

具超线性增长非线性项的拟线性椭圆型方程共振问题

黄 晨, 贾 高, 黄利娜

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 在非线性项具有超线性增长条件下, 研究了拟线性椭圆型方程的共振问题. 通过建立拟线性算子与线性算子的一种关系, 依据 Shapiro 在加权 Sobolev 空间中建立的紧嵌入定理和推广的 Brouwer 定理, 运用截断方法证明了近似方程的解存在; 借助 Sobolev 理论、Fatou 引理和 Lebesgue 控制收敛定理证明了上述近似解一致有界; 利用投影技巧和 Galerkin 方法得到共振问题的非平凡解的存在性.

关键词: 加权 Sobolev 空间; 拟线性椭圆型方程; 超线性增长

中图分类号: O 175

文献标志码: A

Resonance Problem of a Quasilinear Elliptic Equation with Superlinear Nonlinearities

HUANG Chen, JIA Gao, HUANG Lina

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The resonance problem of a quasilinear elliptic equation with superlinear nonlinearities were focused. By establishing the relationship between the quasilinear operators and linear operators, according to the Shapiro-type compact embedding theorem and Brouwer's theorem, the existence of solutions of the approximate equation was revealed. With the help of the Sobolev theory, Fatou's Lemma and Lebesgue dominated convergence theorem, the uniform boundness of the approximate solutions was proved. By using the projection technique and the Galerkin method, the existence of nontrivial solutions of the resonance problem was revealed.

Keywords: *weighted Sobolev space; quasilinear elliptic equation; superlinear growth*

1 问题的提出

在现实生活中, 共振现象是常见的. 在工程技术

中, 人们利用或者试图避免共振现象的发生. 关于椭圆型方程共振问题有较多的研究, 并取得了一系列重要成果^[1-8].

1981 年 Berestycki 等^[1]用强极大值原理讨论

收稿日期: 2015-05-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11171220); 沪江基金资助项目(B14005)

第一作者: 黄 晨(1991-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 非线性分析及其应用. E-mail: 1285612283@qq.com

通信作者: 贾 高(1960-), 男, 教授. 研究方向: 非线性分析及其应用. E-mail: gaojia89@163.com

了 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u + \alpha u^- + g(u) - f(x), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

弱解的存在性. 其中, Δ 是 Laplacian 算子, λ_1 是 Laplacian 算子的第一特征值, u^- 是函数 u 的负部.

2005 年 Rumbos 等^[3]在加权 Sobolev 空间 $H_{p,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$ 中, 利用环绕定理讨论了加权拟线性椭圆型方程

$$Tu - \lambda_1 \rho u = -a(x, u) \rho u^- + \rho g(x, u) + h, \\ x \in \Omega, u \in H_{p,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$$

弱解的存在性, T 是线性算子.

$$Tu = - \sum_{i,j=1}^N D_i (p_i^{\frac{1}{p}}(x) p_j^{\frac{1}{p}}(x) b_{ij}(x) D_j u) + \\ \rho(x) c(x) u$$

对于线性算子, 而且非线性项满足至多线性增长条件, 使得前两个问题的研究就相对容易些. 在本文中, 对拟线性算子在超线性增长条件下讨论共振问题解的存在性, 即考虑加权 Sobolev 空间 $H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$ 中奇异拟线性椭圆型方程

$$Mu = [\lambda_1 u + f(x, u)] \rho - G, \\ x \in \Omega, u \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma) \quad (1)$$

非平凡解的存在性. 其中, 算子

$$Mu = - \sum_{i,j=1}^N D_i [p_i^{\frac{1}{p}} p_j^{\frac{1}{p}} \sigma_j^{\frac{1}{p}}(u) \sigma_i^{\frac{1}{p}}(u) b_{ij}(x) D_j u] + \\ b_0 \sigma_0 qu$$

非线性项 $f(x, u)$ 具有超线性增长.

本文所讨论的理论模型来源于研究飞机、汽车、电站的设计和建造, 以及环境污染分析等实际背景^[3,5].

2 假设与引理

设 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中的有界区域, 设 $\Gamma \subset \partial\Omega$ 是一个闭集(可能为空集), $p_i(x), q(x), \rho(x) \in C^0(\Omega)$ 是权函数, 其中, $q(x)$ 是非负的, 记 $\mathbf{p}(x) = (p_1(x), p_2(x), \dots, p_N(x))$ 为向量函数.

