

一些拉普拉斯谱确定的图

王玉洁, 何常香

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 如果与图 G 同拉普拉斯谱的图都与图 G 同构, 则称图 G 由它的拉普拉斯谱确定. 给出了三类基图为 $B(P_3, P_3, P_3)$ (即连接 2 点的 3 条长为 2 的内不交的路) 的连通二部双圈图类 $H(n; n_1), H(n; n_1, n_2)$ 和 $B(n; n_1, n_2)$. 证明了 $H(n; n_1), H(n; n_1, n_2)$ 和 $B(n; n_1, n_2)$ 是拉普拉斯谱确定的, 且与完全图经并接运算后所得图也是拉普拉斯谱确定的.

关键词: 二部双圈图; 拉普拉斯矩阵; 拉普拉斯谱确定

中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

Some Graphs Determined by Their Laplacian Spectrum

WANG Yujie, HE Changxiang

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: A graph is said to be determined by its Laplacian spectrum, if there is no other non-isomorphic graph with the same Laplacian spectrum. Three types of bicyclic bipartite graphs $H(n; n_1), H(n; n_1, n_2)$ and $B(n; n_1, n_2)$, which all have the base of $B(P_3, P_3, P_3)$ (three disjoint paths of length 2 between two vertices) were studied. It is proved that the graphs are determined by their Laplacian spectrum, and the graphs obtained by the join of complete graphs and the above three type bicyclic graphs are also determined by their Laplacian spectrum.

Keywords: bipartite bicyclic graph; Laplacian matrix; determination by the Laplacian spectrum

1 问题的提出

所考虑的图都是简单连通无向图. n 阶连通图 $G = (V, E)$ 称为双圈图, 若 G 中恰含 $n+1$ 条边. 用 $A(G) = (a_{ij})$ 表示图 G 的邻接矩阵, 其中, 若 $v_i v_j \in E(G)$, 则 $a_{ij} = 1$; 若 $v_i v_j \notin E(G)$, 则 $a_{ij} = 0$. 用 $D(G) = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 表示图 G 的顶

度对角矩阵. 矩阵 $L(G) = D(G) - A(G)$ 为图 G 的拉普拉斯矩阵, $L(G)$ 的特征多项式定义为 G 的拉普拉斯特征多项式, 记为

$$\varphi(G; x) = \det(xI_n - L(G)) =$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} l_{n-k}(G) x^k$$

令 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n = 0$ 是 $L(G)$ 的所有特征值, 这些特征值构成的多重集合称为图 G 的拉普拉

收稿日期: 2015-12-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11201303); 上海市自然科学基金资助项目(12ZR1420300)

第一作者: 王玉洁(1991-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 组合数学与图论. E-mail: 569971787@qq.com

通信作者: 何常香(1979-), 女, 副教授. 研究方向: 组合数学与图论. E-mail: changxianghe@hotmail.com

斯谱. 如果与图 G 同拉普拉斯谱的图都与图 G 同构, 则称图 G 由它的拉普拉斯谱确定, 简记为 DLS.

“哪些图可由它们的谱确定?” 这一问题是在 1957 年发现第一对同谱图后提出的^[1]. 关于同谱图的研究是图谱理论中一个有趣且困难的问题. 1966 年, Fisher 在考虑 Kac^[2] 提出的“一个人能否听到鼓声的形状”的问题时, 研究的正是图的谱确定问题. 文献[3]提到恰有 n 个点的图, 不能由谱确定的图比能由谱确定的图多. 在这个结果出现以后, 研究图的谱确定性问题变得热门起来. 之后, 人们又开始研究拉普拉斯谱确定的问题. 如文献[4]证明了 T-型树是拉普拉斯谱确定的, 文献[5]证明了双星图由其拉普拉斯谱确定, 文献[6-7]分别证明了 ∞ 型图和 3-玫瑰图是拉普拉斯谱确定的. 文献[8-10]分别证明了棒棒糖图、太阳图和沙漏图是拉普拉斯谱确定的. 文献[11]研究了双圈图的无符号拉普拉斯特征多项式系数. 文献[12]研究了关于 H -联图的拉普拉斯特征值. 受这些工作的启发, 本文研究了二部双圈图与完全图并接后所得图的拉普拉斯谱确定性.

2 基本定义

二部双圈图定义为既是双圈图又是二部图的图. 将全体 n 阶双圈图构成的集合用 $B(n)$ 表示. 由双圈图定义可知, G 为双圈图当且仅当 G 可由同阶的树增加 2 条新边而得到. 若 G 是一个双圈图, 称 G 的唯一的极小双圈子图为 G 的基图, 记为 $\hat{G}$. 将图中度数为 1 的点称为悬挂点. 显然, $\hat{G}$ 为 G 的唯一不含悬挂点的双圈子图.

