

首尾差 r -循环矩阵的判别方法及逆和广义逆的快速算法

潘 雪, 秦 梅

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 提出了一种新的循环矩阵, 称之为首尾差 r -循环矩阵(简记为 $FLDcirc_r$ 矩阵). 验证了它的线性运算、矩阵乘积、逆矩阵等仍为 $FLDcirc_r$ 矩阵. 通过构造基本 $FLDcirc_r$ 矩阵, 给出 $FLDcirc_r$ 矩阵的判别方法及逆和广义逆的快速算法.

关键词: $FLDcirc_r$ 矩阵; 判别法; 对角化; 逆; 广义逆

中图分类号: O 151.2 **文献标志码:** A

Discriminance for $FLDcirc_r$ Matrices and the Fast Algorithm for Their Inverse and Generalized Inverse

PAN Xue, QIN Mei

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: A new type of matrices which is called as the first and the last difference r -circulant matrix ($FLDcirc_r$ matrix) was presented. The linear operation, the matrix product, the inverse matrix of this type of matrices were verified to be still $FLDcirc_r$ matrices. Through constructing the basic $FLDcirc_r$ matrix, the discriminance for $FLDcirc_r$ matrices and the fast algorithm for their inverse and generalized inverse were provided.

Keywords: $FLDcirc_r$ matrix; discriminance; diagonalization; inverse; generalized inverse

循环矩阵是矩阵论的重要组成部分, 它的特殊结构和性质被广泛应用于应用数学、计算数学及现代工程等领域^[1-6], 并且不断有新的循环矩阵被提出^[7-11]. 基于上述研究, 本文首先给出了 $FLDcirc_r$ 矩阵和基本 $FLDcirc_r$ 矩阵的概念以及它们的和、差、乘积、逆矩阵和伴随矩阵的性质, 然后通过构造基本 $FLDcirc_r$ 矩阵, 给出了 $FLDcirc_r$ 矩阵的 5 种

判别方法, 并讨论它的对角化和奇异性, 最后给出它的逆和广义逆的快速算法及数值例子^[12-13]. 在本文中, 矩阵都是在复数域中讨论的.

1 预备知识

定义 1 对于 n 阶方阵 A , 若 A 具有形状

收稿日期: 2015-04-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11426155); 沪江基金资助项目(B14005)

第一作者: 潘 雪(1990-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 计算数学. E-mail: xiaoxuehe1126@163.com

通信作者: 秦 梅(1975-), 女, 副教授. 研究方向: 计算数学. E-mail: jisuanusst@126.com

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ ra_{n-1} & a_0 - ra_{n-1} & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ ra_{n-2} & ra_{n-1} - ra_{n-2} & a_0 - ra_{n-1} & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ra_2 & ra_3 - ra_2 & ra_4 - ra_3 & \cdots & a_0 - ra_{n-1} & a_1 \\ ra_1 & ra_2 - ra_1 & ra_3 - ra_2 & \cdots & ra_{n-1} - ra_{n-2} & a_0 - ra_{n-1} \end{pmatrix}$$

则称 A 为 n 阶 $FLDcirc_r$ 矩阵,记作

$$A = FLDcirc_r(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$$

定义 2 称 n 阶方阵

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ r & -r & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

为基本 $FLDcirc_r$ 矩阵.

D 的特征多项式为 $g(x) = x^n + rx - r$, 且

$D^n = r(I_n - D)$, 规定 $D^0 = I_n$.

由 $FLDcirc_r$ 矩阵的定义易证命题 1.

命题 1 如果 A 和 B 都是 $FLDcirc_r$ 矩阵, 则 $A+B$, $A-B$ 以及 kA (k 为任意常数) 都是 $FLDcirc_r$ 矩阵.

定义 3^[14] 设 $A \in C^{n \times n}$, 称满足 $\text{rand } A^{k+1} = \text{rand } A^k$ 的最小非负整数 k 为 A 的指标, 记作 $\text{Ind}(A) = k$. 若 A 非奇异, 则 $\text{Ind}(A) = 0$; 若 A 奇异, 则 $\text{Ind}(A) \geq 1$.