考虑准希尔伯特空间

$$C_\rho^0(\Omega) = \left\{ u \in C^0(\Omega) \mid \int_\Omega |u|^2 \rho < \infty \right\}$$

且 $C_\rho^0(\Omega)$ 上的内积定义为 $\langle u, v \rangle_\rho = \int_\Omega uv\rho$, 以及准希尔伯特空间

$$C_{p,q,\rho}^0(\Omega, \Gamma) = \left\{ u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \mid u(x) = 0, \right.$$

$$\left. \forall x \in \Gamma; \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^N |D_i u|^2 p_i + u^2(q + \rho) \right] < \infty \right\}$$

且 $C_{p,q,\rho}^0(\Omega, \Gamma)$ 上的内积定义为

$$\langle u, v \rangle_{p,q,\rho} = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N p_i D_i u D_i v + \right. \\ \left. (q + \rho) uv \right) dx \quad (2)$$

其中, $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, N$. 设 $L_\rho^2(\Omega)$ 为 $C_\rho^0(\Omega)$ 的完备化空间, 范数定义为 $\|u\|_\rho = \langle u, u \rangle_\rho^{\frac{1}{2}}$; $H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$ 为 $C_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$ 的完备化空间, 范数定义为 $\|u\|_{p,q,\rho} = \langle u, u \rangle_{p,q,\rho}^{\frac{1}{2}}$. 类似地, 可以得到空间 $L_{p_i}^2(\Omega)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 和 $L_q^2(\Omega)$. 因此, 由式(2)可得

$$\langle u, v \rangle_{p,q,\rho} = \sum_{i=1}^N \langle D_i u, D_i v \rangle_{p_i} + \\ \langle u, v \rangle_\rho + \langle u, v \rangle_q \quad (3)$$

记

$$\begin{cases} f^+(x) = \liminf_{s \rightarrow +\infty} f(x, s) \\ f^-(x) = \liminf_{s \rightarrow -\infty} f(x, s) \end{cases} \quad (4)$$

线性算子

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^N D_i (p_i^{\frac{1}{p}} p_j^{\frac{1}{p}} a_{ij}(x) D_j u) + a_0 qu$$

拟线性算子 M 的二形式分别为

$$L(u, v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N p_i^{\frac{1}{p}} p_j^{\frac{1}{p}} a_{ij}(x) D_j u D_i v + \\ \langle a_0 u, v \rangle_q, \forall u, v \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma) \quad (5)$$

$$M(u, v) = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega [p_i^{\frac{1}{p}} p_j^{\frac{1}{p}} \sigma_i^{\frac{1}{2}}(u) \sigma_j^{\frac{1}{2}}(u) \cdot \\ b_{ij}(x) D_j u D_i v] + \langle b_0 \sigma_0(u) u, v \rangle_q, \\ \forall u, v \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma) \quad (6)$$

定义 1 如果满足下面的条件 a-e, 称区域 Ω 和算子 L 满足 Simple- V_L 条件.

a. 存在一系列完备标准正交系 $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset L_\rho^2$, 且对任意 $n, \varphi_n \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma) \cap C^2(\Omega)$;

b. 关于算子 L , 存在特征值序列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, 满足 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$, 所对应的特征函数序列为 $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, 即对任意的 $v \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$, 有

$$L(\varphi_n, v) = \lambda_n \langle \varphi_n, v \rangle_\rho, \forall v \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma) \\ \text{且在 } \Omega \text{ 上, } \varphi_1 > 0;$$

c. $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_N$, 其中, $\Omega_i \subset \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, N$, 是开区域;

d. 对 Ω_i , 存在正函数 $p_i^*, \rho_i^* \in C^0(\Omega_i)$, 满足

$$\int_{\Omega_i} [p_i^*(s) + \rho_i^*(s)] ds < \infty$$

$$\rho(x) = \rho_1^*(x_1) \rho_2^*(x_2) \cdots \rho_N^*(x_N)$$

$$p_i(x) = \rho_1^*(x_1) \rho_2^*(x_2) \cdots \rho_{i-1}^*(x_{i-1}) p_i^*(x_i) \cdot \rho_{i+1}^*(x_{i+1}) \cdots \rho_N^*(x_N), i = 1, 2, \dots, N$$

e. 对 $\Omega_i (i = 1, \dots, N)$, 存在 $h_i \in C^0(\Omega_i) \cap L_{\rho_i^*}^{\theta}(\Omega_i)$, 满足当 $2 < \theta < \infty$ 时, 有

$$|\Phi(t)| \leq h_i(t) \|\Phi\|_{p_i^*, \rho_i^*},$$

$$\forall \Phi \in C^1(\Omega_i), \forall t \in \Omega_i$$

其中

$$\|\Phi\|_{p_i^*, \rho_i^*}^2 = \int_{\Omega_i} \left[p_i^*(t) \left| \frac{d\Phi(t)}{dt} \right|^2 + \rho_i^*(t) \Phi^2(t) \right] dt$$

满足以上 5 个条件的区域和算子的例子有很多, 见文献[9-10].