不含悬挂点的双圈图可以分为 $B(p, l, q)$ (其中, $l \geq 0, p \geq 3, q \geq 3$) 和 $B(P_s, P_m, P_l)$ (其中, $2 \leq m \leq \min\{s, l\}$) 两种.

$B(p, l, q)$ 是在圈 C_p 中的点 u 和圈 C_q 中的点 v 加 1 条长为 l 的新路 $uv_1v_2 \cdots v_{l-1}v$ 得到的图, 如图 1 所示. 特别地, 当 $l=0$ 时, $B(p, 0, q)$ 是由唯一公共点 u (或 v) 的圈 C_p (或 C_q) 组成的图.

$B(P_s, P_m, P_l)$ 是由点 x 到点 y 的 3 条内点不交的路组成的图. 设这 3 条路分别为: 长为 $s-1$ 的路 $xv_1v_2 \cdots v_{s-2}y$, 长为 $m-1$ 的路 $xu_1u_2 \cdots u_{m-2}y$ 和长为 $l-1$ 的路 $xw_1w_2 \cdots w_{l-2}y$, 如图 1 所示.

可将双圈图按其基图分为如下两类:

$$B_1(n) = \{G \in B(n) \mid \hat{G} = B(p, l, q), p, q \geq 3, l \geq 0\}$$

$$B_2(n) = \{G \in B(n) \mid \hat{G} = B(P_s, P_m, P_l), 2 \leq m \leq \min\{s, l\}\}$$

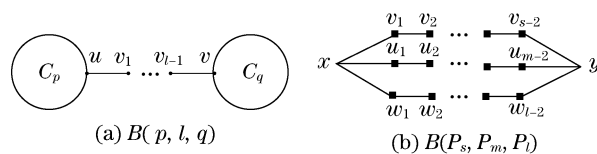


图 1 双圈图 $B(p, l, q)$ 和双圈图 $B(P_s, P_m, P_l)$

Fig.1 Bicyclic graphs $B(p, l, q)$ and $B(P_s, P_m, P_l)$

3 基本引理

现介绍一些证明主要结论时需要用到的引理. 本文图 G 的拉普拉斯特征多项式记为

$$\varphi(G; x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} l_{n-k}(G) x^k$$

引理 1^[13] 对于图 G , 由其拉普拉斯谱可以确定图 G 的以下参数:

- 顶点数;
- 边数;
- 连通分支数;
- 顶点度的平方和;
- 生成树个数.

引理 2^[13] 设图 G 的顶点集和边集分别为 $V(G) \neq \varphi$ 和 $E(G) \neq \varphi$, 有

$$\Delta + 1 \leq \mu_1 \leq \max \left\{ \frac{d_i(d_i + m_i) + d_j(d_j + m_j)}{d_i + d_j} \mid v_i v_j \in E(G) \right\}$$

式中: Δ 表示图 G 的最大度; m_i 是指与点 v_i 相邻

接的点的度的平均值, 即 $m_i = \frac{\sum_{v_j v_i \in E(G)} d_j}{d_i}$, m_i 有时也被称为平均二度.

引理 3^[14] 图 G 的拉普拉斯特征多项式中 x^k 的系数的绝对值

$$l_{n-k}(G) = \sum_{F \in F_k} \gamma(F)$$

式中: F_k 是图 G 的恰有 k 个连通分支的生成森林构成的集合; $\gamma(F)$ 为生成森林 $F \in F_k$ 的各连通分支顶点数的乘积.

引理 4^[15] 设图 G 是一个恰有 n 个顶点和 m 条边的图, $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 为图 G 的度序列, 则在 G 的拉普拉斯特征多项式中,

$$l_0(G) = 1, l_1(G) = -2m$$

$$l_2(G) = 2m^2 - m - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i^2$$

$$l_3(G) = \frac{1}{3} \left[-4m^3 + 6m^2 + 3m \sum_{i=1}^n d_i^2 - \sum_{i=1}^n d_i^3 - 3 \sum_{i=1}^n d_i^2 + 6n_G(C_3) \right]$$

$$l_{n-1}(G) = (-1)^{n-1} n \tau(G), l_n(G) = 0$$

式中: $\tau(G)$ 为图 G 的生成树数目; $n_G(C_3)$ 为图 G 中三角形数目.

引理 5 设 $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 和 $(d'_1, d'_2, \dots, d'_n)$ 分别为图 G 和 G' 的度序列, 记

$$q_3(G) = \sum_{i=1}^n (d_i - 2)^3 - 6n_G(C_3)$$

$$q_3(G') = \sum_{i=1}^n (d'_i - 2)^3 - 6n_{G'}(C_3)$$

若 G 与图 G' 有相同的拉普拉斯谱, 则 $q_3(G) = q_3(G')$.