定义 4^[14] 设 $A \in C^{n \times n}$, 如果存在 $X \in C^{n \times n}$, 使得 $AXA = A$, $XAX = X$ 同时成立, 则称 X 是 A 的自反广义逆, 记为 $A^{(1,2)}$.

定义 5^[15] 设 $A \in C^{n \times n}$, $\text{Ind}(A) = k$. 如果存在 $X \in C^{n \times n}$ 满足

$$A^k X A = A^k, X A X = X, A X = X A$$

则称 X 为 A 的 Drazin 逆, 记为 $A^{(d)}$.

引理 1^[14] 若多项式矩阵 $\begin{pmatrix} f(x) & 1 & 0 \\ g(x) & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 经过

初等行变换后化为 $\begin{pmatrix} d(x) & u(x) & v(x) \\ 0 & s(x) & t(x) \end{pmatrix}$, 则

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ ra_{1n} & a_{11} - ra_{1n} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} \\ ra_{1,n-1} & ra_{1n} - ra_{1,n-1} & a_{11} - ra_{1n} & \cdots & a_{1,n-3} & a_{1,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ra_{13} & ra_{14} - ra_{13} & ra_{15} - ra_{14} & \cdots & a_{11} - ra_{1n} & a_{12} \\ ra_{12} & ra_{13} - ra_{12} & ra_{14} - ra_{13} & \cdots & ra_{1n} - ra_{1,n-1} & a_{11} - ra_{1n} \end{pmatrix}$$

$$(f(x), g(x)) = d(x), u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x).$$

2 $FLDcirc_r$ 矩阵的判别法

定理 1 A 是 $FLDcirc_r$ 矩阵当且仅当 A 有如下形式:

$$A = f(D) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i D^i \quad (1)$$

其中, $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ 为 $FLDcirc_r$ 矩阵的表示多项式.

证明 由定义 1 及定义 2 可证定理 1.

定理 2 A 是 $FLDcirc_r$ 矩阵当且仅当 $AD = DA$, 其中, D 为基本 $FLDcirc_r$ 矩阵.

证明 必要性. 因为, A 是 $FLDcirc_r$ 矩阵, 所以, 由 A 和 D 的定义可得 $AD = DA$.

充分性. 由待定系数法可设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

由 $AD = DA$ 可知

$$a_{21} = ra_{1n}, a_{22} = a_{11} - ra_{1n}, a_{23} = a_{12}, \cdots,$$

$$a_{2,n-1} = a_{1,n-2}, a_{2n} = a_{1,n-1}$$

$$a_{31} = ra_{2n}, a_{32} = a_{21} - ra_{2n}, a_{33} = a_{22}, \cdots,$$

$$a_{3,n-1} = a_{2,n-2}, a_{3n} = a_{2,n-1}$$

$$\vdots$$

以此类推, 可得

故 A 是 $FLDcirc_r$ 矩阵.

推论 1 如果 A 和 B 都是 $FLDcirc_r$ 矩阵, 则 AB 和 BA 都是 $FLDcirc_r$ 矩阵, 并且 $AB = BA$.

证明 因为 A 和 B 都是 $FLDcirc_r$ 矩阵, 由定理 2 可得

$$AD = DA, BD = DB$$

因此

$$ABD = ADB = DAB, BAD = BDA = DBA$$

所以, AB 和 BA 都是 $FLDcirc_r$ 矩阵.

由定理 1 显然可得 $AB = BA$.

3 $FLDcirc_r$ 矩阵的对角化

首先研究基本 $FLDcirc_r$ 矩阵 D 的对角化.

因为 D 的特征多项式 $g(x) = x^n + rx - r$ 有 n 个不同的根, 可设 D 的 n 个不同的特征值为

$$\lambda_0 = \omega_0, \lambda_1 = \omega_1, \dots, \lambda_{n-1} = \omega_{n-1}$$

令 $V = V(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1})$, 即

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_{n-2} & \omega_{n-1} \\ \omega_0^2 & \omega_1^2 & \omega_2^2 & \cdots & \omega_{n-2}^2 & \omega_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \omega_0^{n-2} & \omega_1^{n-2} & \omega_2^{n-2} & \cdots & \omega_{n-2}^{n-2} & \omega_{n-1}^{n-2} \\ \omega_0^{n-1} & \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \cdots & \omega_{n-2}^{n-1} & \omega_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

显然 V 是由 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ 构成的非奇异 Vandermonde 矩阵, 且成立

$$D = V \text{diag}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}) V^{-1} \quad (2)$$

现研究一般 $FLDcirc_r$ 矩阵 A 的对角化.