对于算子 M 和算子 L 中的 $a_{ij}(x), a_0(x), b_{ij}(x), b_0(x) (i, j = 1, 2, \dots, N)$ 作如下假设: $a_{ij}(x), a_0(x)$ 满足条件 f-h ($b_{ij}(x)$ 和 $b_0(x)$ 也满足类似的条件):

f. $a_0(x), a_{ij}(x) \in C^0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \forall x \in \Omega, i, j = 1, 2, \dots, N$;

g. $a_0(x) \geq \beta_0 > 0, \forall x \in \Omega$;

h. 存在常数 $c_0, c_1 > 0$, 使得对所有 $x \in \Omega, \xi \in \mathbf{R}^N$, 有

$$c_1 |\xi|^2 \geq \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq c_0 |\xi|^2$$

对于算子 M 中的 $\sigma_i(u)$, 假设满足条件 i, j:

i. $\sigma_i(u): H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma) \rightarrow \mathbf{R}$ 是弱序列连续的;

j. 存在 $\eta_0, \eta_1 > 0$, 使得 $\eta_0 \leq \sigma_i(u) \leq \eta_1, \forall u \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$;

假设问题(1)中的非线性项 $f(x, s)$ 满足条件 k-m:

k. $f(x, s)$ 满足 Caratheodory 条件;

l. 存在 $\theta, 2 < \theta < 2N/(N-1), h_0(x) \in L_{\rho}^{\theta^*}$, $\theta^* = (1 - \theta^{-1})^{-1}, K$ 是一个非负常数, 使得对 $\forall s \in \mathbf{R}$, 有

$$|f(x, s)| \leq h_0(x) + K |s|^{\theta-1}, \text{ a.e. } x \in \Omega$$

m. 存在非负函数 $\tilde{h}_0(x) \in L_{\rho}^{\theta^*}(\Omega)$, 有

$$sf(x, s) \leq \tilde{h}_0(x) |s|, \forall s \in \mathbf{R}, \text{ a.e. } x \in \Omega$$

定义 2 如果对任意 $\|v\|_{p,q,\rho} \leq 1$, 有

$$\lim_{\|u\|_{p,q,\rho} \rightarrow \infty} (M(u, v) - L(u, v)) = 0$$

称算子 M 和算子 L $Lu = - \sum_{i=1}^N D_i (p_i^{\frac{1}{2}} p_j^{\frac{1}{2}} a_{ij}(x) \cdot$

$D_j u) + a_0 q u$ 是 Near-相关的.

对于加权 Sobolev 空间, Shapiro 在文献[10]中给出并证明了嵌入定理(引理 1).

引理 1 假设算子 L 为定义 2 中所给出的, 区域 Ω 和算子 L 满足 Simple- V_L 条件, 则 $H_{p,q,\rho}^1$ 紧嵌入 L_{ρ}^2 ; 进一步, 当 $N \geq 2, 2 < \theta < 2N/(N-1)$, 则 $H_{p,q,\rho}^1$ 紧嵌入 L_{ρ}^{θ} ; 当 $N = 1, 2 < \theta < \infty$, 则 $H_{p,q,\rho}^1$ 紧嵌入 L_{ρ}^{θ} .

3 主要结果及证明

本文的主要结论如定理 1.

定理 1 设区域 Ω 和算子 L 满足 Simple- V_L 条件, 算子 M 满足定义 1 的条件 a-c, i-j, 算子 M 和算子 L 是 Near-相关的, $f(x, s)$ 满足定义 1 的条件 k-m, $G \in [H_{p,q,\rho}^1]'$, 且

$$\int_{\Omega} f^+ \varphi_1 \rho < G(\varphi_1) < \int_{\Omega} f^- \varphi_1 \rho \quad (7)$$

其中, λ_1 是算子 L 第一特征值, φ_1 是相应的特征函数, 则问题(1)至少存在一个弱解, 即存在 $u^* \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$, 对 $\forall v \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$, 有

$$M(u^*, v) = \lambda_1 \langle u^*, v \rangle_{\rho} + \int_{\Omega} f(x, u^*) v \rho - G(v), \quad \forall v \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$$

为了证明主要结果, 先证明命题 1 和命题 2.

命题 1 假设定理 1 的条件都成立, 则当 $n \geq 2$ 时, 存在 $u_n \in S_n$ 使得

$$M(u_n, v) = \left(\lambda_1 - \frac{1}{n} \right) \langle u_n, v \rangle_{\rho} + \int_{\Omega} f(x, u_n) v \rho - G(v), \quad \forall v \in S_n \quad (8)$$

其中, $S_n = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \subset H_{p,q,\rho}^1$.

