

# 零点分布在直线上的亚纯函数的正规定则

洪苏敏, 刘晓俊

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

**摘要:** 对零点分布在给定直线上的亚纯函数的正规性进行了讨论, 设  $\mathcal{F}$  是定义在单位圆盘  $D$  上的亚纯函数族, 若存在  $M \geq 0$ , 使得对于任意  $f \in \mathcal{F}$  满足:  $f(z) = 0 \Rightarrow |f'| \leq M|z^m|$ ;  $f(z)$  的零点分布在一条给定直线上;  $f(z)$  的极点重数至少为 3;  $f'(z) \neq z^m$ , 则  $\mathcal{F}$  在区域  $D$  上正规.

**关键词:** 亚纯函数; 例外函数; 零点; 正规族

**中图分类号:** O 174.52 **文献标志码:** A

## Normal Criterion of Meromorphic Functions Whose Zeros Distribute on a Certain Straight Line

HONG Sumin, LIU Xiaojun

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

**Abstract:** The normality of meromorphic functions whose zeros distribute on a certain straight lines was discussed and obtained; let  $\mathcal{F}$  be a family of meromorphic functions on the unit disc  $D$ , if there exists  $M \geq 0$ , such that for each  $f \in \mathcal{F}$ ,  $f(z) = 0 \Rightarrow |f'| \leq M|z^m|$ , all zeros of  $f(z)$  distribute on a certain straight line, all of whose poles have multiplicity at least 3, and  $f'(z) \neq z^m$ ,  $z \in D$ , then  $\mathcal{F}$  is normal on  $D$ .

**Keywords:** meromorphic functions; exceptional function; zeros; normal family

### 1 问题的提出

Bloch<sup>[1]</sup>曾经提出: 相应于每一个 Picard 型定理, 必定存在一个正规定则.

Picard 型定理: 设  $P$  是一个亚纯函数的性质, 若复平面上的亚纯函数  $f$  在复平面  $\mathbb{C}$  上满足性质  $P$ , 即  $\langle f, \mathbb{C} \rangle \in P$ , 则必有  $f \equiv$  常数. 根据 Bloch 原

理, 那么对于区域  $D$  上的亚纯函数族  $\mathcal{F}$ , 它的每一个元素  $f$  在区域  $D$  上满足性质  $P$ , 即  $\langle f, \mathbb{C} \rangle \in P$ , 则必在区域  $D$  上正规.

1959 年, Hayman<sup>[2]</sup>证明了如下的 Picard 型定理 1, 取性质  $P_1 = \{f(z) \neq 0, f^{(k)}(z) \neq 1, k \in \mathbb{Z}^+\}$ .

**定理 1** 设  $f$  为复平面  $\mathbb{C}$  上的亚纯函数, 若  $f \in P_1$ , 则  $f \equiv$  常数.

1979 年, 顾永兴<sup>[3]</sup>证明了对应的正规定则, 得

收稿日期: 2015-09-18

基金项目: 国家自然科学基金青年基金资助项目(11401381)

第一作者: 洪苏敏(1992-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 复分析. E-mail: hongsuminyun@163.com

通信作者: 刘晓俊(1982-), 男, 副教授. 研究方向: 复分析. E-mail: xiaojunliu2007@hotmail.com

到了定理2.

**定理2** 设  $\mathcal{F}$  为区域  $D$  的亚纯函数族,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , 若对于任意的  $f \in \mathcal{F}, f \in P_1$ , 则  $\mathcal{F}$  在  $D$  内正规.

由此可见, 上述性质  $P_1$  满足 Bloch 原理.

此后, 杨乐<sup>[4]</sup>、庞学诚等<sup>[5-6]</sup>、方明亮等<sup>[7]</sup>、常建明<sup>[8]</sup>均对上述  $P_1$  下所得的正规定则作了不同程度的推广.

2013年, 童晓丽等<sup>[9]</sup>首先考虑将“ $f(z) \neq 0$ ”减弱为“ $f(z)$ 的零点分布在一条给定的直线上”, 得到了定理3.

**定理3** 设  $\mathcal{F}$  是定义在单位圆盘  $D$  上的亚纯函数族, 若存在  $M \geq 0$ , 使得对于任意  $f \in \mathcal{F}$ , 满足以下条件, 则  $\mathcal{F}$  在  $D$  上正规:

- $f(z) = 0 \Rightarrow |f'| \leq M$ ;
- $f(z)$  的零点分布在一直线上;
- $f(z)$  的极点重级  $m \geq 3$ ;
- $f'(z) \neq 1$ .

2014年, 张培<sup>[10]</sup>将定理3中的条件“ $f'(z) \neq 1$ ”改为“ $f'(z) \neq z$ ”, 得到定理4.

**定理4** 设  $\mathcal{F}$  是定义在单位圆盘  $D$  上的亚纯函数族, 若存在  $M \geq 0$ , 使得对于任意  $f \in \mathcal{F}$ , 满足以下条件, 则  $\mathcal{F}$  在  $D$  上正规:

- $f(z) = 0 \Rightarrow |f'| \leq M|z|$ ;
- $f(z)$  的零点分布在一直线上;
- $f(z)$  的极点重级  $m \geq 3$ ;
- $f'(z) \neq z$ .

本文在上述定理的基础上, 将例外函数推广到一般形式  $z^m$ , 得到定理5.

