 有

a. 当 $b_1 < 0$ 时, 此孤波解式(9)是轨道不稳定的;

b. 当 $b_1 > 0$ 时, 且波速 c 满足式(51), 则孤波解式(9)是轨道稳定的.

3 多个非线性项对方程(5)的孤波解轨道稳定性的影响

3.1 方程(5)中两个非线性项对稳定性区间的影响

结合定理 2—4 进行讨论. 根据定理 2 可知, 当 $0 < p < 4$ 时, 若 $p/4 < c^2 < 1$, 则具有一个非线性项 ($b_2 = 0$ 时)的 Boussinesq 型方程(5)的孤波解式(14)是轨道稳定的, 此结论和文献[9, 11]的吻合. 若 $b_2 < 0$, 定理 3 和定理 4 中给出了具有两个非线性项的 Boussinesq 型方程(5)的孤波解式(6)和式(9)轨道稳定性的结论. 由定理 3 可知, 对于孤波解式(6), 当 $b_1 < 0$ 且波速 c 满足 $c^2 \in (t_2, 1)$ 时 (这里 t_2 由式(39)给定), 则它是轨道稳定的; 而对于孤波解式(9), 若 $b_1 > 0$ 且波速 c 满足 $c^2 \in (t_1, 1)$ 时 (这里 t_1 由式(38)给定), 则它是轨道稳定的. 现分析方程(5)中两个非线性项对使孤波解轨道稳定的波速区间的影响. 为了便于分析, 在所研究的方程(5)中, 取 $b_1 = -1, b_2 = -1$. 此时, 根据定理 3 可知, 当波速 c 满足

$$1 > c^2 > \frac{p+1}{2p(p+2)} - \frac{\sqrt{p+1}}{2p(p+2)} \sqrt{9p+1} + 1 \quad (52)$$

时, 对应的孤波解式(6)是轨道稳定的, 而此时, 根据定理 4 中结论 a 可知, 孤波解式(9)是轨道不稳定

的. 根据定理 2, 此时使具有一个非线性项 ($b_2 = 0$ 时) 的 Boussinesq 型方程 (5) 的孤波解式 (14) 轨道

稳定的波速区间为 $c^2 \in \left(\frac{p}{4}, 1\right)$. 令

$$f(p) = \frac{p+1}{2p(p+2)} - \frac{\sqrt{p+1}}{2p(p+2)} \sqrt{9p+1} + 1 - \frac{p}{4} = \frac{2p+2-2\sqrt{p+1}\sqrt{9p+1}+4p(p+2)-p^2(p+2)}{4p(p+2)}$$

因为

$$2p+2-2\sqrt{p+1}\sqrt{9p+1}+4p(p+2)-$$

$$p^2(p+2) > p^2(2-p)$$

由此可推知

$$f(p) = \frac{p+1}{2p(p+2)} - \frac{\sqrt{p+1}}{2p(p+2)} \sqrt{9p+1} + 1 - \frac{p}{4} > 0, 0 < p \leq 2 \quad (53)$$

$$\frac{p+1}{2p(p+2)} - \frac{\sqrt{p+1}}{2p(p+2)} \sqrt{9p+1} + 1 > \frac{p}{4}, 0 < p \leq 2 \quad (54)$$

上述分析表明, 对比方程 (5) 中 $b_2 = 0$ 的情形, 当方程 (5) 中具有两个非线性项时, 使孤波解式 (6) 轨道稳定的波速区间变小了. 类似地可以说明, 方程 (5) 孤波解式 (9) 的轨道稳定的波速区间也比 $b_2 = 0$ 时方程 (5) 孤波解的轨道稳定的波速区间小.

3.2 方程 (5) 中高次非线性项分别占主要地位时对孤波解稳定性区间的影响

现讨论方程 (5) 中高次非线性项分别占主要地位时对孤波解稳定性区间的影响.

a. 对孤波解式 (6) 轨道稳定的波速区间的影响

根据定理 3, 当 $b_1 < 0$ 时, 使孤波解式 (6) 轨道稳定的波速 c 满足 $c^2 \in (t_2, 1)$. 由式 (39) 可知

$$t_2 = \frac{-(p+1)b_1^2}{2p(p+2)b_2} - \frac{\sqrt{p+1}b_1}{2p(p+2)b_2} \cdot \sqrt{b_1^2(p+1)-8pb_2} + 1 = \frac{-4\sqrt{p+1}}{(p+2)} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{p+1} + \sqrt{p+1 + \frac{8p|b_2|}{b_1^2}}\right)} + 1 \quad (55)$$

由式 (55) 可以看出

当 $\frac{|b_2|}{b_1^2}$ 变小时, t_2 变小, 当 $\frac{|b_2|}{b_1^2} \rightarrow 0$ 时,

$$t_2 \rightarrow \frac{p}{p+2};$$

当 $\frac{|b_2|}{b_1^2}$ 变大时, t_2 变大, 当 $\frac{|b_2|}{b_1^2} \rightarrow +\infty$ 时, $t_2 \rightarrow 1$.