证明 取定 $n (n \geq 2)$. 对 $\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots,$

$\alpha_n) \in \mathbf{R}^n$, 令 $u = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$. 由 Simple- V_L 条件, 得到

$$L(u, u) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k^2, \quad \|u\|_{\rho}^2 = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = |\alpha|^2$$

且

$$L(u, u) + \|u\|_{\rho}^2 \leq (\lambda_n + 1) \|u\|_{\rho}^2 \quad (9)$$

利用定义 1 的条件 f-h, 得到

$$L(u, u) + \|u\|_{\rho}^2 \geq c_0 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N p_i |D_i u|^2 p_i + \beta_0 \|u\|_{\rho}^2 + \|u\|_{\rho}^2 \geq l \|u\|_{p,q,\rho}^2 \quad (10)$$

其中, $l = \min\{c_0, \beta_0, 1\} > 0$. 结合式(9)和式(10),

可得

$$\|u\|_{\rho}^2 \leq \|u\|_{p,q,\rho}^2 \leq \frac{\lambda_n}{l} \|u\|_{\rho}^2 \quad (11)$$

对于任意正整数 $m \geq 2$, 定义辅助函数

$$f_m(x, s) = \begin{cases} f(x, m), & m \leq s \\ f(x, s), & -m \leq s \leq m \\ f(x, -m), & s \leq -m \end{cases} \quad (12)$$

根据定义 1 的条件 1 可知

$$|f_m(x, s)| \leq h_0(x) + K |m|^{\theta-1}, \forall s \in R, \text{ a.e. } x \in \Omega$$

又 $h_0(x) \in L_{\rho}^{\theta^*}$, 其中, $\theta^* = (1 - \theta^{-1})^{-1}$, 利用 Hölder 不等式、Minkowski 不等式, 以及引理 1, 对 $\forall v \in S_n$, 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f_m(x, u) v \rho| &\leq \|f_m(x, u)\|_{L_{\rho}^{\theta^*}} \cdot \\ \|v\|_{L_{\rho}^{\theta}} &\leq T_m \|v\|_{L_{\rho}^{\theta}} \end{aligned} \quad (13)$$

式中, T_m 为与 m 有关的正常数.

现分两部分证明.

Part1 对于固定的 $m (m \geq 2)$, 证明 $\exists u_{n,m}^* \in S_n$, 使得

$$\begin{aligned} M(u_{n,m}^*, v) &= \left(\lambda_1 - \frac{1}{n}\right) \langle u_{n,m}^*, v \rangle_{\rho} + \\ &\int_{\Omega} f_m(x, u_{n,m}^*) v \rho - G(v), \quad \forall v \in S_n \end{aligned} \quad (14)$$

设

$$F_k(\alpha) = M(u, -\varphi_k) - \left(\lambda_1 - \frac{1}{n}\right) \langle u, \varphi_k \rangle_{\rho} -$$

$$\int_{\Omega} f_m(x, u) \varphi_k \rho + G(\varphi_k), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

那么, 有

$$\sum_{k=1}^n F_k(\alpha) \alpha_k = I(\alpha) + II(\alpha)$$

其中

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= M(u, u) - L(u, u) - \\ &\int_{\Omega} f_m(x, u) u \rho + G(u) \end{aligned} \quad (15)$$

$$II(\alpha) = L(u, u) - \left(\lambda_1 - \frac{1}{n}\right) \langle u, u \rangle_{\rho} \quad (16)$$

对于式(15), 注意到算子 M 和算子 L 是 Near-相关的, $G \in [H_{p,q,\rho}^1]'$, 容易得到

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} |\alpha|^{-2} (M(u, u) - L(u, u)) =$$

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} |\alpha|^{-2} \left| \int_{\Omega} f_m(x, u) u \rho \right| =$$

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} |\alpha|^{-2} |G(u)| = 0$$

从而有 $\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} |\alpha|^{-2} |I(\alpha)| = 0$.

对于式(16), 利用式(8)得到

$$II(\alpha) = \sum_{k=1}^n \left(\lambda_k - \lambda_1 + \frac{1}{n}\right) \alpha_k^2 \geq \frac{1}{n} |\alpha|^2 \quad (17)$$

因此, 当 $|\alpha| \geq s_0$ 时 (s_0 是一个充分大的常数),

$\sum_{k=1}^n F_k(\alpha) \alpha_k \geq \frac{|\alpha|^2}{2n}$, 根据 Brouwer 定理^[11]可知,

存在 $\gamma_{n,m} = (\gamma_{n,m}^{(1)}, \dots, \gamma_{n,m}^{(n)})$, 使得 $F_k(\gamma_{n,m}) = 0$,

$k = 1, 2, \dots, n$. 取 $u_{n,m}^* = \sum_{k=1}^n \gamma_{n,m}^{(k)} \varphi_k$, 故式(14)

成立.

Part 2 对于固定的 n , 证明 $\{\|u_{n,m}^*\|_{\rho}\}_{m=2}^{\infty}$ 关于 m 是一致有界.