证明 若 G 与 G' 拉普拉斯同谱, 则 $l_3(G) = l_3(G')$. 由引理 1 及引理 4 可知

$$6n_G(C_3) - \sum_{i=1}^n d_i^3 = 6n_{G'}(C_3) - \sum_{i=1}^n d_i^3$$

进一步有

$$\sum_{i=1}^n (d_i - 2)^3 - 6n_G(C_3) = \sum_{i=1}^n (d'_i - 2)^3 - 6n_{G'}(C_3)$$

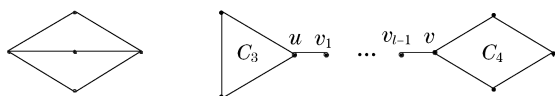
由生成树的定义, 可得引理 6.

引理 6 设图 G 是双圈图, $\tau(G)$ 是 G 的生成树数目.

a. 若 $\hat{G} = B(p, l, q)$, 则 $\tau(G) = pq$;

b. 若 $\hat{G} = B(P_s, P_m, P_l)$, 则 $\tau(G) = (s-1) \cdot (m-1) + (m-1)(l-1) + (l-1)(s-1)$.

引理 7 设双圈图 G 的基图 $\hat{G} = B(P_3, P_3, P_3)$, 如果图 G' 与图 G 同拉普拉斯谱, 则 G' 或有 $\hat{G}' = B(P_3, P_3, P_3)$ 或有 $\hat{G}' = B(3, l, 4)$ (见图 2).



(a) $B(P_3, P_3, P_3)$

(b) $B(3, l, 4)$

图 2 双圈图 $B(P_3, P_3, P_3)$ 和双圈图 $B(3, l, 4)$

Fig. 2 Bicyclic graphs $B(P_3, P_3, P_3)$ and $B(3, l, 4)$

证明 若图 G 和 G' 同拉普拉斯谱, 则 G' 也连

通, 且 G' 的边数与 G 的边数相同, 故 G' 也是双圈图. 由引理 6 可知, $\tau(G) = 12$, 故 $\tau(G') = 12$.

若 $\tau(G') = 12$, 分两种情况讨论.

情形 1 若 $\hat{G}' = B(p, l, q)$.

此时, 图 G' 的生成树数目为 $\tau(G') = pq = 12$.

因为, $p, q \geq 3$, 不失一般性, $p = 3, q = 4$, 故 $\hat{G}' = B(3, l, 4)$.

情形 2 若 $\hat{G}' = B(P_s, P_m, P_l)$.

此时, 图 G' 的生成树数目为 $\tau(G') = (s-1) \cdot (m-1) + (m-1)(l-1) + (l-1)(s-1) = s(m-2) + m(l-2) + l(s-2) + 3 = 12$, 即 $s(m-2) + m(l-2) + l(s-2) = 9$. 因 $s, l, m \geq 2$, 且 $s(m-2), m(l-2), l(s-2) \geq 0$, 故 $s(m-2), m(l-2), l(s-2)$ 这 3 个数除非为 0, 否则一定大于等于 2. 由于 G 是简单图, 没有重边, 所以, 这 3 个数中至多有 1 个为 0. 故 $s(m-2), m(l-2), l(s-2)$ 只能从集合 $\{\{0, 2, 7\}, \{0, 3, 6\}, \{0, 4, 5\}, \{2, 2, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 3, 3\}\}$ 中取. 经计算, 只有当 $s(m-2) = 3, m(l-2) = 3, l(s-2) = 3$ 时方程有

解, 此时 $s = 3, m = 3, l = 3$, 故 $\hat{G}' = B(P_3, P_3, P_3)$.

对于 2 个点不相交的图 G 和图 H , 用 $G \cup H$ 表示 G 和 H 的不交并. 设 G 和 H 是 2 个点不交图, $G \vee H$ 定义顶点集为 $V(G) \cup V(H)$ 、边集为 $E(G) \cup E(H) \cup \{xy \mid x \in V(G), y \in V(H)\}$ 的图, 即在保持 G, H 中边不变的基础上, 连接 G 中每个点与 H 中每个点, 称 $G \vee H$ 为图 G 和图 H 的并接.

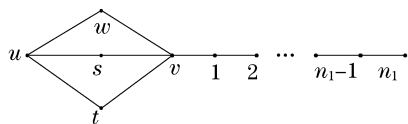
引理 8^[16] 设图 G 是恰有 n 个点、 m 条边的连通 DLS 图, 如果图 G 同时满足以下 3 个条件:

- 图 G 的补图 $\bar{G}$ 为连通图;
- 图 G 的边连通度为 1;
- $n - m + 1 \leq n - 5$, 即 $m \geq 6$.