**定理5** 设  $\mathcal{F}$  是定义在单位圆盘  $D$  上的亚纯函数族, 若存在  $M \geq 0$ , 使得对于任意  $f \in \mathcal{F}$ , 满足以下条件, 则  $\mathcal{F}$  在  $D$  上正规:

- $f(z)$  的零点分布在一直线上;
- $f(z) = 0 \Rightarrow |f'| \leq M|z^m|$ ;
- $f(z)$  的极点重级  $l \geq 3$ ;
- $f'(z) \neq z^m$ , 这里  $m \in \mathbb{Z}^+$ .

下面通过一些例子来说明定理5中条件a和c的必要性.

**例1** 取  $f_n(z) = \frac{z^{m+1+l} - 1/n^{m+1+l}}{(m+1)z^l}$ , 这里  $m \in \mathbb{Z}^+, l \geq 3 \in \mathbb{Z}, z \in D, D = \{|z| < 1\}$  是单位圆盘. 简单计算可得

$$f_n = 0 \Rightarrow |f'_n| \leq \left(1 + \frac{l}{m+1}\right) |z^m|$$

且  $f'_n(z) \neq z^m$ , 但是  $\{f_n\}$  在  $z=0$  处不正规. 这是由于  $f_n$  的零点  $z_{n,i} = \frac{1}{n}\omega_i$  分布在圆周  $|z| = \frac{1}{n}$  上的缘故, 即条件a是必须的.

**例2** 取  $f_n(z) = \frac{(z^2 - 1/n^2)^2}{2z^2}, z \in D, D = \{|z| < 1\}$  是单位圆盘. 由于  $f_n$  的零点均为2重, 故显然有

$$f_n = 0 \Rightarrow |f'_n| \leq M|z|$$

且  $f'_n(z) \neq z$ , 但是  $\{f_n\}$  在  $z=0$  处不正规. 这是由于  $f_n$  的极点仅为2重, 即条件c是必须的.

注意到例1中  $M = 1 + \frac{l}{m+1} > 1$ , 而例2中尽管  $M=0$ , 但  $f_n$  有且仅有两个不同的零点. 以下列出  $M \leq 1$ , 并且不同零点个数大于2的例子.

**例3** 取

$$f_n(z) = \frac{\left(z - \frac{1}{n}\right)^2 \left(z + \frac{3}{n}\right) \left(z + \frac{5}{n}\right)}{3\left(z + \frac{6}{n}\right)},$$

$$z \in D, D = \{|z| < 1\}$$

简单计算得

$$f'_n(z) = z^2 - \frac{1}{3\left(z + \frac{6}{n}\right)^2} \frac{147}{n^4} \neq z^2$$

当  $z_{n,0} = \frac{1}{n}$  时,  $f'_n(z_{n,0}) = 0$ , 故  $|f'_n(z_{n,0})| \leq |z_{n,0}|$ ; 而当  $z_{n,1} = -\frac{3}{n}$  时,  $f'_n(z) = \frac{32}{9n^2}$ ; 当  $z_{n,2} = -\frac{5}{n}$  时,  $f'_n(z) = -\frac{24}{n^2}$ , 故  $|f'_n(z_{n,j})| \leq |z_{n,j}|$ ,  $j=1,2$ . 但显然,  $\{f_n\}$  在  $z=0$  处不正规. 这是由于  $f_n$  仅有简单极点, 即不满足条件c.

**例4** 取

$$f_n(z) = \frac{(z^2 - (1/n + 1/n^2)^2)(z^2 - (1/n - 1/n^2)^2)}{2z^2},$$

$$z \in D, D = \{|z| < 1\} \text{ 是单位圆盘}$$

$$f'_n(z) = z - \frac{(1/n + 1/n^2)^2(1/n - 1/n^2)^2}{z^3} \neq z$$

且简单计算可得

$$\frac{1/n + 1/n^2}{1/n - 1/n^2} \rightarrow 1$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 故显然有  $f_n = 0 \Rightarrow |f'_n| \leq M|z|$ , 且这里的  $M > 0$  可取为任意小. 但是,  $\{f_n\}$  在  $z=0$  处不正规. 实际上, 这个例子是对例2中函数  $f_n$  的两个不同的重级零点作扰动所得.

**例5** 取

$$f_n(z) = \frac{\left(z^{m+1} - \frac{1}{n^{m+1}}\right)^2}{(m+1)z^{m+1}},$$

$$z \in D, D = \{ |z| < 1 \}$$

显然,  $f_n$  的零点都是二重的, 故  $M=0$ , 且  $f'_n(z) = z^m + \frac{1}{n^{m+1}} \frac{1}{z^{m+2}} \neq z^m$ . 但是,  $\{f_n\}$  在  $z=0$  处不正规.

上面的反例中当零点不位于直线时, 都位于某个圆心在原点的圆周上, 接下来研究是否存在其他情况.

例6 取

$$f_n(z) = \frac{\left(z + \frac{5+5i}{n}\right)\left(z + \frac{4+5i}{n}\right)\left(z - \frac{3+5i}{n}\right)}{2\left(z + \frac{6+5i}{n}\right)},$$

$$z \in D, D = \{ |z| < 1 \}$$

简单计算得

$$f'_n(z) = z + \frac{9+10i}{n^3 \left(z + \frac{6+5i}{n}\right)^2} \neq z$$

当  $z_{n,0} = -\frac{5+5i}{n}$  时,  $f'_n(z_{n,0}) = \frac{4+5i}{n}$ , 故

$$|f'_n(z_{n,0})| \leq |z_{n,0}|$$

同理可得, 当  $z_{n,1} = -\frac{4+5i}{n}$ ,  $z_{n,2} = \frac{3+5i}{n}$  时,  $|f'_n(z_{n,j})| \leq |z_{n,j}|$ ,  $j=1,2$ . 但显然,  $\{f_n\}$  在  $z=0$  处不正规.

