

非线性耦合 Harry-Dym 方程的对称约化

胡 潇, 胡恒春

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 借助符号计算软件 Maple 将 Clarkson-Kruskal 直接法应用于非线性耦合 Harry-Dym 方程中, 运用相应规则得到对称变换并求得非线性耦合 Harry-Dym 方程的相似变量和相似解. 通过选取不同的特殊常数得到非线性耦合 Harry-Dym 方程两种常微分形式的对称约化方程. 利用约化方程构造了非线性耦合 Harry-Dym 方程可能的新严格解.

关键词: 对称约化; Clarkson-Kruskal 直接法; 非线性耦合 Harry-Dym 方程

中图分类号: O 175 **文献标志码:** A

Symmetry Reduction for the Nonlinear Coupled Harry-Dym Equation

HU Xiao, HU Hengchun

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: With the help of symbolic computation software Maple, the Clarkson-Kruskal direct method was developed for the nonlinear coupled Harry-Dym equation, the similarity variables and similarity solutions of the nonlinear coupled Harry-Dym equation were obtained by the symmetry transformation. Two forms of symmetric reduced equation were obtained by selecting different special constants. The exact solutions of the reduction equation were also constructed directly.

Keywords: symmetry reduction; Clarkson-Kruskal direct method; nonlinear coupled Harry-Dym equation

1 问题的提出

众所周知, 孤立子理论是非线性科学的重要组成部分. 一般来说, 孤立子理论的研究对象大多数是

非线性系统, 这些非线性系统可以描述流体力学、等离子物理学、非线性光学及环境科学等领域出现的某些非线性现象. 因此, 对非线性系统的精确求解问题在理论上和应用上都具有重要的研究意义^[1-2]. 近年来, 经过数学家和理论物理学家的不懈努力, 提

收稿日期: 2014-10-24

基金项目: 上海市自然科学基金资助项目(10ZR1420800); 上海市重点学科建设项目(XTKX2012); 国家自然科学基金资助项目(11071164, 11201302)

第一作者: 胡 潇(1991-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 孤立子理论与可积系统. E-mail: huxiaomath@163.com

通信作者: 胡恒春(1976-), 女, 副教授. 研究方向: 孤立子理论与可积系统. E-mail: hhengchun@163.com

出了许多行之有效的构造非线性系统精确解的方法,如反散射方法、贝克隆变换法、 $\tanh$ - $\coth$ 展开方法、广田双线性法、分离变量法、达布变换法及李群方法等.

由于非线性系统不满足解的线性叠加原理,人们很难求出它们所有的精确解.因此,需要寻求一些简单的方法来简化复杂的非线性系统,使之转化为低维的偏微分方程或常微分方程,通过求解低维的偏微分方程或常微分方程,进而得出原来非线性系统的精确解.

本文主要研究非线性耦合 Harry-Dym 方程,简称 cHD 方程,其形式为

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{4} u_{xxx} - \frac{2}{3} uu_x + v_x + pu_x \\ v_t = -u_x v - \frac{1}{2} uv_x + pv_x \end{cases} \quad (1)$$

式中, p 为常数.

cHD 模型在凝聚态物理学、流体动力学及光学等领域有着广泛的应用.近年来,许多学者利用多种方法研究了 cHD 模型的可积性和精确解问题. Xu 等^[3]、曹策问等^[4]用 Lax 对非线性化方法分别证明了在位势与特征函数的 Bargmann 约束下方程(1)为 Liouville, Neumann 完全可积的;之后, Chen 等^[5-6]在此基础上又结合 Moser 约束方法、一般 r -矩阵理论,由 cHD 孤子族导出了一些新的 Neumann 型有限维可积系统,并研究了 Abel-Jacobi 黎曼曲面坐标下 cHD 孤子族的层次结构; Yang 等^[7]通过应用两种循环向量代数 $\tilde{\mathbf{G}}_3, \tilde{\mathbf{G}}_6$, 得到了 cHD 方程族双层形式的 Hamilton 结构; Marciniak 等^[8]从古典有限维 Stäckel 系统中构造出 cHD 方程族的层次结构,并得到一些多项式形式的隐式解;张颖等^[9]应用点李变换,引入非线性算子的 Fréchet 导数讨论了方程(1)的对称性质,将方程(1)转化为三类常微分方程组.本文将采用 Clarkson-Kruskal 直接法对方程(1)进行相似约化,并给出其特殊常数选取后的约化方程,得到了新的相似解,且此约化形式不能通过经典李群变换获得.