则图 G 与完全图 K_r (其中 r 为任意整数) 并接后所得图 $G \vee K_r$ 也为 DLS 图.

4 图 $H(n; n_1) \vee K_r$ 是 DLS 图

研究二部双圈图 $H(n; n_1)$ (图 3) 与完全图 K_r 并接后所得图 $H(n; n_1) \vee K_r$ (其中 r 为任意非负整数) 的拉普拉斯谱确定性, 为了证明这个结论, 先证明引理 9.

图3 双圈图 $H(n; n_1)$ Fig.3 Bicyclic graph $H(n; n_1)$

引理9 二部双圈图 $H(n; n_1)$ 是 DLS 图.

证明 令 $G = H(n; n_1)$, 设 G' 是与 G 拉普拉斯同谱的图. 并设 G' 度为 i 的点恰有 x'_i 个, $i = 1, 2, \dots, \Delta$, 其中, Δ 为 G' 的最大度. 由引理2

$$\Delta + 1 \leq \mu_1 \leq$$

$$\max \left\{ \frac{d_i(d_i + m_i) + d_j(d_j + m_j)}{d_i + d_j} \mid v_i v_j \in E(G) \right\}$$

可知

$$\Delta + 1 \leq \frac{d_v(d_v + m_v) + d_s(d_s + m_s)}{d_v + d_s} = \frac{4(4 + 2) + 2\left(2 + \frac{7}{2}\right)}{4 + 2} = 5\frac{5}{6}$$

所以, $\Delta \leq 4$, 由引理7可知, $\hat{G}' = B(P_3, P_3, P_3)$

或 $\hat{G}' = B(3, l, 4)$.

若 $\hat{G}' = B(P_3, P_3, P_3)$, 由引理5可知, $q_3(G) = q_3(G')$. 由于 $n_G(C_3) = n_{G'}(C_3) = 0$, 故

$$\sum_{i=1}^n (d_i - 2)^3 = \sum_{i=1}^n (d'_i - 2)^3$$

从而有

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = n \\ -x'_1 + x'_3 + 2x'_4 = 2 \\ x'_1 + x'_3 + 4x'_4 = 6 \\ -x'_1 + x'_3 + 8x'_4 = 8 \end{cases}$$

解得 $x'_1 = 1, x'_2 = n - 3, x'_3 = 1, x'_4 = 1$, 故图 G' 的度序列为 $(1^1, 2^{n-3}, 3^1, 4^1)$, 因此, 图 G' 与图 $H(n; n_1)$ 同构.

若 $\hat{G}' = B(3, l, 4)$, 由引理5可知, $q_3(G) = q_3(G')$. 由于 $n_G(C_3) = 0, n_{G'}(C_3) = 1$, 故

$$\sum_{i=1}^n (d_i - 2)^3 = \sum_{i=1}^n (d'_i - 2)^3 - 6$$

从而有

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = n \\ -x'_1 + x'_3 + 2x'_4 = 2 \\ x'_1 + x'_3 + 4x'_4 = 6 \\ -x'_1 + x'_3 + 8x'_4 = 14 \end{cases}$$

解得 $x'_1 = 0, x'_2 = n, x'_3 = -2, x'_4 = 2$, 显然这是不可能的.

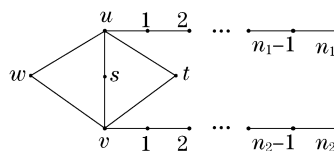
综上所述, $H(n; n_1)$ 是 DLS 图.

定理1 当 $n \geq 6, r$ 为任意非负整数时, $H(n; n_1) \vee K_r$ 是 DLS 图.

证明 若 $r = 0, H(n; n_1) \vee K_0 = H(n; n_1)$, 由引理9可知, $H(n; n_1)$ 是 DLS 图. 若 $r \geq 1$, 当 $n \geq 6$ 时, $H(n; n_1)$ 的补图 $\overline{H(n; n_1)}$ 是连通的, 满足引理8的第一个条件; 图 $H(n; n_1)$ 有悬挂路, 所以, $H(n; n_1)$ 的边连通度为 1, 满足引理8的第二个条件; 图 $H(n; n_1)$ 是双圈图, 所以, $n - m + 1 = 0 \leq 6 - 5 \leq n - 5$, 满足引理8的第三个条件. 所以, 图 $H(n; n_1) \vee K_r$ 是 DLS 图.

5 图 $H(n; n_1, n_2) \vee K_r$ 是 DLS 图

研究二部双圈图 $H(n; n_1, n_2)$ (图4) 与完全图 K_r 并接后所得图 $H(n; n_1, n_2) \vee K_r$ (其中 r 为任意非负整数) 的拉普拉斯谱确定性, 为了证明这个结论, 先证明引理10和引理11.