这表明方程 (5) 中, 当低次非线性项占主要地位时, 使孤波解式 (6) 稳定的波速区间将变大, 而当高次非线性项占主要地位时, 使孤波解式 (6) 稳定的波速区间将变小, 使孤波解 (6) 轨道稳定的最大波速区间满足 $c^2 \in \left(\frac{p}{p+2}, 1\right)$.

b. 对孤波解式 (9) 轨道稳定的波速区间的影响

根据定理 4, 当 $b_1 > 0$ 时, 使孤波解式 (9) 轨道稳定的波速 c 满足 $c^2 \in (t_1, 1)$. 由式 (38) 可知

$$t_1 = \frac{-(p+1)b_1^2}{2p(p+2)b_2} + \frac{\sqrt{p+1}b_1}{2p(p+2)b_2} \cdot \sqrt{b_1^2(p+1)-8pb_2} + 1 = \frac{-4\sqrt{p+1}}{(p+2)} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{p+1} + \sqrt{(p+1) + \frac{8p|b_2|}{b_1^2}}\right)} + 1 \quad (56)$$

由式 (56) 可以看出

当 $\frac{|b_2|}{b_1^2}$ 变小时, t_1 变小, 当 $\frac{|b_2|}{b_1^2} \rightarrow 0$ 时,

$$t_1 \rightarrow \frac{p}{p+2};$$

当 $\frac{|b_2|}{b_1^2}$ 变大时, t_1 变大, 当 $\frac{|b_2|}{b_1^2} \rightarrow +\infty$ 时,

$$t_1 \rightarrow 1.$$

由此可知, 对孤波解式 (9) 而言, 方程中两个非线性项的大小对其轨道稳定波速区间的影响是与孤波解式 (6) 相同的, 使孤波解式 (9) 轨道稳定的最大波速区间同样是 c 满足 $c^2 \in \left(\frac{p}{p+2}, 1\right)$.

参考文献:

- [1] Boussinesq J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond [J]. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1872, 2(17): 55-108.

- [2] Whitham G B. Linear and nonlinear wave[M]. New York:Springer,1974.
- [3] Zhankarov V E. On stochastization of one-dimensional chains of nonlinear oscillation[J]. Soviet Physics-JETP,1974,38(1):108-110.
- [4] McKean H P. Boussinesq's equation on the circle[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1981,34(5):599-691.
- [5] Weiss J, Tabor M, Carnevale G. The Painlevé property for partial differential equations[J]. Journal of Mathematical Physics,1983,24(3):522-526.
- [6] Weiss J. The Painlevé property for partial differential equations. II: Bäcklund transformation, Lax pairs, and the Schwarzian derivative[J]. Journal of Mathematical Physics,1983,24(6):1405-1413.
- [7] Weiss J. The Painlevé property and Bäcklund transformations for the sequence of Boussinesq equations[J]. Journal of Mathematical Physics,1985, 26(2):258-269.
- [8] Zakharov V E, Manakov S V, Novikov S P, et al. Theory of solitons; the inverse scattering method[M]. New York:Plenum Press,1984.
- [9] Bona J J, Sachs R L. Global existence of smooth solutions and stability of solitary waves for a generalized boussinesq equation[J]. Communications in Mathematical Physics,1988,118(1):15-29.
- [10] Linares F. Global existence of small solutions for a generalized boussinesq equation[J]. Journal of Differential Equations,1993,106(2):257-293.
- [11] Liu Y. Instability of solitary waves for generalized boussinesq equations[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations,1993,5(3):537-558.
- [12] Esfahani A, Levandosky S. Stability of solitary waves for the generalized higher-order boussinesq equation[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2012,24(2):391-425.
- [13] Falk F, Laedke E W, Spatschek K H. Stability of solitary-wave pulses in shape-memory alloys[J]. Physical Review B,1987,36(6):3031-3041.
- [14] Maugin G A. Nonlinear waves in elastic crystals[M]. Oxford:Oxford University Press,1999.
- [15] Zhang W G, Chang Q S, Zhang Q R. Lienard equation and exact solutions for some soliton-producing nonlinear equations[J]. Communications in Theoretical Physics, 2004,41(6):849-858.
- [16] Chertock A, Christov C I, Kurganov A. Central-upwind schemes for the boussinesq paradigm equations[J]. Computational Science and High Performance Computing IV, NNFM,2011,113:267-281.
- [17] Dimova M, Vasileva D. Comparison of two numerical approaches to boussinesq paradigm equation[J]. Lecture Notes in Computer Science,2013,8236:255-262.
- [18] Kutev N, Kolkovska N, Dimova M. Global existence to generalized boussinesq equation with combined power-type nonlinearities[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2014,410(1):427-444.
- [19] Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations[M]. New York:Springer,1983.
- [20] 张卫国, 秦英豪, 李仪. 广义 Boussinesq 方程孤立波的轨道不稳定性[J]. 上海理工大学学报, 2009, 31(2): 103-107.
- [21] Grillakis M, Shatah J, Strauss W. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry, I[J]. Journal of Functional Analysis, 1987, 74(1): 160-197.
- [22] Grillakis M, Shatah J, Strauss W. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry, II[J]. Journal of Functional Analysis, 1990, 94(2): 308-348.

(编辑:石 瑛)