

文章编号: 1007-6735(2015)06-0511-06

DOI: 10.13255/j.cnki.jusst.2015.06.001

一类接触率受到噪声干扰的随机 SIS 流行病模型研究

张艳宏, 许超群, 原三领

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 研究了一类接触率受到环境噪声干扰的随机 SIS 流行病模型. 利用停时理论及 Lyapunov 分析方法, 证明了该随机模型正解的全局存在唯一性与有界性. 当相应的确定性模型基本再生数小于 1 时, 证明了随机模型无病平衡点的随机渐近稳定性; 当确定性模型基本再生数大于 1 时, 揭示了随机模型的解围绕相应的确定性模型地方病平衡点的振荡行为; 当确定性模型基本再生数大于 1 并且噪声强度较小时, 证明了随机模型的解是平均持续的. 另外, 得到了强度较大的环境噪声可以导致疾病灭绝的结论. 最后, 数值模拟验证了所得理论结果的正确性.

关键词: 随机 SIS 模型; 随机稳定性; 振荡行为; 平均持续; 疾病灭绝

中图分类号: O 175.1

文献标志码: A

Stochastic SIS Epidemic Model with Contract Rate Influenced by Noise

ZHANG Yanhong, XU Chaoqun, YUAN Sanling

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: A stochastic SIS epidemic model was analyzed, considering that the contact rate is influenced by environmental noise. The global existence, uniqueness and boundedness of its positive solution were proved by using the stopping time theory and Lyapunov analysis method. The stochastic asymptotical stability of the disease-free equilibrium point was proved when the corresponding deterministic basic reproduction number is less than 1. It is also shown that the solution of the stochastic model oscillates around the corresponding deterministic endemic equilibrium point when the deterministic basic reproduction number is more than 1, and is of mean persistency when the deterministic basic reproduction number is more than 1 and the noise intensity is small. Besides, it is concluded that the large noise can make the disease extinct. Numerical simulations were carried out to prove the validity of theoretical results.

Key words: stochastic SIS model; stochastic stability; oscillating behavior; mean persistence; disease extinction

收稿日期: 2014-09-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11271260); 上海市一流学科资助项目(XTKX2012); 上海市教委科研创新重点项目(13ZZ116); 上海市研究生创新基金资助项目(JWCXSL1401)

第一作者: 张艳宏(1988-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 生物数学. E-mail: hemorhoid_2006@163.com

通信作者: 原三领(1966-), 男, 教授. 研究方向: 生物数学. E-mail: sanling@usst.edu.cn

1 问题的提出

流行病动力学是对流行病的流形规律进行理论性定量研究的一种重要方法. 与传统的生物统计学方法相比, 动力学方法能更好地从疾病的传播机理方面来反映流行规律, 能使人们了解疾病流行过程中的一些全局性态^[1]. 因此, 针对某类疾病建立数学模型并分析其动力学行为受到了许多研究者的关注^[2-4].

对于某些以细菌为媒介的传染病(如淋病、脑炎、白喉、霍乱等), 染病者康复后不会产生免疫力, 可能再次被感染. 针对此类流行病, Kermack 等^[5]在 1932 年提出了如下形式的 SIS 模型

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \beta S(t)I(t) - \mu S(t) + \gamma I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\gamma + \mu + \epsilon)I(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $S(t)$, $I(t)$ 分别表示 t 时刻的易感者、染病者数目; Λ 为易感者的补充率; β 为接触率; γ 为染病者的恢复率; μ 为个体的自然死亡率; ϵ 为染病者的因病死亡率. 疾病的基本再生数 $R_0 = \frac{\Lambda\beta}{\mu(\gamma + \mu + \epsilon)}$. 当 $R_0 \leq 1$ 时, 模型(1)仅存在无病平衡点 $E^0 = (S^0, I^0) = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$, 且 E^0 全局渐近稳定;

当 $R_0 > 1$ 时, 模型(1)又存在地方病平衡点 $E^* = (S^*, I^*) = (\frac{\gamma + \mu + \epsilon}{\beta}, \frac{\Lambda\beta - \mu(\gamma + \mu + \epsilon)}{\beta(\mu + \epsilon)})$, 此时 E^* 全局渐近稳定, 而 E^0 不稳定.