## 2 相关引理

引理1 (Pang-Zalcman 引理)<sup>[11]</sup> 设  $\mathcal{F}$  是区域  $D$  内的亚纯函数族, 零点重级至少是  $k(\geq 1)$ , 且存在  $A \geq 1$ , 使得对任意  $f \in \mathcal{F}$ , 当  $f(z) = 0$ , 必有  $|f^{(k)}(z)| \leq A$ . 若  $\mathcal{F}$  在  $z_0$  处不正规, 那么对于每一个  $\alpha, 0 \leq \alpha \leq k$ , 必存在以下条件使得  $g_n(\zeta) = \rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n \zeta) \xrightarrow{\chi} g(\zeta)$  ( $g(\zeta)$  是非常值有穷级亚纯函数, 并且满足  $g^\#(\zeta) \leq g^\#(0) = kA+1$ ):

- 点列  $z_n \rightarrow z_0$ ;
- 函数列  $f_n \in \mathcal{F}$ ;
- 正数列  $\rho_n \rightarrow 0^+$ .

引理2<sup>[1]</sup> 设  $f$  在  $\mathbb{C}$  上非常值亚纯,  $b \neq 0$  是复常数,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , 则  $f$  或  $f^{(k)} - b$  有零点; 若  $f$  为超越亚纯函数, 则  $f$  或  $f^{(k)} - b$  有无穷多个零点.

引理3<sup>[12]</sup> 设  $f$  为  $\mathbb{C}$  上有穷级亚纯函数, 则对于  $f$  的每一个非直接渐近值  $a$ , 存在  $z_n$ , 使得

$f(z_n) \rightarrow a$ , 且  $f'(z_n) = 0$ .

引理4<sup>[13]</sup> 设  $f$  是  $\mathbb{C}$  上的亚纯函数, 其有限临界值集和渐近值集有界, 则存在正数  $r_0$ , 使得当  $|z| > r_0$  和  $|f(z)| > r_0$  时, 有

$$|f'(z)| \geq \frac{|f(z)| \lg |f(z)|}{16\pi |z|}$$

引理5<sup>[6]</sup> 设  $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 + \frac{q(z)}{p(z)}$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  是常数,  $a_n \neq 0$ ,  $q(z)$ ,  $p(z)$  是两个互素的多项式, 且  $\deg q < \deg p$ ,  $k$  是一正整数. 若  $f^{(k)} \neq 1$ , 则有

a.  $n = k$ , 且  $n! a_n = 1$ ;

b.  $f(z) = \frac{1}{k!} z^k + \dots + a_1 z + a_0 + \frac{1}{(az+b)^m}$ ;

c. 若  $f(z)$  的零点重级均  $\geq k+1$ , 则结论 b 中  $m=1$ , 且  $f(z) = \frac{(cz+d)^{k+1}}{az+b}$ , 其中  $a, b, c, d$  是常数,  $a \neq 0, c \neq 0$ .

引理6 设  $f$  是  $\mathbb{C}$  上的非常值有穷级亚纯函数,  $M > 0$  是常数,  $f(z) = 0 \Rightarrow |f'(z)| \leq M |z^m|$ , 且  $f'(z) \neq z^m$ , 则或者  $f(z) = \frac{z^{m+1}}{m+1} + a + \frac{b}{(z-c)^l}$ , 其中  $a, b (\neq 0), c$  是有穷复数,  $l \in \mathbb{Z}^+$ , 或者  $f(z) = \frac{z^{m+1}}{m+1} + \alpha z + \beta$ , 其中  $\alpha (\neq 0), \beta$  是有穷复数.

证明 倘若  $f(z)$  为超越亚纯函数, 由引理2,  $f(z)$  有无穷多个零点, 不妨记作  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ . 令  $g(z) = f(z) - \frac{z^{m+1}}{m+1}$ . 由于  $g'(z) = f'(z) - z^m \neq 0$ , 由引理3,  $g(z)$  没有临界点. 所以  $g(z)$  没有非直接渐近值, 而  $\rho_g = \rho_G < \infty$ .

故由 Denjoy-Carelman-Ahlfors 的结果,  $g(z)$  的直接渐近值  $\leq 2\rho_g$  个, 于是  $g(z)$  的有穷临界值和渐近值构成的集合有界.

不妨设  $R_0$  是它的某个上界, 则由引理4得

$$|g'(z)| > \frac{|g(z)| \lg |g(z)|}{16\pi |z|}$$

只要  $|g(z)| \geq R^2$  即可.

因为  $g(z_n) = f(z_n) - \frac{z_n^{m+1}}{m+1} = -\frac{z_n^{m+1}}{m+1} \rightarrow \infty$ , 所

以在上式中取  $z = z_n$  得

$$\lg |g(z_n)| < 16\pi \frac{|g'(z_n)| |z_n|}{|g(z_n)|}$$

由  $f(z) = 0 \Rightarrow |f'(z)| \leq M |z^m|$  得  $|g'(z_n)| \leq (M+1) |z_n^m|$ . 于是

$$16\pi \frac{|g'(z_n)| |z_n|}{|g(z_n)|} \leq 16\pi \frac{(M+1) |z_n^{m+1}|}{|z_n^{m+1}|/m+1} = \frac{16(M+1)(m+1)\pi}{m+1}$$

但  $\lg |g(z_n)| = \lg \frac{|z_n^{m+1}|}{m+1} \rightarrow \infty$ , 矛盾. 故  $f(z)$  不是超越亚纯函数, 即  $f(z)$  为有理函数, 分两种情况讨论:

a.  $f(z)$  为多项式.