图4 双圈图 $H(n; n_1, n_2)$ Fig.4 Bicyclic graph $H(n; n_1, n_2)$

引理10 2个形如 $H(n; n_1, n_2)$ 的二部双圈图, 如果具有相同的拉普拉斯谱, 则它们必定同构.

证明 设 $G' = H(n; n'_1, n'_2)$ 与图 $G = H(n; n_1, n_2)$ 拉普拉斯同谱. 显然 $n_1 + n_2 = n'_1 + n'_2$. 现考虑 G 的恰有 2 个分支的生成森林构成的集合 F_2 , 不难看出 $F_2 = F_{21} \cup F_{22}$, 其中, F_{2i} 表示 $\hat{G}$ 中的点恰在 i 个分支中 G 的生成森林构成的集合 ($i = 1, 2$). 由引理3可知

$$l_{n-2}(G) = \sum_{F \in F_{21}} \gamma(F) + \sum_{F \in F_{22}} \gamma(F)$$

若 $F \in F_{21}, E(F) \cap E(\hat{G})$ 恰是 $\hat{G}$ 的生成树,

而 $\hat{G}$ 共有 12 棵生成树, 所以

$$\sum_{F \in F_{21}} \gamma(F) = 12 \sum_{i=0}^{n_1-1} (5 + n_2 + i)(n_1 - i) + 12 \sum_{i=0}^{n_2-1} (5 + n_1 + i)(n_2 - i)$$

若 $F \in F_{22}$, 分以下两种情况讨论.

情形1 u 或 v 不在 F 的同一分支中.

子情形 1.1 u (或 v) 与 $\hat{G}$ 中的其他点均不在 F 的同一分支中.

此时, $\gamma(F) = (1 + n_1)(4 + n_2)$ 或 $\gamma(F) = (4 + n_1)(1 + n_2)$

这样的生成森林共有 2 个, 上述每种情况各 1 个.

子情形 1.2 u (或 v) 只与 $\{w, s, t\}$ 中的 1 个点在 F 的同一分支中.

此时, $\gamma(F) = (2 + n_1)(3 + n_2)$ 或 $\gamma(F) = (3 + n_1)(2 + n_2)$

这样的生成森林共有 6 个, 上述每种情况各 3 个.

情形 2 u 和 v 在 F 的同一分支中, 即 u 与 v 同时和 $\{w, s, t\}$ 中的 2 个点在 F 的同一分支中.

此时, $\gamma(F) = 1 \times (4 + n_1 + n_2)$. 不难看出, 这样的生成森林共有 12 个. 所以

$$\begin{aligned} \sum_{F \in F_{22}} \gamma(F) &= (1 + n_1)(4 + n_2) + (4 + n_1) \cdot \\ &\quad (1 + n_2) + 3 \times (2 + n_1)(3 + n_2) + \\ &\quad 3 \times (3 + n_1)(2 + n_2) + 12 \times (4 + n_1 + n_2) \end{aligned}$$

综上

$$(-1)^{n-2} l_{n-2}(G) = 2(n_1 + n_2)^3 + 30(n_1 + n_2)^2 + 60(n_1 + n_2) - 40n_1n_2 + 92$$

同理

$$(-1)^{n-2} l_{n-2}(G') = 2(n'_1 + n'_2)^3 + 30(n'_1 + n'_2)^2 + 60(n'_1 + n'_2) - 40n'_1n'_2 + 92$$

由于 $n_1 + n_2 = n'_1 + n'_2$, 故有 $n_1n_2 = n'_1n'_2$, 从而有 $n_1 = n'_1, n_2 = n'_2$ 或 $n_1 = n'_2, n_2 = n'_1$

无论哪一种情况, G 与 G' 均同构.

引理 11 二部双圈图 $H(n; n_1, n_2)$ 是 DLS 图.

证明 令图 $G = H(n; n_1, n_2)$, 设 G' 是与 G 拉普拉斯同谱的图. 并设 G' 度为 i 的点恰有 x'_i 个, $i = 1, 2, \dots, \Delta$, 其中, Δ 为 G' 的最大度. 由引理 2

$$\Delta + 1 \leq \mu_1 \leq$$

$$\max \left\{ \frac{d_i(d_i + m_i) + d_j(d_j + m_j)}{d_i + d_j} \mid v_i v_j \in E(G) \right\}$$

可知

$$\begin{aligned} \Delta + 1 &\leq \frac{d_v(d_v + m_v) + d_s(d_s + m_s)}{d_v + d_s} = \\ &\quad \frac{4(4 + 2) + 2(2 + 4)}{4 + 2} = 6 \end{aligned}$$