许多学者基于模型(1)做了进一步的研究工作^[6-10]. 如文献[6]考虑了一类具有季节变化和脉冲接种控制的流行病模型, 得到了无病平衡点稳定和疾病持续存在的条件; 对于含有时滞的 SIS 流行病模型, 文献[7]证明了地方病平衡点的全局稳定性和疾病的持续性; 袁艳燕等^[8]建立了一类含染病期时滞且考虑因病死亡的 SIS 流行病模型, 证明了无病平衡点的全局稳定性和地方病平衡点的局部稳定性.

注意到以上的研究工作均考虑的是确定性模型, 而现实环境中存在各种各样的随机因素, 疾病的传播过程不可避免地会受到环境噪声的影响. 因此, 对随机环境中流行病的传播进行数学建模与研究开始受到人们的广泛关注^[11-15]. 如 Zhou 等^[11]研究了一类随机 SIR 模型, 并讨论了平稳分布的存在性. 文

献[12]考虑了一类恢复率受到环境噪声影响的随机 SIS 模型, 证明了无病平衡点的稳定性和随机模型解的振荡行为, 并得到了疾病平均持续和灭绝的充分条件.

然而, 流行病在传播过程中, 接触率往往更容易受到环境噪声的影响. 本文将在模型(1)的基础上考虑接触率受到噪声影响的情形, 即

$$\beta \rightarrow \beta + \alpha \dot{B}(t)$$

式中: $B(t)$ 是标准布朗运动; α 代表噪声强度. 此时, 可以建立如下随机 SIS 流行病模型

$$\begin{cases} dS = (\Lambda - \beta SI - \mu S + \gamma I)dt - \alpha SI dB \\ dI = [\beta SI - (\gamma + \mu + \epsilon)I]dt + \alpha SI dB \end{cases} \quad (2)$$

下面将首先证明模型(2)正解的全局存在唯一性与有界性, 再讨论该解在不同条件下的渐近行为, 最后通过数值模拟验证所得理论结果.

2 正解的全局存在唯一性与有界性

定理 1 对任意给定的初值 $(S_0, I_0) \in \mathbb{R}_+^2$, 随机模型(2)存在唯一解 $(S(t), I(t)) (t \geq 0)$, 且该解以概率 1 位于 $\mathbb{R}_+^2$ 中, 即 $(S(t), I(t)) \in \mathbb{R}_+^2 (t \geq 0)$, a. s.

证明 因为随机模型(2)满足局部 Lipschitz 条件, 所以对任意给定初值 $(S_0, I_0) \in \mathbb{R}_+^2$, 存在唯一的局部解 $(S(t), I(t)) \in \mathbb{R}_+^2, t \in [0, \tau_e)$, 其中 τ_e 为爆破时间^[16]. 要证明解的全局存在性, 只需说明 $\tau_e = \infty$, a. s.

设正数 η_0 使得 $S_0 > \eta_0$ 且 $I_0 > \eta_0$, 则对任意的 $\eta \leq \eta_0$, 定义停时

$$\tau_\eta = \inf\{t \in [0, \tau_e) : S(t) \leq \eta \text{ 或 } I(t) \leq \eta\}$$

约定 $\inf \emptyset = \infty$, 其中 $\emptyset$ 表示空集. 记 $\tau_0 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \tau_\eta$, 则 $\tau_0 \leq \tau_e$. 因此要证 $\tau_e = \infty$, 只需要证明 $\tau_0 = \infty$. 否则, 存在 $T > 0$ 和 $\delta \in (0, 1)$, 使得 $P\{\tau_0 \leq T\} > \delta$ 成立, 即存在 $\eta_1 \leq \eta_0$, 使得当 $\eta \leq \eta_1$ 时有 $P\{\tau_\eta \leq T\} > \delta$ 成立.

