

Wenger 图的控制数

刘 凌

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: Wenger 图 $H_m(q)$ 是定义在有限域 F_q 上的 q -正则二部图. 根据二部图 $G = (X \cup Y, E)$ 的控制数为 Y 在 X 中的控制数与 X 在 Y 中的控制数之和, 采用矩阵运算的方法在 $H_m(q)$ 中通过构造含点数最少的控制集, 说明了这两个控制数应该相等, 从而确定了 Wenger 图的控制数.

关键词: 二部图; Wenger 图; 控制集; 控制数

中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

Domination Number of Wenger Graph

LIU Ling

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Wenger's graph $H_m(q)$ is a q -regular bipartite graph in the field F_q . Considering that the domination number of a bipartite graph $G = (X \cup Y, E)$ is the sum of Y 's domination number in X and X 's domination number in Y , by using the matrix operation, the domination set of $H_m(q)$ with minimum cardinality was constructed. It is proved that the two domination numbers are equal, and then the domination number of $H_m(q)$ was determined.

Key words: bipartite graph; Wenger graph; domination set; domination number

1 问题的提出

设 q 为一个素数幂, F_q^m 为有限域 F_q 上的 m -维向量空间. Wenger 图 $H_m(q)$ 是定义在 F_q^m 上的 $2q^m$ 阶 q -正则二部图, 它是 Wenger 为了确定偶圈的 Turán 数的精确阶而在文献[1]中定义的图. 在文献[1]中, 作者证明了 $H_m(q)$ 中不含长度为 4, 6, 10 的圈. 文献[2]证明了 $H_m(q)$ 中含有长为 $2l$ 的

圈, 其中, $l \neq 5, 4 \leq l \leq 2ch(F_q)$, $ch(F_q)$ 表示有限域 F_q 的特征. 文献[3]证明了 $H_1(q)$ 含有长度为 $2k$ (其中, $k = 3, 4, \dots, q^2 - q + 1$) 的圈; 若 $n \geq 2$, $q \geq 5$, 且 $ch(F_q) \geq 3$, 则 $H_n(q)$ 中含有长度为 $2k$ (其中, $k = 4, 6, 7, \dots, 4q + 1, ch^2(F_q) - ch(F_q)$) 的圈; 若 $n \geq 2, q \geq 3$, 则 $H_n(q)$ 中含有长度至少为 $\lfloor 2.37(q-4)^{1.58} \rfloor$ (其中, $q \rightarrow \infty$) 的圈.

这些结论对于研究极值图论中偶圈的 Turán 数的精确阶都有十分重要的意义^[4-6]. 在文献[7]

收稿日期: 2014-10-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11101284, 11201303, 11301340); 上海市自然科学基金资助项目(12ZR1420300); 沪江基金资助项目(B14005)

第一作者: 刘 凌(1976-), 女, 讲师. 研究方向: 代数学. E-mail: liulingmath@163.com

中, Viglione 确定了 $H_m(q)$ 的直径(图中任意两点间距离的最大值). 受此启发, 本文将研究 $H_m(q)$ 的另一个结构参数——控制数.

首先给出 Wenger 图 $H_m(q)$ 和控制数的定义.

定义 1^[1] 设 q 为一个素数幂, X 与 Y 都是有限域 F_q 上的 m -维向量空间 F_q^m , Wenger 图定义为二部图 $H_m(q) = (V, E)$, 其中, $V = X \cup Y$, 对任

意 $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \in X, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in Y, AB \in E$, 当且仅当

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{bmatrix} + b_m \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-1} \end{bmatrix}$$

定义 2^[8-10] 设 $G = (V, E)$ 为一个图, $D \subseteq V$, 若对每一个 $v \in V \setminus D$, 存在 $u \in D$, 使 $uv \in E$, 则称 D 为图 G 的一个控制集, G 的控制数

$$\gamma(G) = \min \{ |D| \mid D \text{ 为图 } G \text{ 的一个控制集} \}$$

不难看出, 若 D 是 G 的控制集, 则有 $D \cup N_G(D) = V$, 其中, $N_G(D) = \bigcup_{u \in D} \{v \mid uv \in E\}$. 若图 G 没有孤立点, 则 $\gamma(G)$ 不超过 G 中所含顶点数的一半. 对于二部图, 特别给出控制数的定义.