所以, $\Delta \leq 5$. 由引理 7 可知

$$\hat{G}' = B(P_3, P_3, P_3)$$

或

$$\hat{G}' = B(3, l, 4)$$

若 $\hat{G}' = B(P_3, P_3, P_3)$, 由引理 5 可知, $q_3(G) = q_3(G')$. 由于 $n_G(C_3) = n_{G'}(C_3) = 0$, 故

$$\sum_{i=1}^n (d_i - 2)^3 = \sum_{i=1}^n (d'_i - 2)^3$$

从而有

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 = n \\ -x'_1 + x'_3 + 2x'_4 + 3x'_5 = 2 \\ x'_1 + x'_3 + 4x'_4 + 9x'_5 = 10 \\ -x'_1 + x'_3 + 8x'_4 + 27x'_5 = 14 \end{cases}$$

解得 $x'_1 = 2, x'_2 = n - 4, x'_3 = 0, x'_4 = 2, x'_5 = 0$, 故图 G' 的度序列为 $(1^2, 2^{n-4}, 4^2)$, 因此, 图 G' 与图 $H(n; n_1, n_2)$ 同构.

若 $\hat{G}' = B(3, l, 4)$, 由引理 5 可知, $q_3(G) = q_3(G')$. 由于 $n_G(C_3) = 0, n_{G'}(C_3) = 1$, 故

$$\sum_{i=1}^n (d_i - 2)^3 = \sum_{i=1}^n (d'_i - 2)^3 - 6$$

从而有

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 = n \\ -x'_1 + x'_3 + 2x'_4 + 3x'_5 = 2 \\ x'_1 + x'_3 + 4x'_4 + 9x'_5 = 10 \\ -x'_1 + x'_3 + 8x'_4 + 27x'_5 = 20 \end{cases}$$

解得 $x'_1 = 1, x'_2 = n - 1, x'_3 = -3, x'_4 = 3, x'_5 = 0$, 显然这是不可能的.

综上所述, $H(n; n_1, n_2)$ 是 DLS 图.

定理 2 当 $n \geq 6, r$ 为任意非负整数时, $H(n; n_1, n_2) \vee K_r$ 是 DLS 图.

证明 若 $r = 0, H(n; n_1, n_2) \vee K_0 = H(n; n_1, n_2)$, 由引理 11 可知, $H(n; n_1, n_2)$ 是 DLS 图. 若 $r \geq 1$, 当 $n \geq 6$ 时, $H(n; n_1, n_2)$ 的补图 $\overline{H(n; n_1, n_2)}$ 是连通的, 满足引理 8 的第一个条件; 图 $H(n; n_1, n_2)$ 有悬挂路, 所以, $H(n; n_1, n_2)$ 的边连通度为 1, 满足引理 8 的第二个条件; 图 $H(n; n_1, n_2)$ 是双圈图, 且 $n \geq 6$, 所以, $n - m + 1 = 0 \leq 6 - 5 \leq n - 5$, 满足引理 8 的第三个条件. 所以, 图 $H(n; n_1, n_2) \vee K_r$ 是 DLS 图.

6 图 $B(n; n_1, n_2) \vee K_r$ 是 DLS 图

研究二部双圈图 $B(n; n_1, n_2)$ (图 5) 与完全图 K_r 并接后所得图 $B(n; n_1, n_2) \vee K_r$ (其中 r 为任

意非负整数)的拉普拉斯谱确定性,为了证明这个结论,先证明引理12和引理13.

引理12 2个形如 $B(n; n_1, n_2)$ 的二部双圈图,如果具有相同的拉普拉斯谱,则它们必定同构.

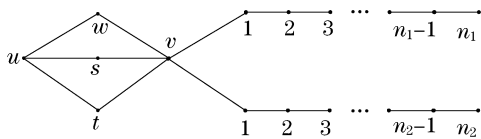


图5 双圈图 $B(n; n_1, n_2)$

Fig.5 Bicyclic graph $B(n; n_1, n_2)$

证明 设 $G' = B(n; n'_1, n'_2)$ 与图 $G = B(n; n_1, n_2)$ 拉普拉斯同谱. 显然有 $n_1 + n_2 = n'_1 + n'_2$. 现考虑 G 的恰有 2 个分支的生成森林构成的集合 F_2 , 不难看出 $F_2 = F_{21} \cup F_{22}$, 其中, F_{2i} 表示 $\hat{G}$ 中的点恰在 i 个分支中 G 的生成森林构成的集合 ($i=1, 2$). 由引理3可知

$$l_{n-2}(G) = \sum_{F \in F_{21}} \gamma(F) + \sum_{F \in F_{22}} \gamma(F)$$

若 $F \in F_{21}$, $E(F) \cap E(\hat{G})$ 恰是 $\hat{G}$ 的生成树,

而 $\hat{G}$ 共有 12 棵生成树, 所以

$$\sum_{F \in F_{21}} \gamma(F) = 12 \sum_{i=0}^{n_1-1} (5 + n_2 + i)(n_1 - i) + 12 \sum_{i=0}^{n_2-1} (5 + n_1 + i)(n_2 - i)$$

若 $F \in F_{22}$, 分以下两种情况讨论.