由于  $f'(z) \neq z^m$ , 所以  $f'(z) = z^m + \alpha, \alpha \neq 0$ ,

积分得  $f(z) = \frac{z^{m+1}}{m+1} + \alpha z + \beta$ .

b.  $f(z)$  是非多项式有理函数.

令  $h(z) = f(z) - \frac{z^{m+1}}{m+1} + z$ , 则  $h'(z) = f'(z) - z^m + 1$ .

因为  $f'(z) \neq z^m$ , 所以  $h'(z) \neq 1$ . 由引理 5, 得

$$h(z) = z + a_0 + \frac{1}{(az + b)^l}$$

则

$$f(z) = h(z) + \frac{z^{m+1}}{m+1} - z = \frac{z^{m+1}}{m+1} + a + \frac{b}{(z+c)^l}$$

即得引理 6.

### 3 定理 5 的证明

由定理 3, 只要证明  $\mathcal{F}$  在  $z=0$  处正规即可.

令  $\mathcal{F}_1 = \left\{ F = \frac{f}{z^m} : f \in \mathcal{F} \right\}$ , 下证  $\mathcal{F}$  在  $z=0$  处正规, 即证  $\mathcal{F}_1 = \left\{ F = \frac{f}{z^m} : f \in \mathcal{F} \right\}$  在  $z=0$  处正规.

假设  $\mathcal{F}_1$  在  $z=0$  处不正规.

由引理 1, 存在  $z_n \rightarrow 0, \rho_n \rightarrow 0^+, F_n \in \mathcal{F}_1$ , 使得

$$g_n(\zeta) = \frac{F_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n} = \frac{f_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n (z_n + \rho_n \zeta)^m} \xrightarrow{\chi} g(\zeta)$$

其中,  $g$  为非常值有穷级亚纯函数, 且满足  $g^\#(\zeta) \leq g^\#(0) = M+1$ .

显然, 易得  $g(\zeta) = 0 \Rightarrow |g'(\zeta)| \leq M, g(\zeta)$  的零点分布在一条直线上. 接着, 分两种情况讨论.

情况 1  $\frac{z_n}{\rho_n} \rightarrow \infty$ .

断言  $g'(\zeta) \neq 1$ .

设  $g'(\zeta_0) = 1$ , 显然  $g'(\zeta) \equiv 1$ . 倘若不然,

$g(\zeta) = \zeta + c, g^\#(0) = \frac{|g'(0)|}{1 + |g^2(0)|} = \frac{1}{1 + c^2} < 1$  与  $g^\#(0) = 1 + M$  矛盾. 由 Hurwitz 定理, 存在  $\zeta_0$  的某

领域  $U$ , 使得  $g_n(\zeta)$  在  $U$  内全纯, 且  $g_n(\zeta) \Rightarrow g(\zeta), g_n'(\zeta) \Rightarrow g'(\zeta)$  在  $U$  内. 又  $g_n'(\zeta) = \frac{f_n'(z_n + \rho_n \zeta)}{(z_n + \rho_n \zeta)^m} - \frac{m \rho_n}{z_n + \rho_n \zeta} g_n(\zeta)$ , 故  $\frac{f_n'(z_n + \rho_n \zeta)}{(z_n + \rho_n \zeta)^m} = g_n'(\zeta) + \frac{m}{z_n / \rho_n + \zeta} g_n(\zeta) \Rightarrow g'(\zeta)$  在  $U$  内. 于是, 由 Hurwitz 定理, 存在  $\zeta_n, \zeta_n \rightarrow \zeta_0$ , 使得  $\frac{f_n'(z_n + \rho_n \zeta)}{(z_n + \rho_n \zeta)^m} = 1$ , 即  $f_n'(z_n + \rho_n \zeta) = (z_n + \rho_n \zeta)^m$ , 矛盾. 断言成立. 并且, 此时  $g(\zeta)$  的极点重级至少为 3, 故由定理 3 的证明可得上述  $g(\zeta)$  不存在, 即情况 1 不成立.

情况 2  $\frac{z_n}{\rho_n} \rightarrow \alpha \neq \infty \in \mathbb{C}$ .

令

$$G_n(\zeta) = \frac{f_n(\rho_n \zeta)}{\rho_n^{m+1}}$$

显然

$$G_n(\zeta) = \frac{f_n\left(z_n + \rho_n\left(\zeta - \frac{z_n}{\rho_n}\right)\right)}{\rho_n\left(z_n + \rho_n\left(\zeta - \frac{z_n}{\rho_n}\right)\right)^m} \zeta^m \Rightarrow g(\zeta - \alpha) \zeta^m = G(\zeta)$$

而  $g_n(\zeta)$  以  $\zeta_n = -\frac{z_n}{\rho_n} \rightarrow -\alpha$  为  $m$  重极点, 并且  $f_n(z_n + \rho_n \zeta)$  亚纯, 故  $g(\zeta)$  以  $-\alpha$  为至少  $m$  重极点, 则  $G(0) \neq 0$ .