采用反证法. 不失一般性, 假设

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_{n,m}^*\|_{\rho} = \infty \quad (18)$$

在式(14)中取 $v = u_{n,m}^*$, 则有

$$\begin{aligned} L(u_{n,m}^*, u_{n,m}^*) - \lambda_1 \langle u_{n,m}^*, u_{n,m}^* \rangle_{\rho} + \\ \frac{1}{n} \langle u_{n,m}^*, u_{n,m}^* \rangle_{\rho} &= \int_{\Omega} f_m(x, u_{n,m}^*) u_{n,m}^* \rho - \\ G(u_{n,m}^*) + L(u_{n,m}^*, u_{n,m}^*) - M(u_{n,m}^*, u_{n,m}^*) \end{aligned} \quad (19)$$

即

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda_1) |\hat{u}_{n,m}^*(k)|^2 + \frac{1}{n} \|u_{n,m}^*\|_{\rho}^2 &= \\ \int_{\Omega} f_m(x, u_{n,m}^*) u_{n,m}^* \rho - G(u_{n,m}^*) + \\ L(u_{n,m}^*, u_{n,m}^*) - M(u_{n,m}^*, u_{n,m}^*) \end{aligned} \quad (20)$$

其中, $\hat{u}_{n,m}^*(k) = \langle \varphi_k, u_{n,m}^* \rangle_{\rho}$.

另一方面, 对于任意 $s \geq m$, 由定义 1 的条件 m 可得

$$\begin{aligned} sf_m(x, s) &= \frac{s}{m} mf(x, m) \leq \tilde{h}_0(x) |s|, \\ \text{a.e. } x &\in \Omega \end{aligned} \quad (21)$$

类似地, 当 $-m \leq s \leq m$ 和 $s \leq -m$ 时, 可以得到同样的结论. 因此

$$\begin{aligned} sf_m(x, s) &\leq \tilde{h}_0(x) |s|, \\ \forall s \in R, \text{ a.e. } x &\in \Omega \end{aligned} \quad (22)$$

根据式(20)和式(22)可以得到

$$\frac{1}{n} \|u_{n,m}^*\|_{\rho}^2 \leq \|\tilde{h}_0\|_{L_{\rho}^{\theta^*}} \|u_{n,m}^*\|_{L_{\rho}^{\theta}} + |G(u_{n,m}^*)| +$$

$$L(u_{n,m}^*, u_{n,m}^*) - M(u_{n,m}^*, u_{n,m}^*) \quad (23)$$

由于算子 M 和算子 L 是 Near-相关的, $G \in$

$[H_{p,q,\rho}^1]'$, $\tilde{h}_0(x) \in L_{\rho}^{\theta^*}(\Omega)$, 利用引理 1, 在式(23)

两边同时除以 $\|u_{n,m}^*\|_{p,q,\rho}^2$, 且令 $m \rightarrow \infty$, 可得 $\frac{1}{n} \leq 0$. 故得出矛盾. 所以, 式(18)不成立, 即存在 $K_1 > 0$, 有

$$\|u_{n,m}^*\|_\rho \leq K_1, \forall m \geq 2 \quad (24)$$

根据式(11)和式(24),存在 $\{u_{n,m}^*\}_{m=2}^\infty$ 的子列(不妨仍记为 $\{u_{n,m}^*\}_{m=2}^\infty$)和 $u_n \in S_n$,使得

$$\begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} \|u_{n,m}^* - u_n\|_{p,q,\rho} = 0 \\ \lim_{m \rightarrow \infty} u_{n,m}^*(x) = u_n(x), \text{ a.e. } x \in \Omega \\ \lim_{m \rightarrow \infty} D_i u_{n,m}^*(x) = D_i u_n(x), \\ \text{ a.e. } x \in \Omega, i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (25)$$

因此,由式(25)可得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M(u_{n,m}^*, v) = M(u_n, v), \forall v \in S_n \quad (26)$$

运用引理1,有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_\Omega |u_{n,m}^* - u_n|^{\theta\rho} = 0 \quad (27)$$

从而存在 $W(x) \in L_\rho^\theta(\Omega)$ 和 $\{u_{n,m_j}^*\}_{j=1}^\infty \subset \{u_{n,m}^*\}_{m=1}^\infty$,使得 $|u_{n,m_j}^*| \leq W(x)$, a.e. $x \in \Omega$.

由Hölder不等式,定义1的条件i,m和Lebesgue控制收敛定理,有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_\Omega f_{m_j}(x, u_{n,m_j}^*) v \rho = \int_\Omega f(x, u_n) v \rho, \quad \forall v \in S_n$$

将式(14)中的 m 替换为 m_j ,并且令 $j \rightarrow \infty$,两边取极限可得式(7)成立.

命题2 假设定理1的条件都成立,则命题1中所得到的序列 $\{u_n\}$ 在 $H_{p,q,\rho}^1$ 中一致有界.