另外, 由模型(2)可得

$$d(S + I) = [\Lambda - \mu(S + I) - \epsilon I]dt \leq [\Lambda - \mu(S + I)]dt$$

设 $X(t)$ 是如下方程的解

$$\begin{cases} dX(t) = (\Lambda - \mu X(t))dt \\ X_0 = S_0 + I_0 \end{cases}$$

由比较定理得

$$S(t) + I(t) \leq X(t) \leq$$

$$\max \left\{ S_0 + I_0, \frac{\Lambda}{\mu} \right\} \triangleq C, t \in [0, \tau_e) \quad (3)$$

定义函数

$$V(S, I) = -\ln \frac{S}{C} - \ln \frac{I}{C}$$

则 V 显然正定. 由伊藤公式得

$$dV = LVdt + \alpha(I - S)dB$$

其中,

$$LV = -\frac{\Lambda}{S} + \beta I - \frac{\gamma I}{S} - \beta S + \gamma + 2\mu + \epsilon + \frac{\alpha^2}{2}(S^2 + I^2)$$

结合式(3)可知

$$LV \leq \beta C + 2\mu + \gamma + \epsilon + C^2 \alpha^2 \triangleq K$$

因此

$$dV \leq Kdt + \alpha(I - S)dB$$

对上式两端从 0 到 $\tau_\eta \wedge T$ 积分, 并取期望得

$$EV(S(\tau_\eta \wedge T), I(\tau_\eta \wedge T)) \leq V(S_0, I_0) +$$

$$KE(\tau_\eta \wedge T) \leq V(S_0, I_0) + KT$$

令 $\Omega_\eta = \{\tau_\eta \leq T\}$, 则 $P(\Omega_\eta) > \delta$ 成立. 对任意的 $\omega \in \Omega_\eta$, 根据停时的定义可得 $S(\tau_\eta, \omega)$ 与 $I(\tau_\eta, \omega)$ 至少有一个等于 η , 于是

$$V(S(\tau_\eta, \omega), I(\tau_\eta, \omega)) \geq -\ln \frac{\eta}{C}$$

所以

$$\begin{aligned} V(S_0, I_0) + KT &\geq EV(S(\tau_\eta \wedge T), \\ I(\tau_\eta \wedge T)) &\geq E[I_{\Omega_\eta} V(S(\tau_\eta \wedge T), \\ I(\tau_\eta \wedge T))] &= E[I_{\Omega_\eta} V(S(\tau_\eta, \omega), \\ I(\tau_\eta, \omega))] &= P(\Omega_\eta) V(S(\tau_\eta, \omega), \\ I(\tau_\eta, \omega)) &> -\delta \ln \frac{\eta}{C} \end{aligned}$$

式中: I_{Ω_η} 为 Ω_η 的示性函数. 令 $\eta \rightarrow 0$, 得到如下矛盾

$$\infty > V(S_0, I_0) + KT = \infty$$

因此, $\tau_0 = \infty$, a. s.

由式(3)的证明过程可得如下结论:

定理 2 对任意给定的初值 $(S_0, I_0) \in \mathbb{R}_+^2$, 随机模型(2)的解 $(S(t), I(t))$ 满足

$$S(t) + I(t) \leq \max \left\{ S_0 + I_0, \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

即随机模型(2)的解是有界的.

3 随机模型(2)的动力学行为

定理 3 当 $R_0 \leq 1$ 时, 随机模型(2)的无病平衡点 E^0 随机渐近稳定.

证明 通过变换 $y_1 = S - S^0$, $y_2 = I$, 模型(2)

转化为

$$\begin{cases} dy_1 = [-\mu y_1 + (\gamma - \beta S^0) y_2 - \beta y_1 y_2] dt - \\ \quad \alpha(y_1 + S^0) y_2 dB \\ dy_2 = [(\beta S^0 - (\gamma + \mu + \epsilon)) y_2 + \beta y_1 y_2] dt + \\ \quad \alpha(y_1 + S^0) y_2 dB \end{cases} \quad (4)$$

为证明模型(2)的无病平衡点随机渐近稳定, 只需说明模型(4)零平衡点随机渐近稳定.