情形1 u 或 v 不在 F 的同一分支中.

子情形1.1 u 或 v 与 $\hat{G}$ 中的其他点均不在 F 的同一分支中.

此时, $\gamma(F) = 1 \times (4 + n_1 + n_2)$ 或 $\gamma(F) = 4 \times (1 + n_1 + n_2)$

这样的生成森林共有 2 个, 上述每种情况各 1 个.

子情形1.2 u 或 v 只与 $\{w, s, t\}$ 中的 1 个点在 F 的同一分支中.

此时, $\gamma(F) = 2 \times (3 + n_1 + n_2)$ 或 $\gamma(F) = 3 \times (2 + n_1 + n_2)$

这样的生成森林共有 6 个, 上述每种情况各 3 个.

情形2 u 和 v 在 F 的同一分支中, 即 u 与 v 同时和 $\{w, s, t\}$ 中的 2 个点在 F 的同一分支中.

此时, $\gamma(F) = 1 \times (4 + n_1 + n_2)$. 不难看出, 这

样的生成森林共有 12 个. 所以

$$\sum_{F \in F_{22}} \gamma(F) = 1 \times (4 + n_1 + n_2) + 4 \times (1 + n_1 + n_2) + 3 \times 2 \times (3 + n_1 + n_2) + 3 \times 3 \times (2 + n_1 + n_2) + 12 \times (4 + n_1 + n_2)$$

综上

$$(-1)^{n-2} l_{n-2}(G) = 2(n_1 + n_2)^3 + 30(n_1 + n_2)^2 + 60(n_1 + n_2) - 48n_1n_2 + 92$$

同理

$$(-1)^{n-2} l_{n-2}(G') = 2(n'_1 + n'_2)^3 + 30(n'_1 + n'_2)^2 + 60(n'_1 + n'_2) - 48n'_1n'_2 + 92$$

由于 $n_1 + n_2 = n'_1 + n'_2$, 故有 $n_1n_2 = n'_1n'_2$, 从而有 $n_1 = n'_1, n_2 = n'_2$ 或 $n_1 = n'_2, n_2 = n'_1$

无论哪一种情况, G 与 G' 均同构.

引理13 二部双圈图 $B(n; n_1, n_2)$ 是 DLS 图.

证明 令图 $G = B(n; n_1, n_2)$, 设 G' 是与 G 拉普拉斯同谱的图. 并设 G' 度为 i 的点恰有 x'_i 个, $i = 1, 2, \dots, \Delta$, 其中, Δ 为 G' 的最大度. 由引理2

$$\Delta + 1 \leq \mu_1 \leq$$

$$\max \left\{ \frac{d_i(d_i + m_i) + d_j(d_j + m_j)}{d_i + d_j} \mid v_i v_j \in E(G) \right\}$$

可知

$$\Delta + 1 \leq \frac{d_v(d_v + m_v) + d_s(d_s + m_s)}{d_v + d_s} = \frac{5(5 + 2) + 2(2 + 4)}{5 + 2} = 6 \frac{5}{7}$$

所以, $\Delta \leq 5$. 由引理7可知

$$\hat{G}' = B(P_3, P_3, P_3)$$

或

$$\hat{G}' = B(3, l, 4)$$

若 $\hat{G}' = B(P_3, P_3, P_3)$, 由引理5可知, $q_3(G) = q_3(G')$. 由于 $n_G(C_3) = n_{G'}(C_3) = 0$, 故

$$\sum_{i=1}^n (d_i - 2)^3 = \sum_{i=1}^n (d'_i - 2)^3$$

从而有

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 = n \\ -x'_1 + x'_3 + 2x'_4 + 3x'_5 = 2 \\ x'_1 + x'_3 + 4x'_4 + 9x'_5 = 12 \\ -x'_1 + x'_3 + 8x'_4 + 27x'_5 = 26 \end{cases}$$

解得 $x'_1 = 2, x'_2 = n - 4, x'_3 = 1, x'_4 = 0, x'_5 = 1$, 故图 G' 的度序列为 $(1^2, 2^{n-4}, 3^1, 5^1)$, 因此, 图 G' 与图 $B(n; n_1, n_2)$ 同构.