证明 对于命题1所得到的序列 $\{u_n\}_{n=2}^\infty \subset S_n$,设 $u_n = \sum_{k=1}^n \hat{u}_n(k) \varphi_k$,其中, $\hat{u}_n(k) = \langle \varphi_k, u_n \rangle_\rho$.采用反证法.假设结论不成立,不妨设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{p,q,\rho} = \infty \quad (28)$$

由于

$$\begin{aligned} L(u_n, u_n) &= \left(\lambda_1 - \frac{2}{n}\right) \langle u_n, u_n \rangle_\rho + \\ &\int_\Omega f(x, u_n) u_n \rho - G(u_n) + \\ &L(u_n, u_n) - M(u_n, u_n) \end{aligned} \quad (29)$$

利用定义1的条件m,通过计算可得

$$\sum_{k=2}^n (\lambda_k - \lambda_1) |\hat{u}_n(k)|^2 \leq \|\tilde{h}_0\|_{L_\rho^\theta} \|u_n\|_{L_\rho^\theta} + G(u_n) + L(u_n, u_n) - M(u_n, u_n) \quad (30)$$

又因 $G \in [H_{p,q,\rho}^1]'$,存在常数 K_1 使得 $|G(u_n)| \leq K_1 \|u_n\|_{p,q,\rho}$.

另一方面,根据定义1的条件b,可以找到常数 $\eta > 0$,使得 $\eta \lambda_k \leq \lambda_k - \lambda_1, \forall k \geq 2$.

这样,利用引理1,存在常数 K_2 ,使得

$$\eta \sum_{k=2}^n \lambda_k |\hat{u}_n(k)|^2 \leq K_2 \|u_n\|_{p,q,\rho} + L(u_n, u_n) - M(u_n, u_n) \quad (31)$$

对于 $u^* \in H_{p,q,\rho}^1$,定义投影 $P_n: H_{p,q,\rho}^1 \rightarrow S_n$,即

$$P_n u^* = \sum_{k=1}^n \hat{u}^*(k) \varphi_k \in S_n, \text{ 则有 } P_1 u_n = \hat{u}_n(1) \varphi_1.$$

由定义1的条件b,有

$$\lambda_2 \|u_n - P_1 u_n\|_\rho^2 \leq L(u_n - P_1 u_n, u_n - P_1 u_n) = \sum_{k=2}^n \lambda_k |\hat{u}_n(k)|^2, n \geq 2 \quad (32)$$

且 λ_2 恒大于零.利用算子 M 和算子 L 是Near-相关的,在式(31)两边同除以 $\|u_n\|_{p,q,\rho}^2$,且取极限 $n \rightarrow \infty$,可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{p,q,\rho}^{-2} L(u_n - P_1 u_n, u_n - P_1 u_n) = 0 \quad (33)$$

运用引理1,由式(32)和式(33)可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{p,q,\rho}^{-1} \|u_n - P_1 u_n\|_{p,q,\rho} = 0 \quad (34)$$

再由式(28)以及算子 M 和算子 L 是Near-相关的,可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{p,q,\rho}^{-1} (M(u_n, u_n) - L(u_n, u_n)) = 0 \quad (35)$$

又因为 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{p,q,\rho}$ 是定义在 $H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$ 上的一个内积,故有

$$\|u_n\|_{p,q,\rho}^2 = \|P_1 u_n\|_{p,q,\rho}^2 + \|u_n - P_1 u_n\|_{p,q,\rho}^2$$

结合式(34)可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{p,q,\rho}^{-1} \|P_1 u_n\|_{p,q,\rho} = 1$$

注意到

$$\begin{aligned} \|P_1 u_n\|_{p,q,\rho}^2 &= L(P_1 u_n, P_1 u_n) + \\ &\|P_1 u_n\|_\rho^2 \leq (1 + \lambda_1) \|u_n\|_\rho^2 \end{aligned}$$

所以,存在正的常数 K_4 ,使得

$$\|u_n\|_{p,q,\rho} \leq K_4 \|u_n\|_\rho, \forall n \quad (36)$$

设 $v_n = \|u_n\|_\rho^{-1} u_n$,且 $v_{1n} = \hat{v}_n(1) \varphi_1, v_{2n} = v_n - v_{1n}$.由式(36)容易得到 $\|v_n\|_{p,q,\rho} \leq K_4$.

利用引理1得到:存在弱收敛子列(不妨仍记为 $\{v_n\}_{n=2}^\infty$)及函数 $v^* \in H_{p,q,\rho}^1$,使得下面结论成立:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\|v_n - v^*\|_\rho + \int_\Omega |v_n - v^*|^{\theta\rho} \right] = 0 \quad (37)$$

$$\exists W \in L_\rho^2 \cap L_\rho^\theta, |v_n(x)| \leq W(x), \text{ a.e. } x \in \Omega, \forall n \quad (38)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = v^*(x), \text{ a.e. } x \in \Omega \quad (39)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle D_i v_n, V \rangle_{p_i} = \langle D_i v^*, V \rangle_{p_i},$$

$$\forall V \in L_{p_i}^2, i = 1, 2, \dots, N \quad (40)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle v_n, V \rangle_q = \langle v^*, V \rangle_q, \forall V \in L_q^2 \quad (41)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(v_n) = G(v^*) \quad (42)$$