2 方法简介

人们对偏微分方程的对称性研究主要包括寻找方程所允许的对称群、对称约化和群不变解^[10]. 寻找偏微分方程对称约化的方法有很多,其中主要有以下 3 种方法: a. Lie 的经典无穷小变换法^[11];

b. Bluman 和 Cole 的非经典无穷小变换法^[12];

c. Clarkson 和 Kruskal 提出的 CK 直接法^[13-14].

1989 年 Clarkson 和 Kruskal 首次提出的 CK 直接法是用来推导非线性偏微分方程的相似约化的直接方法,这是一种不涉及群论的直接约化方法. Clarkson 和 Kruskal 用这种方法最先求解的是 Boussinesq 方程^[13],得出很多不同于用经典无穷小变换和非经典无穷小变换方法求出的相似解. 1990 年 Lou^[14]完善了这种方法,并且推广到 $(2+1)$ 维 KP 方程中,获得了一些相似解. 之后,这种方法被推广应用于方程组等其他一大批非线性方程^[15-16]. 2000 年 Lou 提出了条件约化的概念^[17],并用直接约化法的思想获得了 $(2+1)$ 维 KdV 方程的 6 种新的条件相似约化,该条件相似约化不能由现有非古典理论推得.

对于非线性偏微分方程

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (2)$$

直接寻找偏微分方程如下形式的相似解:

$$u(x, t) = U(x, t, \omega[\xi(x, t)]) \quad (3)$$

式中,函数 U, ξ 待定.

这是最一般的相似约化的形式. 将式(3)代入式(2)中,要求结果是关于 ω 的低维偏微分方程或常微分方程,附加条件与 U, ξ 及它们的导数有关,而后能够进一步解出 U, ξ 的具体形式.

对于一般低维对称性约化,可以选取

$$u(x, t) = \alpha(x, t) + \beta(x, t)\omega(\xi(x, t)) \quad (4)$$

以耦合非线性 Harry-Dym 方程为例,将 CK 直接法的步骤归纳如下:

a. 设方程(1)具有对称变换

$$\begin{cases} u(x, t) = \alpha_1 + \beta_1 G(\xi) \\ v(x, t) = \alpha_2 + \beta_2 Q(\xi) \end{cases} \quad (5)$$

式中, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \xi$ 是关于 x, t 的待定函数且 G, Q 是关于 ξ 的偏微分方程;

b. 将对称变换方程(5)代入方程(1),整理化简找出规范系数,通常以最高阶导数的系数作为规范系数;

c. 令各项导数的系数与规范系数分别成比例,应用相应规则求出待定函数;

d. 根据步骤 c 求出的各个变量得到对称变换,代入原方程(1),确定约化方程.

在步骤 c 中,提到的相应的规则为:

规则 1 若 $\alpha_1(x, t)$ 满足形式 $\alpha_1 = \alpha_{10}(x, t) + \beta_1(x, t)\Omega(\xi(x, t))$, 则可取 $\Omega(\xi(x, t)) = 0$.

规则 2 若 $\alpha_2(x, t)$ 满足形式 $\alpha_2 = \alpha_{20}(x, t) +$

$\beta_2(x, t)\Omega(\xi(x, t))$, 则可取 $\Omega(\xi(x, t)) = 0$.