若 $\hat{G}' = B(3, l, 4)$, 由引理5可知, $q_3(G) =$

$q_3(G')$. 由于 $n_G(C_3) = 0, n_{G'}(C_3) = 1$, 故

$$\sum_{i=1}^n (d_i - 2)^3 = \sum_{i=1}^n (d_i' - 2)^3 - 6$$

从而有

$$\begin{cases} x_1' + x_2' + x_3' + x_4' + x_5' = n \\ -x_1' + x_3' + 2x_4' + 3x_5' = 2 \\ x_1' + x_3' + 4x_4' + 9x_5' = 12 \\ -x_1' + x_3' + 8x_4' + 27x_5' = 32 \end{cases}$$

解得 $x_1' = 1, x_2' = n - 1, x_3' = -2, x_4' = 1, x_5' = 1$; 或 $x_1' = 0, x_2' = n + 3, x_3' = -8, x_4' = 5, x_5' = 0$. 显然这都是不可能的.

综上所述, $B(n; n_1, n_2)$ 是 DLS 图.

定理 3 当 $n \geq 6, r$ 为任意非负整数时, $B(n; n_1, n_2) \vee K_r$ 是 DLS 图.

证明 若 $r = 0, B(n; n_1, n_2) \vee K_0 = B(n; n_1, n_2)$, 由引理 13 可知, $B(n; n_1, n_2)$ 是 DLS 图. 若 $r \geq 1$, 当 $n \geq 6$ 时, $B(n; n_1, n_2)$ 的补图 $\overline{B(n; n_1, n_2)}$ 是连通的, 满足引理 8 的第一个条件; 图 $B(n; n_1, n_2)$ 有悬挂路, 所以, $B(n; n_1, n_2)$ 的边连通度为 1, 满足引理 8 的第二个条件; 图 $B(n; n_1, n_2)$ 是双圈图, 且 $n \geq 6$, 所以, $n - m + 1 = 0 \leq 6 - 5 \leq n - 5$, 满足引理 8 的第三个条件. 所以, 图 $B(n; n_1, n_2) \vee K_r$ 是 DLS 图.

参考文献:

- [1] VON COLLATZ L, SINOGOWITZ U. Spektren endlicher grafen[J]. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 1957, 21(1): 63 - 77.
- [2] KAC M. Can one hear the shape of a drum[J]. The American Mathematical Monthly, 1966, 73(4): 1 - 23.
- [3] VAN DAM E R, HAEMERS W H. Which graphs are determined by their spectrum? [J]. Linear Algebra and its Applications, 2003, 373(1): 241 - 272.
- [4] WANG W, XU C X. On the spectral characterization of T-shape trees[J]. Linear Algebra and its Applications, 2006, 414(2/3): 492 - 501.
- [5] LIU X G, ZHANG Y P, LU P L. One special double star like graph is determined by its Laplacian spectrum[J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(4): 435 - 438.
- [6] WANG J F, HUANG Q X, BELARDO F, et al. On the spectral characterizations of ∞ -graph [J]. Discrete Mathematics, 2010, 310(13/14): 1854 - 1855.
- [7] LIU F J, HUANG Q X. Laplacian spectral characterization of 3-rose graphs [J]. Linear Algebra and its Applications, 2013, 439(10): 2914 - 2920.
- [8] HAEMERS W H, LIU X G, ZHANG Y P. Spectral characterizations of lollipop graphs[J]. Linear Algebra and its Applications, 2008, 428(11/12): 2415 - 2423.
- [9] BOULET R. Spectral characterizations of sun graphs and broken sun graphs[J]. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2009, 11(2): 149 - 160.
- [10] LU P L, LIU X G, YUAN Z T, et al. Spectral characterizations of sandglass graphs [J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(8): 1225 - 1230.
- [11] 徐丽珍, 何常香. 双圈图的无符号拉普拉斯特征多项式的系数[J]. 上海理工大学学报, 2014, 36(1): 12 - 14.
- [12] 姜源源, 吴宝丰. 关于 H -联图的拉普拉斯特征值[J]. 上海理工大学学报, 2015, 37(2): 130 - 135.
- [13] LI J S, ZHANG X D. On the Laplacian eigenvalues of a graph[J]. Linear Algebra and its Applications, 1998, 285(1/2/3): 305 - 307.
- [14] CVETKOVIC D, ROWLINSON P, SIMIC S. An introduction to the theory of graph spectra[M]. New York: Cambridge University Press, 2010.
- [15] KELMANS A K, CHELNOLOV V M. A certain polynomial of a graph and graphs with an extremal number of trees[J]. Journal Combinatorial Theory, Series B, 1974, 16(3): 197 - 214.
- [16] ZHOU J, BU C J. Laplacian spectral characterization of some graphs obtained by product operation [J]. Discrete Mathematics, 2012, 312(10): 1591 - 1595.

(编辑: 石 瑛)