定义 3 设 $G = (X \cup Y, E)$ 为一个二部图, $M \subseteq X$, 若对于每个 $v \in Y$, 存在 $u \in M$, 使 $uv \in E$, 则称 M 为 Y 在 X 中的一个控制集, Y 在 X 中的控制数

$$\xi(Y) = \min \{ |M| \mid M \text{ 为 } Y \text{ 在 } X \text{ 中的控制集} \}$$

同样, 可定义 X 在 Y 中的控制数

$$\eta(X) = \min \{ |N| \mid N \text{ 为 } X \text{ 在 } Y \text{ 中的控制集} \}$$

易见, 二部图 G 的控制数

$$\gamma(G) = \xi(Y) + \eta(X)$$

设 v 是图 G 中的一个点, G 中与点 v 相关联的边的条数称为点 v 的度, 用 $d(v)$ 表示. 下面的命题 1 在文献[1]中已有证明, 为了文章的完整性, 这里给出了它的另一种证明.

命题 1 在 $H_m(q)$ 中, 对任意的 $A \in X, B \in Y$, 都有 A 与 B 的度相等, 都为 q .

证明 由 $H_m(q)$ 图中 AB 相邻的定义, 可知 A 的度必为 q , 又对任意 $B = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T \in Y$, 若 $A = [a_1, a_2, \dots, a_m]^T \in X, A$ 与 B 相连, 则 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 为方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & b_m & & & \\ & 1 & b_m & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

的解, 其系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & b_m & & & \\ & 1 & b_m & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & b_m \end{bmatrix}$$

的秩为 $m-1$, 从而方程组(1)的解空间维数为 1, 故 X 中恰有 q 个点与 B 相连, B 的度也为 q .

2 Wenger 图 $H_m(q)$ 的控制数

通过构造 $H_m(q)$ 的一个控制集, 并证明其是点数最小的控制集, 从而确定 $H_m(q)$ 的控制数.

引理 1 设 $a \in F_q, H_m(q) = (X \cup Y, E)$,

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ a \end{bmatrix} \mid a_1, \dots, a_{m-1} \in F_q \right\} \subseteq X$$

则 M 中任意两个不同的点都没有公共邻点.

$$\text{证明 设 } A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1,m-1} \\ a \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{2,m-1} \\ a \end{bmatrix} \text{ 为 } M$$

中两个不同的点, $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ 为 A_1, A_2 的公共邻点, 则有

$$\begin{bmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{i,m-2} \\ a_{i,m-1} \end{bmatrix} + b_m \begin{bmatrix} a_{i2} \\ \vdots \\ a_{i,m-1} \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{m-2} \\ b_{m-1} \end{bmatrix}, i = 1, 2$$

故有

$$\begin{bmatrix} a_{11} - a_{21} \\ \vdots \\ a_{1,m-2} - a_{2,m-2} \\ a_{1,m-1} - a_{2,m-1} \end{bmatrix} + b_m \begin{bmatrix} a_{12} - a_{22} \\ \vdots \\ a_{1,m-1} - a_{2,m-1} \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

从而 $a_{1,m-1} - a_{2,m-1} = 0, a_{1,m-2} - a_{2,m-2} = 0, \dots$, 依此类推, $a_{11} - a_{21} = 0$, 故 $a_{1j} = a_{2j}, j = 1, 2, \dots, m-1$, 即 $A_1 = A_2$, 矛盾.