规则 3 若 $\beta_1(x, t)$ 满足形式 $\beta_1 = \beta_{10}(x, t) \cdot \Omega(\xi(x, t))$, 则可取 $\Omega(\xi(x, t)) = 1$.

规则 4 若 $\beta_2(x, t)$ 满足形式 $\beta_2 = \beta_{20}(x, t) \cdot \Omega(\xi(x, t))$, 则可取 $\Omega(\xi(x, t)) = 1$.

规则 5 如果 $\xi(x, t)$ 由 $\Omega(\xi) = \xi_0(x, t)$ 定义得出, 其中, $\Omega(\xi)$ 是任意可逆函数, 则可取 $\Omega(\xi) = \xi_0$.

利用上述 5 个规则来确定未知函数 $\alpha_1(x, t)$, $\alpha_2(x, t)$, $\beta_1(x, t)$, $\beta_2(x, t)$, 以及 G, Q 满足的约化方程, 进而求解约化方程, 得到耦合 Harry-Dym 方程的对称约化.

3 非线性耦合 Harry-Dym 方程的相似约化

将方程(5)代入方程(1)中, 得到

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4}\beta_1\xi_x^3G''' - \left(\frac{3}{4}\beta_{1x}\xi_x^2 + \frac{3}{4}\beta_1\xi_x\xi_{xx}\right)G'' + \\ & \frac{2}{3}\beta_1^2\xi_xG'G + \left(\beta_1\xi_t - \frac{3}{4}\beta_{1xx}\xi_x - \frac{3}{4}\beta_{1x}\xi_{xx} - \right. \\ & \left. \frac{1}{4}\beta_1\xi_{xxx} + \frac{2}{3}\alpha_1\beta_1\xi_x - p\beta_1\xi_x\right)G' + \left(\beta_{1t} - \right. \\ & \left. \frac{1}{4}\beta_{1xxx} + \frac{2}{3}\alpha_1\beta_{1x} + \frac{2}{3}\beta_1\alpha_{1x} - p\beta_{1x}\right)G + \\ & \frac{2}{3}\beta_1\beta_{1x}G^2 - \beta_2\xi_xQ' + \beta_{2x}Q + \alpha_{1t} - \\ & \frac{1}{4}\alpha_{1xxx} + \frac{2}{3}\alpha_1\alpha_{1x} - \alpha_{2x} - p\alpha_{1x} = 0 \quad (6) \\ & \frac{1}{2}\beta_1\beta_2\xi_xQ'G + \left(\beta_2\xi_t + \frac{1}{2}\alpha_1\beta_2\xi_x - p\beta_2\xi_x\right)Q' + \\ & \left(\beta_{2t} + \alpha_{1x}\beta_2 + \frac{1}{2}\alpha_1\beta_{2x} - p\beta_{2x}\right)Q + \beta_1\xi_x\beta_2G'Q + \\ & \left(\beta_{1x}\beta_2 + \frac{1}{2}\beta_1\beta_{2x}\right)GQ + \left(\beta_{1x}\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_1\alpha_{2x}\right)G + \\ & \beta_1\xi_x\alpha_2G' + \alpha_{2t} + \alpha_{1x}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_{2x} - p\alpha_{2x} = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

要求方程(6)和方程(7)仅仅是有关 G, Q 以及它们各阶导数的常微分方程. 在方程(6)中用 G'' 的系数作为归一化系数, 能够得到

$$\begin{aligned} & -\frac{3}{4}\beta_{1x}\xi_x^2 - \frac{3}{4}\beta_1\xi_x\xi_{xx} = -\frac{1}{4}\beta_1\xi_x^3\Gamma_1 \\ & \frac{2}{3}\beta_1^2\xi_x = -\frac{1}{4}\beta_1\xi_x^3\Gamma_2 \\ & \beta_1\xi_t - \frac{3}{4}\beta_{1xx}\xi_x - \frac{3}{4}\beta_{1x}\xi_{xx} - \frac{1}{4}\beta_1\xi_{xxx} + \\ & \frac{2}{3}\alpha_1\beta_1\xi_x - p\beta_1\xi_x = -\frac{1}{4}\beta_1\xi_x^3\Gamma_3 \end{aligned}$$