由定理 1 和式(2)可得

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i D^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (V \text{diag}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}) V^{-1})^i = \sum_{i=0}^{n-1} V \text{diag}(a_i \omega_0^i, a_i \omega_1^i, \dots, a_i \omega_{n-1}^i) V^{-1} = V \text{diag}(f(\omega_0), f(\omega_1), \dots, f(\omega_{n-1})) V^{-1}$$

其中, $f(\omega_j) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \omega_j^i$ 为 A 的特征值.

定理 3 A 是 $FLDcirc_r$ 矩阵当且仅当 $V^{-1}AV$ 是对角矩阵.

证明 必要性. 如果 A 是 $FLDcirc_r$ 矩阵, 由上面的讨论可知

$$V^{-1}AV = \text{diag}(f(\omega_0), f(\omega_1), \dots, f(\omega_{n-1}))$$

充分性. 令 $V^{-1}AV = P_1$, P_1 为对角矩阵, 则

$$A = VP_1V^{-1}$$

令 $P_2 = \text{diag}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1})$, 由式(2)得

$$D = VP_2V^{-1}$$

所以

$$AD = VP_1V^{-1}VP_2V^{-1} = VP_1P_2V^{-1}$$

$$DA = VP_2V^{-1}VP_1V^{-1} = VP_2P_1V^{-1}$$

而 P_1 和 P_2 都是对角矩阵, 所以, 有

$$AD = DA$$

因此, A 是 $FLDcirc_r$ 矩阵.

定理 4 A 是非奇异 $FLDcirc_r$ 矩阵当且仅当特征值 $f(\omega_i) \neq 0 (i = 0, 1, \dots, n-1)$, 其中, $\omega_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$ 是基本 $FLDcirc_r$ 矩阵 D 的特征值.

4 $FLDcirc_r$ 矩阵的逆与广义逆

定理 5 A 是非奇异 $FLDcirc_r$ 矩阵当且仅当 A^{-1} 也是 $FLDcirc_r$ 矩阵.

证明 必要性. 由 A 是非奇异 $FLDcirc_r$ 矩阵及定理 2 可知

$$AD = DA$$

则

$$DA^{-1} = A^{-1}D$$

所以, A^{-1} 是 $FLDcirc_r$ 矩阵.

充分性显然.

推论 2 如果 A 是非奇异 $FLDcirc_r$ 矩阵, 则 A^* 也是非奇异 $FLDcirc_r$ 矩阵.

定理 6 设 A 是 $FLDcirc_r$ 矩阵, 则 A 非奇异当且仅当 $(f(x), g(x)) = 1$.

证明 若 A 是非奇异 $FLDcirc_r$ 矩阵, 由定理 4 可知, $f(\omega_i) \neq 0 (i = 0, 1, \dots, n-1)$, 所以, $f(x)$ 和 $g(x)$ 没有公共解, 即 $(f(x), g(x)) = 1$.

反之, 若 $(f(x), g(x)) = 1$, 则存在 $u(x)$, $v(x)$ 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$, 故 $u(D)f(D) + v(D)g(D) = E$. 由于 $g(D) = 0$, $f(D) = A$, 有 $u(D)A = E$. 因此, A 非奇异且 $A^{-1} = u(D)$. 由定理 1 可知, A^{-1} 是 $FLDcirc_r$ 矩阵.

推论 3 如果 A 是非奇异的 $FLDcirc_r$ 矩阵, 则存在 $A^{-1} = u(D)$.

证明 由定理 6 可知, 推论显然成立.

推论 4 如果 A 是奇异的 $FLDcirc_r$ 矩阵, 则存在 $FLDcirc_r$ 矩阵 H , 使得 $A^{\{1,2\}} = A^{\{d\}} = H$.