显然, a.  $G(\zeta) = 0 \Rightarrow |G'(\zeta)| \leq M |\zeta^m|$ ; b.  $G$  的极点重数至少为 3; c.  $G$  的零点分布在一条直线上. 以下再分两种情况讨论.

情况 2.1  $G'(\zeta) \neq \zeta^m$ .

由定理 5 的条件 d 可知,  $G'(\zeta) \neq \zeta^m$ , 再由  $\rho_G = \rho_g$  得,  $G(\zeta)$  满足引理 6 的条件, 故

$$G(\zeta) = \frac{\zeta^{m+1}}{m+1} + a + \frac{b}{(\zeta + c)^l}$$

或

$$G(\zeta) = \frac{\zeta^{m+1}}{m+1} + \alpha \zeta + \beta$$

这里  $a, b \neq 0, c$  和  $\alpha \neq 0, \beta$  都是复常数,  $l \in \mathbb{Z}^+$ .

倘若  $G(\zeta) = \frac{\zeta^{m+1}}{m+1} + a + \frac{b}{(\zeta + c)^l}$ . 不妨假设  $G(\zeta)$  的零点分布在直线  $L: \zeta = pt + q$  上, 这里  $p \neq 0, q \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$ . 取  $H(\xi) = G(p\xi + q) = \frac{(p\xi + q)^{m+1}}{m+1} + a + \frac{b}{(p\xi + q + c)^l}, \xi \in \mathbb{C}$ . 显然,  $H$  有且只有实零点, 下证这样的  $H(\xi)$  是不存在的.

$$\text{改写 } H(\xi) = \frac{[A(\xi + \gamma)^{m+1} + a](\xi + \eta)^l + \tilde{b}}{(\xi + \eta)^l},$$

其中,  $\gamma = \frac{q}{p}$ ,  $\eta = \frac{q+c}{p}$ ,  $A = \frac{p^{m+1}}{m+1}$ ,  $\tilde{b} = \frac{b}{p^l}$ . 记

$$H(\xi) = \frac{M(\xi)}{(\xi + \eta)^l}, \text{ 这里 } M(\xi) = [A(\xi + \gamma)^{m+1} +$$

$a](\xi + \eta)^l + \tilde{b} = AM_1(\xi)$ , 其中  $M_1(\xi)$  是零点均为实零点的首一多项式,  $\deg M_1 = m + l + 1$ .

不妨设  $M_1(\xi)$  的零点分别为  $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in \mathbb{R}$ , 其重级记为  $s_1, s_2, \dots, s_n$ . 显然  $s_1 + s_2 + \dots + s_n = m + l + 1$ . 由罗尔定理,  $M_1'(\xi)$  至少有  $n - 1$  个不同的实零点  $\tau_j \in (t_j, t_{j+1})$ , 其重数分别记作  $\sigma_j$ , 这里  $j = 1, 2, \dots, n - 1$ . 而  $t_j$  作为  $M_1'(\xi)$  的零点重数为  $s_j - 1$ , 故  $M_1'(\xi)$  的零点重数至少为  $\sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j + \sum_{j=1}^n (s_j - 1)$ , 但  $\deg M_1' = m + l$ , 故  $\sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j + \sum_{j=1}^n (s_j - 1) \leq m + l$ , 即  $\sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j + m + l + 1 - n \leq m + l$ ,  $\sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j \leq n - 1$ , 可得  $\sigma_j = 1, j = 1, 2, \dots, n - 1$ .

另一方面,  $M_1'(\xi) = (\xi + \eta)^{l-1} [(m+1) \cdot (\xi + \gamma)^m (\xi + \eta) + l(\xi + \gamma)^{m+1} + al/A]$ , 则  $-\eta$  作为  $M_1'(\xi)$  的零点只可能是  $\tau_j$  中的某个, 故其重数只能是 1, 与  $l - 1 \geq 2$  矛盾.

于是,  $H(\xi)$  不存在, 从而这样的  $G(\zeta)$  亦不存在.

$$\text{此时, } G(\zeta) = \frac{\zeta^{m+1}}{m+1} + \alpha\zeta + \beta, \text{ 由 } G(0) \neq 0, \text{ 故}$$

$\beta \neq 0$ . 同样, 可以取

$$H(\xi) = G(p\xi + q) = \frac{(p\xi + q)^{m+1}}{m+1} +$$

$$\alpha(p\xi + q) + \beta$$

此时,  $H$  的所有实零点至多除了一个以外都是简单零点, 故其至少有  $m$  个不同实零点. 由罗尔定理, 注意到重级零点可以看作是两个简单零点,  $H'' = mp^2(p\xi + q)^{m-1}$  至少有  $m - 1$  个不同零点, 故  $m - 1 = 1$  或者  $m - 1 = 0$ , 即  $m = 2$  或者  $m = 1$ . 后者在文献[4]中已经证明, 这里仅证明  $m = 2$  的情况.

于是, 可以假设

$$G(\zeta) = \frac{1}{3}(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)$$

这里  $\zeta_j \neq 0$  且  $\sum_{j=0}^2 \zeta_j \neq 0$ , 其中  $j = 0, 1, 2$ .

再分两种情况讨论.