$$\frac{2}{3}\beta_1\beta_{1x} = -\frac{1}{4}\beta_1\xi_x^3\Gamma_4$$

$$\beta_{1t} - \frac{1}{4}\beta_{1xxx} + \frac{2}{3}\alpha_1\beta_{1x} + \frac{2}{3}\beta_1\alpha_{1x} -$$

$$p\beta_{1x} = -\frac{1}{4}\beta_1\xi_x^3\Gamma_5$$

$$- \beta_2\xi_x = -\frac{1}{4}\beta_1\xi_x^3\Gamma_6$$

$$\beta_{2x} = -\frac{1}{4}\beta_1\xi_x^3\Gamma_7$$

$$\alpha_{1t} - \frac{1}{4}\alpha_{1xxx} + \frac{2}{3}\alpha_1\alpha_{1x} -$$

$$\alpha_{2x} - p\alpha_{1x} = -\frac{1}{4}\beta_1\xi_x^3\Gamma_8$$

式中, $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_8$ 都是仅仅与 ξ 有关的待定函数.

在方程(7)中选择 $Q'G$ 作为归一化系数, 可得

$$\beta_2\xi_t + \frac{1}{2}\alpha_1\beta_2\xi_x - p\beta_2\xi_x = \frac{1}{2}\beta_1\beta_2\xi_x\Omega_1$$

$$\beta_{2t} + \alpha_{1x}\beta_2 + \frac{1}{2}\alpha_1\beta_{2x} - p\beta_{2x} = \frac{1}{2}\beta_1\beta_2\xi_x\Omega_2$$

$$\beta_1\xi_x\beta_2 = \frac{1}{2}\beta_1\beta_2\xi_x\Omega_3$$

$$\beta_{1x}\beta_2 + \frac{1}{2}\beta_1\beta_{2x} = \frac{1}{2}\beta_1\beta_2\xi_x\Omega_4$$

$$\beta_{1x}\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_1\alpha_{2x} = \frac{1}{2}\beta_1\beta_2\xi_x\Omega_5$$

$$\beta_1\xi_x\alpha_2 = \frac{1}{2}\beta_1\beta_2\xi_x\Omega_6$$

$$\alpha_{2t} + \alpha_{1x}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_{2x} - p\alpha_{2x} = \frac{1}{2}\beta_1\beta_2\xi_x\Omega_7$$

式中, $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_7$ 都是仅仅与 ξ 有关的待定函数.

现考虑 ξ_x 的两种情况.

a. 当 $\xi_x = 0$ 时, 由上述规则 5 可知, $\xi = t$, 进而 $G(\xi), Q(\xi)$ 仅仅是关于 t 的函数, 得到的约化方程仅仅是一阶常微分方程. 因此, 只考虑 $\xi_x \neq 0$ 的情况.

b. 当 $\xi_x \neq 0$ 时, 在方程(6)中由 G'' 和 $G'G$ 前面的系数可得

$$\frac{2}{3}\beta_1^2\xi_x = -\frac{1}{4}\beta_1\xi_x^3\Gamma_2 \quad (8)$$

对方程(8)利用上述规则 3, 可知

$$\beta_1 = \xi_x^2$$

将 $\beta_1 = \xi_x^2$ 代入方程

$$\frac{2}{3}\beta_1\beta_{1x} = -\frac{1}{4}\beta_1\xi_x^3\Gamma_4$$

得到

$$\frac{\xi_{xxx}}{\xi_x} = -\frac{3}{16}\Gamma_4 \xi_x$$

利用上述规则 5, 可知

$$\Omega(\xi) = \int \exp\left(\frac{3}{16}\int \Gamma_4 d\xi\right) d\xi = \theta(t)x + \sigma(t)$$