证明 由 A 奇异可知 $(f(x), g(x)) \neq 1$. 设 $(f(x), g(x)) = d(x)$, $g(x) = d(x)g_1(x)$, $f(x) = d(x)f_1(x)$, 则 $(f_1(x), g_1(x)) = 1$. 又 $g(x)$ 无重根, 故 $(d(x), g_1(x)) = 1$, 则 $(d(x)f_1(x), g_1(x)) = 1$, $(d(x)d(x)f_1(x), g_1(x)) = 1$, 即 $(d(x)f(x),$

$g_1(x) = 1$.

因此,存在 $u(x), v(x)$, 使得

$$u(x)d(x)f(x) + v(x)g_1(x) = 1 \quad (3)$$

对式(3)两边同乘 $f(x)$, 整理得

$$f(x)u(x)d(x)f(x) + f_1(x)v(x)g(x) = f(x)$$

由 $g(D) = 0, f(D) = A$, 得

$$Au(D)d(D)A = A \quad (4)$$

对式(3)两边同乘 $u(x)d(x)$, 同理可得

$$u(D)d(D)Au(D)d(D) = u(D)d(D) \quad (5)$$

若 $H = u(D)d(D)$, 则 H 是 D 的多项式, 由定理 1 可知, H 是 $FLDcirc_r$ 矩阵, 再由式(4)和式(5)可知, $H = A^{\{1,2\}}$. 又

$$A^k HA = A^{k-1}(AHA) = A^{k-1}A = A^k$$

$$AH = Au(D)d(D) = f(D)u(D)d(D) =$$

$$u(D)d(D)f(D) = HA$$

故 $H = A^{\{d\}}$.

5 算法与数值例子

由引理 1 与推论 3 的证明, 不难得到求 $FLDcirc_r$ 矩阵的逆和广义逆的快速算法, 其一般步骤如下:

步骤 1 求 $f(x), g(x)$ 的最大公因式 $d(x)$;

步骤 2 若 $d(x) = 1$, 由 $\begin{pmatrix} f(x) & 1 \\ g(x) & 0 \end{pmatrix}$ 经过一系列初等行变换化为 $\begin{pmatrix} 1 & u(x) \\ 0 & s(x) \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} = u(D)$;

步骤 3 若 $d(x) \neq 1$, 求 $g(x)$ 除以 $d(x)$ 的商式 $g_1(x)$, 由 $\begin{pmatrix} f(x)d(x) & 1 \\ g_1(x) & 0 \end{pmatrix}$ 经过初等行变化, 化为 $\begin{pmatrix} 1 & u(x) \\ 0 & s(x) \end{pmatrix}$, 则 $A^{\{1,2\}} = A^{\{d\}} = u(D)d(D)$.

$$\text{例 1 已知 } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, A \text{ 是否可}$$

逆? 若可逆, 求 A^{-1} .

由定义 1 得 $A = FLDcirc_2(1, -1, 1), f(x) =$

$$1 - x + x^2, g(x) = x^3 + 2x - 2, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 $(f(x), g(x)) = 1$, 故 A 非奇异.

因为

$$\begin{pmatrix} x^2 - x + 1 & 1 \\ x^3 + 2x - 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 - x + 1 & 1 \\ x^2 + x - 2 & -x \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2x + 3 & x + 1 \\ x^2 + x - 2 & -x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2x + 3 & x + 1 \\ 7 & 2x^2 + 3x + 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & x^3 + 2x - 2 \\ 1 & \frac{2}{7}x^2 + \frac{3}{7}x + \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

则

$$u(x) = \frac{2}{7}x^2 + \frac{3}{7}x + \frac{5}{7}$$

所以

$$A^{-1} = u(D) = \frac{2}{7}D^2 + \frac{3}{7}D + \frac{5}{7}E = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

即

$$A^{-1} = FLDcirc_2\left(\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}\right)$$

$$\text{例 2 已知 } A = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 1 \\ 2 & \sqrt{3} - 1 \end{pmatrix}, \text{ 求 } A^{\{1,2\}}.$$

由定义 1 可得, $A = FLDcirc_2(1 + \sqrt{3}, 1)$,

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{3}, g(x) = x^2 + 2x - 2, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \text{ 则 } d(x) = (f(x), g(x)) = x + 1 + \sqrt{3},$$

故 A 奇异且 $g_1(x) = x + 1 - \sqrt{3}$.