定义函数

$$V(y_1, y_2) = (y_1 + y_2)^2 + \frac{4\mu + 2\epsilon}{\beta} y_2$$

则 V 的正定性显然. 由伊藤公式得

$$dV = LVdt + \alpha(y_1 + S^0) y_2 dB$$

其中,

$$LV = 2(y_1 + y_2)[- \mu(y_1 + y_2) - \epsilon y_2] + \frac{4\mu + 2\epsilon}{\beta} [(\beta S^0 - (\gamma + \mu + \epsilon)) y_2 + \beta y_1 y_2]$$

因为

$$R_0 = \frac{\Lambda \beta}{\mu(\gamma + \mu + \epsilon)} \leq 1$$

所以

$$LV \leq -2\mu y_1^2 - 2(\mu + \epsilon) y_2^2$$

因此, 模型(4)的零平衡点随机渐近稳定, 即随机模型(2)的无病平衡点 E^0 随机渐近稳定.

定理 4 当 $R_0 > 1$ 时, 随机模型(2)的解 $(S(t), I(t))$ 满足

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [(S - S^*)^2 + (I - I^*)^2] ds \leq \frac{(2\mu + \epsilon) I^* C^2}{2\mu \beta} a^2, \text{ a. s.}$$

其中 (S^*, I^*) 是确定性模型(1)的地方病平衡点.

证明 定义如下函数

$$V(S, I) = (S + I - S^* - I^*)^2 + \frac{2(2\mu + \epsilon)}{\beta} (I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*})$$

则 V 的正定性显然. 由伊藤公式得

$$dV = LVdt + \frac{2(2\mu + \epsilon)\alpha}{\beta} (I - I^*) S dB \quad (5)$$

其中,

$$LV = 2(S + I - S^* - I^*)(dS + dI) + (dS + dI)^2 + \frac{2(2\mu + \epsilon)}{\beta} \cdot$$

$$\left[(I - I^*) \frac{1}{I} dI + \frac{I^*}{2I^2} (dI)^2 \right]$$

注意到当 $R_0 > 1$ 时, 模型(1)地方病平衡点 (S^*, I^*) 满足 $\Lambda - \mu(S^* + I^*) - \epsilon I^* = 0$, 因此

$$LV = -2\mu(S - S^*)^2 - 2(\mu + \epsilon)(I - I^*)^2 +$$

$$\frac{(2\mu + \varepsilon)}{\beta} I^* S^2 \alpha^2 \leq -2\mu(S - S^*)^2 - 2(\mu + \varepsilon)(I - I^*)^2 + \frac{(2\mu + \varepsilon)I^* C^2}{\beta} \alpha^2$$

对式(5)两端从 0 到 t 积分可得

$$V(t) - V(0) = \int_0^t LV ds + M(t) \quad (6)$$

其中,

$$M(t) = \frac{2(2\mu + \varepsilon)\alpha}{\beta} \int_0^t (I - I^*) S dB$$

显然 $M(t)$ 为连续的局部鞅, $M(0) = 0$ 且

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{[M, M]_t}{t} \leq \frac{4(2\mu + \varepsilon)^2 \alpha^2}{\beta^2} \cdot C^2 (C + I^*)^2 < \infty$$

根据大数定律^[16]可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = 0, \text{ a.s.}$$

结合式(6)得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t LV ds \geq 0, \text{ a.s.}$$

即

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [(S - S^*)^2 + (I - I^*)^2] ds \leq \frac{(2\mu + \varepsilon)I^* C^2}{2\mu\beta} \alpha^2, \text{ a.s.}$$

定理 5 当 $R_0 > 1$ 且 $\alpha^2 < \min \left\{ \frac{2\mu\beta(S^*)^2}{(2\mu + \varepsilon)I^* C^2}, \frac{2\mu\beta I^*}{(2\mu + \varepsilon)C^2} \right\}$ 时, 随机模型(2)平均持续, 即模型(2)