因此

$$\xi = \theta x + \sigma \quad (9)$$

很显然

$$\beta_1 = \theta^2 \quad (10)$$

将 $\beta_1 = \theta^2, \xi = \theta x + \sigma$ 代入方程

$$-\beta_2 \xi_x = -\frac{1}{4}\beta_1 \xi_x^3 \Gamma_6$$

并利用上述规则 4, 可得

$$\beta_2 = \theta^4 \quad (11)$$

继续利用上述规则 1 和规则 2, 很容易得到

$$\alpha_1 = 2p - 2\frac{\theta_t x + \sigma_t}{\theta}, \alpha_2 = 0 \quad (12)$$

将式(9)~(12)代入方程

$$\beta_1 \xi_t - \frac{3}{4}\beta_{1xx} \xi_x - \frac{3}{4}\beta_{1x} \xi_{xx} - \frac{1}{4}\beta_1 \xi_{xxx} +$$

$$\frac{2}{3}\alpha_1 \beta_1 \xi_x - p\beta_1 \xi_x = -\frac{1}{4}\beta_1 \xi_x^3 \Gamma_3$$

可得

$$x \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\sigma}{dt} - p\theta = \frac{3}{4}\theta^3 \Gamma_3 \quad (13)$$

因为, $\xi = \theta x + \sigma$, 方程(13)左边是关于 x 的线性函数, 因此, Γ_3 具有如下形式:

$$\Gamma_3 = \bar{A}\xi + \bar{B}$$

式中, $\bar{A}, \bar{B}$ 都是常数.

因此, 有

$$\frac{3}{4}\theta^3 (\bar{A}(x\theta + \sigma) + \bar{B}) = x \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\sigma}{dt} - p\theta$$

通过比较有关 x 的系数, 可知

$$\frac{d\theta}{dt} = A\theta^4 \quad (14)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \theta^3 (A\sigma + B) + p\theta \quad (15)$$

式中: $A = \frac{3}{4}\bar{A}; B = \frac{3}{4}\bar{B}; A, B$ 都是常数.

因此, 非线性耦合 Harry-Dym 方程的对称约化为

$$u = \theta^2 G(\xi), v = \theta^4 Q(\xi) \quad (16)$$

将方程(14)~(16)代入方程(1)中, 可得

$$\begin{cases} G''' - 4\left(A\xi + B + \frac{2}{3}G\right)G' + 4Q' - 8AG = 0 \\ \left(A\xi + B + \frac{1}{2}G\right)Q' + (4A + G')Q = 0 \end{cases} \quad (17)$$

考虑方程(17)的不同常数选取.

a. 当 $A = 0$ 时, 有

$$\theta = c_1, \sigma = Bc_1^3 t + pc_1 t + c_2$$

式中, c_1, c_2 是任意常数.

与之对应的对称约化为

$$u = c_1^2 G(\xi)$$

$$v = c_1^4 Q(\xi)$$

$$\xi = c_1 x + Bc_1^3 t + c_2 + pc_1 t$$

对应方程(1)的约化方程为

$$\begin{cases} G''' - 4BG' - \frac{8}{3}GG' + 4Q' = 0 \\ BQ' + \frac{1}{2}GQ' + G'Q = 0 \end{cases} \quad (18)$$

b. 当 $A \neq 0$ 时, 方程(14)和方程(15)的解为

$$\theta = -(3At - c_1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\sigma = -\frac{B}{A} + (c_2 - pt)(3At - c_1)^{-\frac{1}{3}}$$

式中, c_1, c_2 是任意常数.

与之对应的对称约化为

$$u = (3At - c_1)^{-\frac{2}{3}} G(\xi)$$

$$v = (3At - c_1)^{-\frac{4}{3}} Q(\xi)$$

$$\xi = -(3At - c_1)^{-\frac{1}{3}}(x - c_2 + pt) - \frac{B}{A}$$

式中, $G(\xi), Q(\xi)$ 由方程(17)决定.