另一方面,由式(34)和式(36)容易得到
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_{2n}\|_\rho = 0, \|v_{1n}\|_\rho^2 + \|v_{2n}\|_\rho^2 = 1$. 因此,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{v}_n(1)| = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{v}_n(k)| = 0, k \geq 2 \quad (43)$$

利用式(34)还可以得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{v}_n(k) - \hat{v}^*(k)| = 0, k \geq 1 \quad (44)$$

结合式(43),有 $v^* = \hat{v}^*(1)\varphi_1, |\hat{v}^*(1)| = 1$. 不妨设 $\hat{v}^*(1) = 1$, 即 $v^* = \varphi_1$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = \varphi_1, \text{ a.e. } x \in \Omega \quad (45)$$

由定义1的条件b可知:任意的 $x \in \Omega$, 有 $\varphi_1 > 0$. 利用式(28), (36), (39)可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty, \text{ a.e. } x \in \Omega$$

再利用式(35)和式(36),对于给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正的常数 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时,有

$$G(v_n) \leq \int_\Omega f(x, u_n) v_n \rho + \varepsilon \quad (46)$$

由定义1的条件m和式(38)得

$$f(x, u_n) v_n \leq \tilde{h}_0(x) W(x), \text{ a.e. } x \in \Omega$$

又因 $\tilde{h}_0(x) \in L_{\rho}^{\theta^*}(\Omega), W \in L_{\rho}^{\theta}(\Omega)$, 故 $\tilde{h}_0 W \in L_{\rho}^1$, 且由 Fatou 引理, 结合式(39), (42), (45), 在式(46)两边取极限 $n \rightarrow \infty$, 可得 $G(\varphi_1) \leq \int_\Omega f^+(x) \varphi_1 \rho + \varepsilon$. 由 ε 的任意性可知, $G(\varphi_1) \leq \int_\Omega f^+(x) \varphi_1 \rho$. 这与题设中的式(7)矛盾. 对于 $\hat{v}^*(1) = -1, v^* = -\varphi_1$, 同样可得到矛盾结论. 故 $\{u_n\}$ 在 $H_{p,q,\rho}^1$ 中一致有界.

定理1的证明 因为 $H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$ 是可分的 Hilbert 空间, 由命题1和命题2得到 $\{u_n\}_{n=2}^\infty$ 在 $H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$ 中一致有界, 根据加权 Sobolev 空间理论可知:存在弱收敛子列^[10] (不妨仍记为 $\{u_n\}_{n=2}^\infty$) 及函数 $u^* \in H_{p,q,\rho}^1$, 使得下面结论成立:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\|u_n - u^*\|_\rho + \int_\Omega |u_n - u^*|^{\theta\rho} \right] = 0 \quad (47)$$

$$\exists W \in L_{\rho}^2 \cap L_{\rho}^{\theta}, |u_n(x)| \leq W(x),$$

$$\text{a.e. } x \in \Omega, \forall n \quad (48)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u^*(x), \text{ a.e. } x \in \Omega \quad (49)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle D_i u_n, v \rangle_{p_i} = \langle D_i u^*, v \rangle_{p_i},$$

$$\forall v \in L_{p_i}^2, i = 1, 2, \dots, N \quad (50)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, v \rangle_q = \langle u^*, v \rangle_q, \forall v \in L_q^2 \quad (51)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(u_n)(x) = G(u^*) \quad (52)$$

设 $v_J \in S_J$, 其中, $J \geq 2$ 为任意确定的正整数. 那么, 对于 $n \geq J$, 有

$$M(u_n, v_J) - M(u^*, v_J) =$$

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N \left\{ p_i^{\frac{1}{2}} p_j^{\frac{1}{2}} \sigma_i^{\frac{1}{2}}(u_n) \sigma_j^{\frac{1}{2}}(u_n) b_{ij}(x) \cdot D_j(u_n - u^*) D_i v_J + p_i^{\frac{1}{2}} p_j^{\frac{1}{2}} [\sigma_i^{\frac{1}{2}}(u_n) \sigma_j^{\frac{1}{2}}(u_n) - \sigma_i^{\frac{1}{2}}(u^*) \sigma_j^{\frac{1}{2}}(u^*)] b_{ij}(x) D_j u^* D_i v_J + \langle b_0[\sigma_0(u_n) u_n - \sigma_0(u^*) u^*], v_J \rangle_q \right\} \quad (53)$$

利用定义1的条件a-c, i-j和式(49)~(51), 以及 $D_i v_J \in L_{p_i}^2$, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(u_n, v_J) = M(u^*, v_J) \quad (54)$$

此外, 利用定义1的条件k, l, 式(48)和式(49), Hölder 不等式和 Lebesgue 控制收敛定理, 可以得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x, u_n) v_J \rho = \int_{\Omega} f(x, u^*) v_J \rho, \quad \text{a.e. } x \in \Omega \quad (55)$$