的解 $(S(t), I(t))$ 满足

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t S(s) ds > 0$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(s) ds > 0, \text{ a.s.}$$

证明 因为 $R_0 > 1$, 由定理 4 可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (S - S^*)^2 dt \leq \frac{(2\mu + \varepsilon)I^* C^2}{2\mu\beta} \alpha^2, \text{ a.s.}$$

注意到

$$2(S^*)^2 - 2S^* S = 2S^* (S^* - S) \leq (S^*)^2 + (S - S^*)^2$$

即

$$S \geq \frac{S^*}{2} - \frac{(S - S^*)^2}{2S^*}$$

因此

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t S(s) ds \geq \frac{S^*}{2} -$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{(S - S^*)^2}{2S^*} ds \geq$$

$$\frac{S^*}{2} - \frac{(2\mu + \varepsilon)I^* C^2}{4\mu\beta S^*} \alpha^2 > 0, \text{ a.s.}$$

同理可得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(s) ds \geq \frac{I^*}{2} -$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{(I - I^*)^2}{2I^*} ds \geq$$

$$\frac{I^*}{2} - \frac{(2\mu + \varepsilon)C^2}{4\mu\beta} \alpha^2 > 0, \text{ a.s.}$$

定理 2.4 随机模型(2)的解 $(S(t), I(t))$ 满足

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} \leq \frac{\beta^2}{2\alpha^2} - (\gamma + \mu + \varepsilon), \text{ a.s.}$$

即当噪声强度足够大使得 $\alpha^2 > \frac{\beta^2}{2(\gamma + \mu + \varepsilon)}$ 时, 疾病将会消失.

证明 定义函数 $V(I) = \ln I$, 由伊藤公式得

$$dV = \frac{1}{I} dI - \frac{1}{2I^2} (dI)^2 = \left[-\frac{\alpha^2}{2} S^2 + \beta S - (\gamma + \mu + \varepsilon) \right] dt + \alpha S dB \leq$$

$$\left[\frac{\beta^2}{2\alpha^2} - (\gamma + \mu + \varepsilon) \right] dt + \alpha S dB$$

对上式从 0 到 t 积分得

$$\ln I(t) - \ln I(0) \leq \left[\frac{\beta^2}{2\alpha^2} - (\gamma + \mu + \varepsilon) \right] t + \alpha SB(t)$$

注意到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B(t)}{t} = 0, \text{ a.s.}$$

所以

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} \leq \frac{\beta^2}{2\alpha^2} - (\gamma + \mu + \varepsilon), \text{ a.s.}$$

4 数值模拟

本文利用计算机模拟来说明所得理论结果的正确性, 模拟过程采用 Euler-Maruyama 方法. 固定初值 $(S_0, I_0) = (0.7, 0.3)$ 和参数 $\Lambda = 0.2, \mu = 0.2, \gamma = 0.1, \varepsilon = 0.2$, 通过变化其他参数值得到仿真结果. 其中, 蓝色虚线和绿色实线分别表示确定性模型(1)和随机模型(2)的解曲线.

首先, 取参数 $\beta = 0.2, \alpha = 0.5$, 模拟结果如图 1 所示. 此时 $R_0 = 0.4 \leq 1$, 满足定理 3 的条件. 从图 1 中可以观察到随机模型(2)的无病平衡点 $E^0 = (1, 0)$ 随机渐近稳定, 验证了定理 3 的结论.

再取参数 $\beta = 0.6$ 及两个不同的噪声强度值:

(a) $\alpha = 0.20$, (b) $\alpha = 0.04$, 模拟结果如图 2 所示. 此时 $R_0 = 1.2 > 1$, 满足定理 4 的条件. 从图 2 的(a)组或(b)组均可以观察到随机模型(2)的解围绕确定性模型(1)的地方病平衡点 $E^* = (0.83, 0.083)$ 振荡, 并且(b)组的振荡幅度明显小于(a)组. 这与定理 4 的结论一致. 另外图 2 也说明了随机模型(2)的持续性, 即验证了定理 5 的结论.