由步骤 3 可得

$$\begin{pmatrix} x^2 + 2(1 + \sqrt{3})x + 4 + 2\sqrt{3} & 1 \\ x + 1 - \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (1 + 3\sqrt{3})x + 4 + 2\sqrt{3} & 1 \\ x + 1 - \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{12} \\ x + 1 - \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{12} \\ 0 & x + 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

则

$$u(x) = \frac{1}{12}$$

所以

$$A^{\{1,2\}} = A^{\{d\}} = u(D)d(D) =$$

$$\frac{1}{12}[\mathbf{D} + (1 + \sqrt{3})\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \frac{1 + \sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3} - 1}{12} \end{bmatrix}$$

即

$$\mathbf{A}^{\{1,2\}} = \mathbf{A}^{\{d\}} = \text{FLDcirc}_2\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{12}, \frac{1}{12}\right)$$

6 结 论

提出了 FLDcirc_r 矩阵,并验证了它的和、差、乘积、逆矩阵和伴随矩阵仍为 FLDcirc_r 矩阵,这充分说明它具有很强的保结构性,这在实际应用中非常重要.通过构造的基本 FLDcirc_r 矩阵,给出 FLDcirc_r 矩阵的5种判别方法及它的逆和广义逆的快速算法.本文给出的算法将矩阵求逆和广义逆问题转化为多项式计算,降低了问题求解的复杂度,并且 FLDcirc_r 矩阵在计算存储时可大量减小存储空间.数值例子表明了算法的可行性.

参考文献:

- [1] TOLOMEI P B, TORRES L M. On the first Chvátal closure of the set covering polyhedron related to circulant matrices[J]. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 2013, 44(5): 377 - 383.
- [2] BOZKURT D, TAM T Y. Determinants and inverses of circulant matrices with Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers[J]. Original Research Article Applied Mathematics and Computation, 2012, 219(1/2): 544 - 551.
- [3] ZHOU J W, JIANG Z L. The spectral norms of g -circulant matrices with classical Fibonacci and Lucas numbers entries[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 233(1): 582 - 587.
- [4] WU A G, ZENG X L, DUAN G R, et al. Iterative solutions to the extended Sylvester-conjugate matrix equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 217(1): 130 - 142.
- [5] AMDRECUT M. Applications of left circulant matrices in signal and image processing[J]. Modern Physics Letters B, 2008, 22(4): 231 - 241.
- [6] SHEN S Q, CEN J M. On the bounds for the norms of r -circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers[J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 216(10): 2891 - 2897.
- [7] MARRAZZINI C. Characterization of the inverse of a particular circulant matrix by means of a continued fraction[J]. Discrete Applied Mathematics, 1980, 2(2): 163 - 165.
- [8] XU Q Z, LI H Q, JIANG Z L. An algorithm for finding the minimal polynomial of a FLS r -circulant matrix[J]. Journal Mathematics (Wuhan), 2005, 25(6): 599 - 604.
- [9] HE C Y, WANG X Y. The discriminance for a special class of circulant matrices and their diagonalization[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 238(1): 7 - 12.
- [10] DAVIS P J. Circulant Matrices[M]. New York: Wiley, 1979.
- [11] SEARLE S R. On inverting circulant matrices[J]. Linear Algebra and its Applications, 1979, 25(1): 77 - 89.
- [12] JIANG Z L, XU Z B. Efficient algorithm for finding the inverse and the group inverse of FLS r -circulant matrix[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2005, 38(1/2): 45 - 57.
- [13] 李静, 何承源. 求解首尾差循环矩阵逆与广义逆的快速算法[J]. 山东大学学报(理学版), 2013, 48(6): 96 - 99.
- [14] 张晓红, 蔡秉衡. 高等代数专题研究选编[M]. 西安: 西安科学技术出版社, 1992.
- [15] 张凯院, 徐仲. 数值代数[M]. 西安: 西北工业大学, 2000.

(编辑: 石 瑛)