

分数阶 Laplace 方程组的山路解

李 青, 魏公明

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 对一类非线性分数阶 Laplace 方程组 Dirichlet 问题非平凡解以及正解的存在性分别进行了研究. 针对非线性分数阶 Laplace 方程组在满足 Dirichlet 边值条件下所具有的特征, 通过定义能量空间, 然后在空间中利用 Sobolev 嵌入定理、控制收敛定理、Brezis-Leb 引理, 证明分数阶方程组的能量泛函满足 Palais-Smale 紧性条件, 最后利用分数阶 Sobolev 空间中的山路引理, 得出方程组存在非平凡临界点, 也即得出这类非线性分数阶 Laplace 方程组 Dirichlet 问题存在非平凡解的结论. 此外, 还利用 Nehari 流形、极小能量法, 通过比较能量法得出一类耦合的非线性分数阶 Laplace 方程组 Dirichlet 问题存在正解需要满足的条件, 进而得出这类分数阶 Laplace 方程组存在正解的结论.

关键词: 分数阶 Laplace 算子; 山路引理; Palais-Smale 条件; 极小能量解

中图分类号: O 175.25 **文献标志码:** A

Mountain Pass Solutions for the System of Equations Driven by the Fractional Laplace Operator

LI Qing, WEI Gongming

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The existence of nontrivial solutions and positive solutions for fractional Laplace systems with Dirichlet boundary conditions was investigated. According to the features when the Dirichlet boundary conditions of fractional Laplace systems are satisfied and based on the mountain pass theorem, embedding theorem, dominated convergence theorem and Brezis-Leb lemma in Sobolev space, the Palais-Smale compactness conditions of the energy functional were proved. Then the existence of nontrivial solutions for fractional Laplace systems with Dirichlet boundary conditions was concluded. Moreover, The Nehari manifold and minimal energy method were used to prove the existence of positive solutions for fractional Laplace systems with Dirichlet boundary conditions.

Keywords: *fractional Laplace operator; mountain pass theorem; Palais-Smale condition; least energy solution*

收稿日期: 2015-01-08

基金项目: 沪江基金资助项目(B14005)

第一作者: 李 青(1991-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: qinglismile@163.com

通信作者: 魏公明(1974-), 男, 副教授. 研究方向: 偏微分方程. E-mail: gmweixy@163.com

1 问题的提出

运用山路引理^[1-4]来证明非平凡解的存在性,是一种很经典的变分方法.本文主要受文献[5]及文献[6]的启发.文献[5]主要针对满足齐次 Dirichlet 边值条件的非局部微分方程 $L_k u + f(x, u) = 0 (x \in \Omega)$ 进行了研究.其中

$$L_k u(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)) K(y) dy$$

是一个非局部算子. Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中具有 Lipschitz 边界的有界开集, $K: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow (0, +\infty)$ 是满足下列性质的函数:

- $\gamma K \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 其中 $\gamma(x) = \min\{|x|^2, 1\}$;
- 存在 $\lambda > 0$ 使得对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 有 $K(x) \geq \lambda |x|^{-(n+2s)}$;
- 对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $K(x) = K(-x)$.

对 $K(x) = |x|^{-(n+2s)}$, L_K 即为分数阶 Laplace 算子 $-(\Delta)^s$, 即对于方程

$$\begin{cases} -(\Delta)^s u = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

其中, $s \in (0, 1)$,

$$-(\Delta)^s u(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy$$

本文通过验证该方程能量泛函是否满足 Palais-Smale 条件,再应用山路引理得出其存在非平凡解.将这种方法运用到如下分数阶 Laplace 方程组中,即

$$\begin{cases} -(\Delta)^s u = f(u, v), & x \in \Omega \\ -(\Delta)^s v = g(u, v), & x \in \Omega \\ u = 0, v = 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \quad (1)$$

不论是在纯理论领域,还是实际生活中,这种分数阶椭圆型算子都有着广泛的应用.它出现在很多不同的背景之下,比如:障碍问题、最优化、金融学、相变、层状材料、反常扩散、晶体错位、半透膜、火焰传播、守恒律、准地转流、多重散射、极小曲面、材料科学、水波等.文献[7]给出了关于分数阶 Sobolev 空间的清晰而全面的介绍,是学习分数阶 Laplace 方程极好的参考资料.