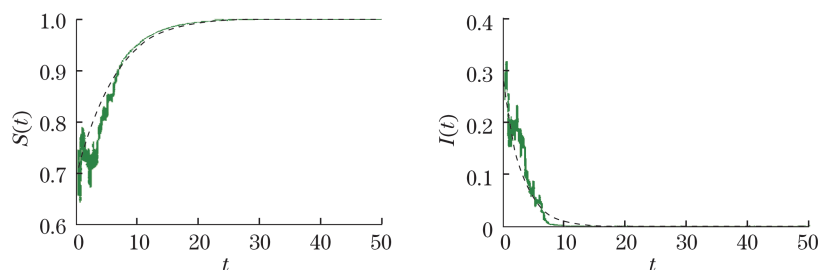


图 1 随机模型(2)与确定性模型(1)的解曲线 ($R_0 \leq 1$)

Fig.1 Solution curves of stochastic model (2) and deterministic model (1) ($R_0 \leq 1$)

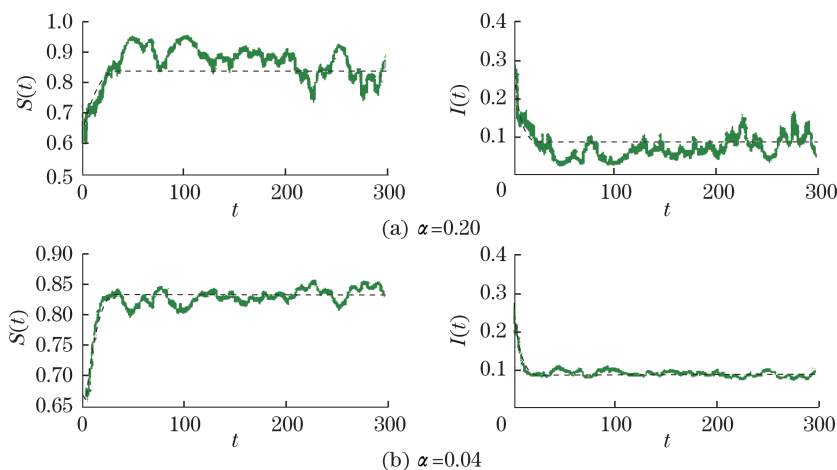


图 2 随机模型(2)与确定性模型(1)的解曲线 ($R_0 > 1$)

Fig.2 Solution curves of stochastic model (2) and deterministic model (1) ($R_0 > 1$)

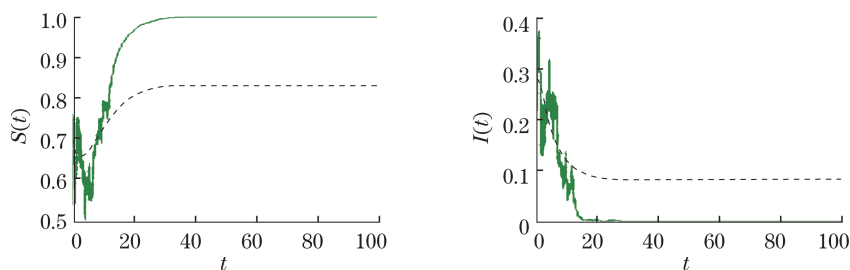


图 3 噪声强度较大时随机模型(2)与确定性模型(1)的解曲线

Fig.3 Solution curves of stochastic model (2) and deterministic model (1) with the large noise intensity

5 总结与讨论

考虑随机环境中的一类染病者康复后不会产生

最后取参数 $\beta = 0.6, \alpha = 0.61$, 模拟结果如图 3 所示. 此时 $\alpha^2 = \frac{\beta^2}{2(\gamma + \mu + \epsilon)} = 0.37 > 0.36$, 满足定理 6 的条件. 从图 3 中可以观察到确定性模型(1)的解收敛于地方病平衡点 $E^* = (0.83, 0.083)$, 而随机模型(2)的解收敛于无病平衡点 $E^0 = (1, 0)$, 这与定理 6 的结论吻合.