**情况 2.1.1** 存在  $\delta > 0$ , 使得  $f_n$  在  $\Delta(0, \delta)$  内无极点. 此时, 由于  $\{f_n\}$  在  $\Delta'(0, \delta)$  内正规, 在  $z = 0$

处不正规, 所以可得在  $\Delta'(0, \delta)$  内  $f \Rightarrow^\infty \infty$ . 由 Hurwitz 定理可得, 存在  $\zeta_{n,j}$ ,  $\zeta_{n,j} \rightarrow \zeta_j$ , 使得  $G_n(\zeta_{n,j}) = 0$ , 即  $f_n(\rho_n \zeta_{n,j}) = 0$ , 其中  $j = 0, 1, 2$ .

若存在  $\eta > 0$ , 使得  $f_n$  在  $\Delta(0, \eta)$  上仅以  $z_{n,j} = \rho_n \zeta_{n,j}$  为零点, 则令

$$H_n(z) = \frac{f_n(z)}{(z - z_{n,0})(z - z_{n,1})(z - z_{n,2})}$$

得  $H_n(z) \neq 0, z \in \Delta(0, \eta)$ , 在  $\Delta'(0, \eta)$  内  $H_n(z) \Rightarrow^\infty \infty$ , 故在  $\Delta(0, \eta)$  内  $H_n(z) \Rightarrow^\infty \infty$ .

但

$$H_n(2z_{n,0}) = \frac{f_n(2z_{n,0})}{(2z_{n,0} - z_{n,0})(2z_{n,0} - z_{n,1})(2z_{n,0} - z_{n,2})} = \frac{\rho_n^3 G_n(2\zeta_{n,0})}{\rho_n^3 \zeta_{n,0} \prod_{j=1}^2 (2\zeta_{n,0} - \zeta_{n,j})} \rightarrow \infty$$

矛盾.

于是, 任意  $\eta > 0$ ,  $f_n$  在  $\Delta(0, \eta)$  内除  $z_{n,j} (j = 0, 1, 2)$  外至少还有一个零点, 记为  $z_{n,3} = \rho_n \zeta_{n,3}$ , 显然当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\zeta_{n,3} \rightarrow \infty$ . 令  $K_n(z) = \frac{f_n(z_{n,3}z)}{z_{n,3}^3}$ , 易得  $\{K_n\}$  在  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  上正规.

若  $K_n$  在  $z = 0$  处正规, 则  $K_n$  在  $\mathbb{C}$  上正规, 记  $K_n \Rightarrow K$  在  $\mathbb{C}$  上.

$$\text{因为 } K_n\left(\frac{z_{n,0}}{z_{n,3}}\right) = 0, \frac{z_{n,0}}{z_{n,3}} = \frac{\rho_n \zeta_{n,0}}{\rho_n \zeta_{n,3}} = \frac{\zeta_{n,0}}{\zeta_{n,3}} \rightarrow 0,$$

故  $K(0) = 0$ .

$$K'_n(z) = \frac{f'_n(z_{n,3}z)}{z_{n,3}^2} \neq \frac{z_{n,3}^2 z^2}{z_{n,3}^2} = z^2$$

故由 Hurwitz 定理,  $K'(z) \equiv z^2$  或  $K'(z) \neq z^2$ . 显然, 由定理 5 条件 b, 得  $|K'(z)| \leq M|z|^2$ .

故

$$K = 0 \Rightarrow |K'| \leq M|z|^2 \left. \vphantom{\begin{matrix} K = 0 \\ K(0) = 0 \end{matrix}} \right\} \Rightarrow K'(0) = 0 \Rightarrow$$

$$K'(z) = z^2 \text{ 不成立}$$

但由

$$K'(z) \equiv z^2 \Rightarrow K(z) = \frac{z^3}{3} + c \left. \vphantom{\begin{matrix} K'(z) \equiv z^2 \\ K(0) = 0 \end{matrix}} \right\} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow$$

$$K(z) = \frac{z^3}{3} \Rightarrow K(1) = \frac{1}{3}$$

而  $K_n(1) = \frac{f_n(z_{n,3})}{z_{n,3}^3} = 0 \Rightarrow K(1) = 0$ , 矛盾.

因此,  $\{K_n(z)\}$  在  $z=0$  处不正规, 但  $K_n(z)$  在  $\Delta(0,1)$  内全纯, 故在  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  上,  $K_n \Rightarrow \infty$ , 这与  $K_n(1) = 0 \rightarrow 0$  矛盾.

**情况 2.1.2** 任意  $\delta > 0$ ,  $f_n(z)$  在  $\Delta(0, \delta)$  内有极点  $z_n^* = \rho_n \zeta_n^*$ . 由  $G$  的表达式得, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\zeta_n^* \rightarrow \infty$ .

令  $z_n^*$  为  $f_n$  模最小的极点, 则  $T_n(z) = \frac{f_n(z_n^* z)}{z_n^{*3}}$  在  $\Delta(0,1)$  内无极点. 显然  $\{T_n\}$  在  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  上正规.

若  $\{T_n\}$  在  $z=0$  处也正规, 则  $T_n(z) \Rightarrow T(z)$  在  $\mathbb{C}$  上.

$$\begin{aligned} \text{由 } T_n\left(\frac{z_{n,0}}{z_n^*}\right) &= 0, \frac{z_{n,0}}{z_n^*} = \frac{\zeta_{n,0}}{\zeta_n^*} \rightarrow 0 \text{ 得} \\ T(0) &= 0 \\ T_n'(z) &= \frac{f_n'(z_n^* z)}{z_n^{*2}} \neq \frac{z_n^{*2} z^2}{z_n^{*2}} = z^2 \end{aligned}$$

由 Hurwitz 定理得,  $T'(z) \equiv z^2$  或  $T'(z) \neq z^2$ . 同理,  $T(z) = 0 \Rightarrow |T'(z)| \leq M |z^m|$ , 所以  $T'(0) = 0$ , 即  $T'(z) \neq z^2$  不成立. 故  $T'(z) \equiv z^2$ ,  $T(z) = \frac{z^3}{3} + c$ , 由  $T(0) = 0$  得  $T(z) = \frac{z^3}{3}$ , 与  $T(1) = \infty$  矛盾.