不同的约化方程(17)和方程(18), 它们的通解形式只能用复杂隐函数形式来表示, 这里省略其具体表达式.

4 结 论

利用 CK 直接法求得非线性耦合 Harry-Dym 方程的对称约化, 得到了非线性耦合 Harry-Dym 方程的约化后的常微分方程组, 进而建立了非线性耦合 Harry-Dym 方程与这些常微分方程组的关系. 非线性耦合 Harry-Dym 方程的其他可积性质, 如 Painlevé 可积性、共性 Tanh 可积性等^[18-19], 将是今后研究工作的一个重要内容.

参考文献:

- [1] 谷超豪. 孤子理论与应用[M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 1990.
- [2] 李翊神. 孤子与可积系统[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1999.
- [3] Xu T X, Mu W H. Finite-dimensional completely integrable systems associated with the Harry-Dym and

- the coupled Harry-Dym hierarchies [J]. *Physics Letters A*, 1990, 147(2/3): 125 – 129.
- [4] 曹策问, 耿献国. 系统与耦合 Harry-Dym 方程解的对称表示[J]. *数学学报*, 1992, 35(3): 314 – 322.
- [5] Chen J B, Geng X G. A new Neumann type integrable system related to the coupled Harry-Dym hierarchy [J]. *Physics Letters A*, 2005, 340 (1/2/3/4): 181 – 187.
- [6] Chen J B, Geng X G. On the linearization of the coupled Harry-Dym soliton hierarchy [J]. *Chinese Physics B*, 2006, 15(7): 1407 – 1413.
- [7] Yang H W, Dong H H. Multi-component Harry-Dym hierarchy and its integrable couplings as well as their Hamiltonian structures[J]. *Chinese Physics B*, 2009, 18(3): 845 – 849.
- [8] Marciniak K, Blaszak M. Construction of coupled Harry-Dym hierarchy and its solutions from Stäckel systems [J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2010, 73(9): 3004 – 3017.
- [9] 张颖, 李吉娜, 张江红. 耦合的 Harry-Dym 方程的对称约化[J]. *西北大学学报*, 2011, 41(6): 960 – 963.
- [10] Lie S. Über die integration durch bestimmte integrale von einer classe linearer partieller differential-gleichungen [J]. *Archive for Mathematics*, 1881, 6(3): 328 – 368.
- [11] Bluman G W, Kumei S. *Symmetries and differential equations*[M]. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [12] Olver P J. *Applications of lie groups to differential equations*[M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [13] Clarkson P A, Kruskal M D. New similarity reductions of the Boussinesq equation[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1989, 30(10): 2201 – 2213.
- [14] Lou S Y, A note on the new similarity reductions of the Boussinesq equation[J]. *Physics Letters A*, 1990, 151(3/4): 133 – 135.
- [15] Clarkson P A, Winternitz P. Nonclassical symmetry reductions for the Kadomtsev-Petviashvili equation [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1991, 49(3): 257 – 272.
- [16] Lou S Y. Generalized Boussinesq equation and KdV equation-Painlevé properties, Bäcklund transformations and Lax pairs [J]. *Science in China Series A: Mathematics*, 1991, 34(9): 1098 – 1108.
- [17] Lou S Y, Tang X Y, Lin J. Similarity and conditional similarity reductions of a $(2 + 1)$ – dimensional KdV equation via a direct method[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2000, 41(12): 8286 – 9303.
- [18] 裴胜兵, 张卫国, 李想. 色散项系数为负的 mKdV-Burgers 方程的有界行波解[J]. *上海理工大学学报*, 2014, 36(3): 205 – 216.
- [19] 刘磊, 胡恒春, 高海潮. Jaulent-Miodek 方程的 Painlevé 可积性及精确解[J]. *上海理工大学学报*, 2014, 36(3): 217 – 222.

(编辑: 石 瑛)