免疫力的流行病, 并且疾病在传播过程中接触率会受到噪声的影响, 针对此类流行病建立了随机 SIS 模型并分析了模型的动力学行为.

首先利用停时理论, 验证了随机模型正解的全

局存在唯一性和有界性. 当 $R_0 \leq 1$ 时, 通过 Lyapunov 分析方法证明了随机模型无病平衡点的渐近稳定性; 当 $R_0 > 1$ 时, 利用随机过程的相关性质得到了随机模型的解将围绕确定性模型的正平衡点振荡, 并且振荡幅度与噪声强度正相关的结论. 值得注意的是, 定理 5 和定理 6 说明了当 $R_0 > 1$ 并且噪声强度较小时, 随机模型是平均持续的, 而强度较大的噪声会促使疾病灭绝.

相对确定性模型, 本文考虑的随机 SIS 模型得到的结论更加符合客观实际, 更有助于深入了解流行病的传播规律. 另一方面, 由于流行病在现实环境中的传播过程十分复杂, 并且会受到许多因素的影响, 所以下一步的研究工作是构建其他形式的随机流行病模型, 并研究其动力学行为.

参考文献:

- [1] 陆征一, 周义仓. 生物数学进展[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [2] Gumel A B, McCluskey C C, van den Driessche P. Mathematical study of a staged-progression HIV model with imperfect vaccine[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2006, 68(8): 2105 - 2128.
- [3] 周艳丽, 张卫国. 一类具有非单调传染率的 SEIRS 时滞传染病模型的全局稳定性[J]. 上海理工大学学报, 2014, 36(2): 103 - 109.
- [4] Shan C H, Zhu H P. Bifurcations and complex dynamics of an SIR model with the impact of the number of hospital beds[J]. Journal of Differential Equations, 2014, 257(5): 1662 - 1688.
- [5] Kermack W O, McKendrick A G. A contribution to the mathematical theory of epidemics[J]. Proceedings of the Royal Society of London, 1927, 115 (772): 700 - 721.
- [6] Liu X Z, Stechlinski P. SIS models with switching and pulse control[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 232: 727 - 742.
- [7] 翟院青, 原三领, 袁艳燕. 一类具有变人口规模的含时滞 SIS 流行病模型的全局稳定性[J]. 上海理工大学学报, 2012, 34(3): 267 - 271.
- [8] 袁艳燕, 原三领, 翟院青. 一类具有变人口规模的含时滞 SIS 流行病模型的稳定性分析[J]. 上海理工大学学报, 2012, 34(1): 27 - 31.
- [9] Busenberg S, Cooke K L. The effect of integral conditions in certain equations modelling epidemics and population growth[J]. Journal of Mathematical Biology, 1980, 10(1): 13 - 32.
- [10] van den Driessche P, Watmough J. A simple SIS epidemic model with a backward bifurcation[J]. Journal of Mathematical Biology, 2000, 40 (6): 525 - 540.
- [11] Zhou Y L, Zhang W G, Yuan S L. Survival and stationary distribution of a SIR epidemic model with stochastic perturbations[J]. Applied Mathematics And Computation, 2014, 244: 118 - 131.
- [12] 许超群, 原三领, 张同华. 一类随机 SIS 流行病模型全局正解的渐近行为[J]. 工程数学学报, 2013, 30(6): 804 - 814.
- [13] 徐丽筱, 张天四, 黄晓鑫. 一类具有饱和发生率的随机 SIRS 模型全局正解的渐近行为[J]. 上海理工大学学报, 2013, 35(6): 541 - 546.
- [14] Jiang D Q, Yu J J, Ji C Y, et al. Asymptotic behavior of global positive solution to a stochastic SIR model[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2011, 54 (1/2): 221 - 232.
- [15] Zhao Y N, Jiang D Q. The threshold of a stochastic SIRS epidemic model with saturated incidence[J]. Applied Mathematics Letters, 2014, 34: 90 - 93.
- [16] Mao X R. Stochastic differential equations and applications [M]. Chichester: Horwood Publishing, 2007.

(编辑: 董 伟)