于是,  $\{T_n\}$  在  $z=0$  处不正规. 由于  $T_n(z)$  在  $\Delta(0,1)$  上全纯, 故在  $\Delta'(0,1)$  上  $T_n(z) \Rightarrow \infty$ , 亦即在  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  上  $T_n(z) \Rightarrow \infty$ .

此时, 若  $f_n$  在  $\Delta(0, \delta)$  上仅有 3 个非零的零点  $z_{n,j} = \rho_n \zeta_{n,j}$ ,  $j=0,1,2$ , 则在  $\mathbb{C}$  上有

$$\frac{T_n(z)}{\prod_{j=0}^2 \left(z - \frac{z_{n,j}}{z_n^*}\right)} \rightarrow \infty$$

但当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\begin{aligned} \frac{T_n\left(2\frac{z_{n,0}}{z_n^*}\right)}{\prod_{j=0}^2 \left(2\frac{z_{n,0}}{z_n^*} - \frac{z_{n,j}}{z_n^*}\right)} &= \frac{\frac{f_n(2z_{n,0})}{z_n^{*3}}}{\frac{z_{n,0}^2}{z_n^*} \prod_{j=1}^2 \left(2\frac{z_{n,0}}{z_n^*} - \frac{z_{n,j}}{z_n^*}\right)} = \\ &= \frac{\frac{f_n(2z_{n,0})}{z_{n,0} \prod_{j=1}^2 (2z_{n,0} - z_{n,j})}}{\frac{G_n(2\zeta_{n,0})}{\zeta_{n,0} \prod_{j=1}^2 (2\zeta_{n,0} - \zeta_{n,j})}} \not\rightarrow \infty \end{aligned}$$

矛盾.

于是,  $f_n$  在  $\Delta(0, \delta)$  上至少还有一个零点  $z_{n,3} = \rho_n \zeta_{n,3}$ ,  $\zeta_{n,3} \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

下面再分 3 种情况讨论:

**情况 2.1.2.1** 若  $\frac{\zeta_{n,3}}{\zeta_n^*} \rightarrow \infty$ , 则  $T_n(z)$  在

$\Delta(0, \delta)$  内也只有 3 个零点  $\frac{z_{n,j}}{z_n^*}$ ,  $j=0,1,2$ , 处理方法如上.

**情况 2.1.2.2** 若  $\frac{\zeta_{n,3}}{\zeta_n^*} \rightarrow \tau$ , 其中  $\tau$  为常复数,  $\tau \neq 0$  且  $\tau \neq \infty$ , 则  $T_n\left(\frac{z_{n,3}}{z_n^*}\right) = \frac{f_n(z_{n,3})}{z_n^{*3}} = 0$ , 且  $\frac{z_{n,3}}{z_n^*} = \frac{\zeta_{n,3}}{\zeta_n^*} \rightarrow \tau \neq 0, \infty$ , 与  $T_n(z) \Rightarrow \infty$  于  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  上相矛盾.

**情况 2.1.2.3** 若  $\frac{\zeta_{n,3}}{\zeta_n^*} \rightarrow 0$ , 则取  $L_n(z) = \frac{f_n(z_{n,3} z)}{z_{n,3}^3}$ , 可得  $L_n(z)$  在  $\Delta(0,1)$  内只有 3 个零点  $\frac{z_{n,j}}{z_{n,3}}$ ,  $j=0,1,2$ , 且没有极点.  $\{L_n(z)\}$  在  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  上正规. 由情况 2.1.1 的讨论可得矛盾.

**情况 2.2**  $G'(\zeta) \equiv \zeta^m$ .

若  $G'(\zeta) \equiv \zeta^m$ , 则  $G(\zeta) = \frac{\zeta^{m+1}}{m+1} + c$ , 其中  $c \in \mathbb{R}$  为常数. 又因为  $G(0) \neq 0$ , 所以  $c \neq 0$ .

由于  $G$  的零点位于一条直线上, 同理可得  $m=1$ . 于是, 可假设  $G(\zeta) = \frac{1}{2}(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)$ , 其中  $\zeta_j \neq 0$  且  $\zeta_0 + \zeta_1 = 0$ . 类似于情况 2.1, 同样可得矛盾. 故在  $D$  内正规. 定理得证.

## 4 定理 5 的相关分析

在定理 5 的证明过程中, 可得

$$G(\zeta) = \frac{\zeta^{m+1}}{m+1} + a + \frac{b}{(\zeta + c)^l}$$

这里  $b \neq 0$  是常数. 若此时,  $G$  仅有简单极点, 则  $l=1$ , 且

$$G(\zeta) = \frac{H(\zeta)}{(m+1)(\zeta + c)}$$

这里

$H(\zeta) = (\zeta + c)[\zeta^{m+1} + (m+1)a] + (m+1)b$  由定理 1 的条件 a 可得,  $H$  的零点分布在一条直线上. 不妨设其在实轴上, 即  $H$  仅有实零点. 因为  $\deg H = m+2$ , 所以  $H$  有  $m+2$  个实零点 (计重数). 由罗尔定理得,  $H'$  有  $m$  个实零点 (计重数). 但  $H''(\zeta) = (m+1)\zeta^{m-1}[2\zeta + m(\zeta + c)]$ , 其至多仅有两个不同零点.