再由式(47), 有

$$M(u_n, v_J) = \left(\lambda_1 - \frac{1}{n} \right) \langle u_n, v_J \rangle_\rho + \int_{\Omega} f(x, u_n) v_J \rho - G(v_J) \quad (56)$$

对式(56)两边取极限 $n \rightarrow \infty$, 根据式(51), (54), (55), 有

$$M(u^*, v_J) = \lambda_1 \langle u^*, v_J \rangle_\rho + \int_{\Omega} f(x, u^*) v_J \rho - G(v_J) \quad (57)$$

对于给定 $v \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$, 定义投影 P_J :

$$H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma) \rightarrow S_J, \text{ 即 } P_J v = \sum_{k=1}^n \hat{v}(k) \varphi_k \in S_J,$$

其中, $\hat{v}(k) = \langle \varphi_k, v \rangle_\rho$. 根据定义, 容易得到 $\lim_{J \rightarrow \infty} \|P_J v - v\|_{p,q,\rho} = 0$. 因此, 下列结论成立:

$$\begin{cases} \lim_{J \rightarrow \infty} M(u^*, P_J v) = M(u^*, v) \\ \lim_{J \rightarrow \infty} \langle u^*, P_J v \rangle_\rho = \langle u^*, v \rangle_\rho \\ \lim_{J \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x, u^*) P_J v \rho = \int_{\Omega} f(x, u^*) v \rho \\ \lim_{J \rightarrow \infty} G(P_J v) = G(v) \end{cases} \quad (58)$$

将式(55)中的 v_J 替换为 $P_J v$, 并在等式两边取极限 $J \rightarrow \infty$, 从式(56)得到

$$M(u^*, v) = \lambda_1 \langle u^*, v \rangle_\rho + \int_{\Omega} f(x, u^*) v \rho - G(v), v \in H_{p,q,\rho}^1(\Omega, \Gamma)$$

因此, 定理1成立.

参考文献:

- [1] BERESTYCKI H, DE FIGUEIREDO D G. Double resonance in semilinear elliptic problems [J]. Communications in Partial Differential Equations, 1981, 6(1): 91-120.

(下转第262页)

- dimensional theoretical model for predicting transient thermal behavior of thermoelectric coolers [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2010, 53(9/10): 2001 – 2011.
- [7] 赵举, 陈曦. 多级热电制冷器的数值模拟与实验研究[J]. 制冷学报, 2014, 35(2): 94 – 99.
- [8] 安景飞. 半导体制冷系统性能的研究[D]. 成都: 西华大学, 2013.
- [9] 赵举, 朱洪亮, 仇和兵, 等. 多级热电制冷数值模拟与实验研究[J]. 制冷技术, 2015, 35(4): 17 – 21.
- [10] HWANG G S, GROSS A J, KIM H, et al. Micro thermoelectric cooler Planar multistage [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2009, 52(7/8): 1843 – 1852.
- [11] ANTONOVA E E, LOOMAN D C. Finite elements for thermoelectric device analysis in ANSYS [C] // Proceedings of the 24th International Conference on Thermoelectrics. Clemson, IEEE, 2005: 215 – 218.
- (编辑: 石 瑛)

(上接第 210 页)

- [2] SHAPIRO V L. Quasilinearity below the 1st eigenvalue [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2001, 129(7): 1955 – 1962.
- [3] RUMBOS A J, SHAPIRO V L. Jumping nonlinearities and weighted Sobolev spaces [J]. Journal of Differential Equations, 2005, 214(2): 326 – 357.
- [4] RUMBOS A. A semilinear elliptic boundary value problem at resonance where the nonlinearity may grow linearly[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 1991, 16(12): 1159 – 1168.
- [5] LEFTON L E, SHAPIRO V L. Resonance and quasilinear parabolic partial differential equations[J]. Journal of Differential Equations, 1993, 101(1): 148 – 177.
- [6] SHAPIRO V L. Resonance, distributions and semilinear elliptic partial differential equations [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 1984, 8(8): 857 – 871.
- [7] 赵美玲, 贾高. 加权 Sobolev 空间中奇异拟线性椭圆方程共振问题[J]. 上海理工大学学报, 2012, 34(6): 598 – 603.
- [8] JIA G, SUN D. Existence of solutions for a class of singular quasilinear elliptic resonance problems[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2011, 74(10): 3055 – 3064.
- [9] SHAPIRO V L. Special functions and singular quasilinear partial differential equations [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1991, 22(5): 1411 – 1429.
- [10] SHAPIRO V L. Singular quasilinearity and higher eigenvalues[M]. Rhode Island: American Mathematical Society, 2001.
- [11] KESAVAN S. Topics in functional analysis and applications[M]. New York: John Wiley & Sons, 1989.
- (编辑: 石 瑛)