命题 2 设 $a \in F_q$, 则 $M = \{[a_1, \dots, a_{m-1}, a]^T \mid$

$a_1, \dots, a_{m-1} \in F_q \subseteq X$ 为 $H_m(q)$ 中 Y 在 X 中的控制集, 并且 Y 在 X 中的控制数为 q^{m-1} .

证明 由命题 1, X 中每一个点的度为 q , M 中共有 q^{m-1} 个点, 每个点的度均为 q . 又由下面的引理 2 可知, M 中不同的 A 点一定与 Y 中不同的 B 点相连, 从而 Y 中所有 q^m 个点与 M 中点相连且没有重复, M 为 Y 在 X 中的控制集, 并且是含有点数最少的控制集, 从而 Y 在 X 中的控制数为 q^{m-1} .

引理 2 设 $b \in F_q$, 则 $N = \{[b_1, \dots, b_{m-1}, b]^T \mid b_1, \dots, b_{m-1} \in F_q\} \subseteq Y$, 则 N 中任意两个不同的点都没有公共邻点.

证明 在 N 中任取两个不同的点

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1,m-1} \\ b \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{2,m-1} \\ b \end{bmatrix}$$

设 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ 为 B_1, B_2 的公共邻点, 则有

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-2} \\ a_{m-1} \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} a_2 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{i,1} \\ \vdots \\ b_{i,m-2} \\ b_{i,m-1} \end{bmatrix}, i = 1, 2$$

$b_{1j} = b_{2j}, j = 1, 2, \dots, m-1$, 即 $B_1 = B_2$, 矛盾.

与命题 2 同理得命题 3.

命题 3 设 $b \in F_q$, 则 $N = \{[b_1, \dots, b_{m-1}, b]^T \mid b_1, \dots, b_{m-1} \in F_q\} \subseteq Y$ 为 $H_m(q)$ 中 X 在 Y 中的控制集, 并且 X 在 Y 中的控制数也为 q^{m-1} .

命题 4 $\gamma(H_m(q)) = 2q^{m-1}$.

证明 由二部图的 $G = (X \cup Y, E)$ 的控制数 $\gamma(G) = \xi(Y) + \eta(X)$ 可知, Wenger 图 $H_m(q)$ 的控制数为 Y 在 X 中的控制数 q^{m-1} 与 X 在 Y 中的控制数 q^{m-1} 之和.

参考文献:

- [1] Wenger R. Extremal graphs with no C_4, C_6 or C_{10} 's. [J]. Journal of Combinational Theory Series B, 1991, 52(1):113-116.
- [2] Shao J Y, He C X, Shan H Y. The existence of even cycles with specific lengths in wenger's graph[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2008, 24(2):281-288.
- [3] Lazebnik F, Thomason A, Wang Y. On some cycles in Wenger Graphs[EB/OL]. [2014-12-25]. http://www.math.udel.edu/~lazebnik/papers/LazebnikThomasonWang2014_Submitted.pdf.
- [4] 周敏, 何常香. 单圈图依次小 Q -特征值排序[J]. 上海理工大学学报, 2013, 35(1):21-26.
- [5] 徐丽珍, 何常香. 双圈图的无符号拉普拉斯特征多项式的系数[J]. 上海理工大学学报, 2014, 36(1):12-14.
- [6] 沈富强, 吴宝丰. 最小 Q -特征值为给定整数的一类图[J]. 上海理工大学学报, 2014, 36(5):425-428.
- [7] Viglione R. On the diameter of wenger graphs[J]. Acta Applicandae Mathematica, 2008, 104(2):173-176.
- [8] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory and its applications[M]. New York:MacMillan Press, 1976.
- [9] 张先迪, 李正良. 图论及其应用[M]. 北京:高等教育出版社, 2005.
- [10] 彭茂. 图的控制集的一些相关问题的研究[D]. 上海:上海交通大学, 2008.

(编辑:石 瑛)