**a.** 若  $c=0$ , 则  $H'$  以 0 为  $m$  重零点, 故当  $m \geq 2$  时,  $H$  至多仅有两个不同零点. 设  $H = (\zeta - x_0)^p \cdot$

$(\zeta - x_1)^q$ , 由于

$$H(\zeta) = \zeta^{m+2} + (m+1)a\zeta + b(m+1)$$

故  $x_0 \neq x_1$ . 再由  $p+q = m+2 \geq 4$  得,  $p \geq 2$  或者  $q \geq 2$ . 若  $p, q \geq 2$ , 则由罗尔定理得,  $H''$  至少有两个不同零点, 矛盾. 故  $p, q$  中至少一个为 1, 不妨设  $p=1, q=m+1$ , 则由  $b \neq 0$  得,  $x_1 \neq 0$ , 故  $H = (\zeta - x_0)(\zeta - x_1)^{m+1}$ ,  $H''(x_1) = 0$ , 矛盾. 更进一步, 若  $m=1$ , 则不妨设

$$H(\zeta) = (\zeta - x_0)(\zeta - x_1)(\zeta - x_2) = \zeta^3 + 2a\zeta + 2b$$

由于  $b \neq 0$ , 且  $x_i \in \mathbb{R}$ , 故  $a \neq 0$ . 两边展开比较得,  $-x_0x_1x_2 = 2b$ . 再由定理1的条件b得  $|G'(x_i)| \leq M|x_i|$ , 代入前式得,  $\left|1 + \frac{x_jx_k}{2x_i^2}\right| \leq M, i=0, 1, 2, j, k \neq i$ . 此时, 若要求  $M \leq 1$ , 则必有  $x_jx_k < 0$ , 则必存在某个  $j \neq k$ , 使得  $x_j = x_k$ . 不妨设  $x_0 = x_1$ , 再由  $x_0 + x_1 + x_2 = 0$  得,  $x_2 = -2x_0 \neq 0$ , 再代入  $|G'(x_2)| \leq M|x_2|$ , 得  $\left|1 + \frac{x_0x_1}{2x_2^2}\right| = \left|1 + \frac{x_0^2}{4x_0^2}\right| = \frac{5}{4} \leq M$ , 矛盾.

b. 若  $c \neq 0$ , 则  $H''$  以 0 为  $m-1$  重零点, 以  $-\frac{mc}{m+2}$  为简单零点, 故当  $m \geq 3$  时,  $H$  至多仅有两个不同零点. 设  $H = (\zeta - x_0)^p(\zeta - x_1)^q$ , 由于

$$H(\zeta) = (\zeta + c)[\zeta^{m+1} + (m+1)a] + (m+1)b$$

故  $x_0 \neq x_1$ . 再由  $p+q = m+2 \geq 5$  得,  $p \geq 3$  或者  $q \geq 3$ . 若  $p, q \geq 3$ , 则由罗尔定理得,  $H''$  至少有 3 个不同零点, 矛盾. 故  $p, q$  中至少一个为 2, 不妨设  $p=2, q=m$ , 则由  $m \geq 3$  得  $x_1 \neq 0$ , 再由罗尔定理得,  $H''$  至少有 3 个不同零点, 矛盾.

综上所述, 当函数族  $F$  仅有简单极点时, 其反例应该类似于例 3. 同理可得, 当  $F$  的极点为二重时, 其反例也应该类似于例 2 或者例 4.

#### 参考文献:

[1] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用[M].

北京: 科学出版社, 2007.

- [2] HAYMAN W K. Meromorphic functions[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964: 17-65.
- [3] GU Y X. A normal criterion of meromorphic families[J]. Scientia Sinica, 1979, 1: 267-274.
- [4] YANG L. The normality of meromorphic fuctions[J]. Science in China(Series A), 1986, 29(9): 897-908.
- [5] PANG X C, YANG D G, ZALCMAN L. Normal families of meromorphic functions whose derivatives omit a function[J]. Computational Methods and Function Theory, 2003, 2(1): 257-265.
- [6] PANG X C, ZALCMAN L. Normal families of meromorphic functions with multiple zeros and poles[J]. Israel Journal of Mathematics, 2003, 136(1): 1-9.
- [7] WANG Y F, FANG M L. Picard values and normal families of meromorphic functions with multiple zeros[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 1998, 14(1): 17-26.
- [8] CHANG J M. Normality and quasnormality of zero-free meromorphic functions[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2012, 28(4): 707-716.
- [9] 童晓丽, 刘晓俊. 零点位于直线上的亚纯函数的正规规则[J]. 上海理工大学学报, 2014, 36(4): 362-365.
- [10] 张培. 涉及零点分布的亚纯函数的正规规则[D]. 上海: 上海理工大学, 2014.
- [11] PANG X C, ZALCMAN L. Normal families and shared values[J]. Bulletin of the London Mathematical Society, 2000, 32(3): 325-331.
- [12] BERGWEILER W, EREMENKO A. On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order[J]. Revista Matematica Iberoamericana, 1995, 11(2): 355-373.
- [13] BERGWEILER W. On the zeros of certain homogeneous differential polynomials[J]. Archiv der Mathematik, 1995, 64(3): 192-202.

(编辑: 丁红艺)