文献[6]研究的是如下耦合的非线性薛定谔方程组:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = |u|^{2q-2}u + b|v|^q|u|^{q-2}u, & x \in \mathbb{R}^n \\ -\Delta v + \omega^2 v = |v|^{2q-2}v + b|u|^q|v|^{q-2}v, & x \in \mathbb{R}^n \\ u(x) \rightarrow 0, v(x) \rightarrow 0, & \text{当 } |x| \rightarrow \infty \text{ 时} \end{cases}$$

通过极小化方法(文献[8-9])研究其存在正解.受该文献的启发,在式(1)中取 $f(u, v) = |u|^{p_0-2}u + b(x)|v|^q|u|^{q-2}u$, $g(u, v) = |v|^{q_0-2}v + b(x)|u|^q|v|^{q-2}v$, 本文研究的是如下耦合的分数阶 Laplace 方程组非平凡解的存在性:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = |u|^{p_0-2}u + b(x)|v|^q|u|^{q-2}u, & x \in \Omega \\ (-\Delta)^s v = |v|^{q_0-2}v + b(x)|u|^q|v|^{q-2}v, & x \in \Omega \\ u = 0, v = 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \quad (2)$$

假设 $s \in (0, 1)$, $n > 2s$, $2 < 2q < p_0$, $q_0 < 2^*$,

$$2^* = \frac{2n}{n-2s}, b(x) \in L^\infty(\Omega) \text{ 且 } b(x) > 0, \Omega \in \mathbb{R}^n$$

是一个具有 Lipschitz 边界的有界开集, X 是满足以下条件的 Lebesgue 可测函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 构成的线性空间: $f \in L^2(\Omega)$ 且

$$(x, y) \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{\sqrt{|x - y|^{n+2s}}} \in L^2(\mathbb{R}^{2n} \setminus (C\Omega \times C\Omega), dx dy)$$

其中, $C\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

记

$E := X_0 \times X_0 = \{(f, g) \in F: \text{对于几乎处处的 } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \text{ 有 } (f, g) = (0, 0)\}$.

其中,

$$\begin{aligned} X_0 &= \{f \in X: \text{对于几乎处处的 } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \text{ 有 } f = 0\} \\ F &:= X \times X \end{aligned}$$

因为

$$C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega) \subseteq E \quad (3)$$

所以 E 和 F 非空^[10].

问题(2)有一个变分结构,实际上它是如下泛函 $J: E \rightarrow \mathbb{R}$ 的 Euler-Lagrange 方程:

$$\begin{aligned} J(u, v) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \frac{1}{p_0} \int_{\Omega} |u|^{p_0} dx - \frac{1}{q_0} \int_{\Omega} |v|^{q_0} dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} b(x) |uv|^q dx \end{aligned}$$

可知泛函 J 在 $(u, v) \in E$ 上是 Fréchet 可微的且对于任意的 $(\varphi, \psi) \in E$, 有

$$\begin{aligned} \langle J'(u, v), (\varphi, \psi) \rangle &= \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \int_{\Omega} \frac{(v(x) - v(y))(\psi(x) - \psi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} (u^{p_0-1} \varphi + v^{q_0-1} \psi) dx - \int_{\Omega} b(x) (u^{q-1} v^q \varphi + v^{q-1} u^q \psi) dx$$

则 J 的临界点即为问题(2)的解.

因为算子是非局部的, Dirichlet 条件定义在 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ 中, 而不是简单地在 $\partial\Omega$ 上. 本文证明思路: 在第三部分验证了 J 满足山路几何和 PS 紧性条件后, 由山路引理得到方程组(2)的一个非零向量解(见定理1). 取特殊情况, $p_0 = q_0 = 2q$, $b(x) = b$, 方程组(2)变为

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = |u|^{2q-2} u + b |v|^q |u|^{q-2} u, & x \in \Omega \\ (-\Delta)^s v = |v|^{2q-2} v + b |u|^q |v|^{q-2} v, & x \in \Omega \\ u = 0, v = 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \quad (4)$$

第四部分主要证明方程组(4)向量解的两个分量都是非平凡的, 即都是非零的, 此时需要对 b 作一些限制(见推论1).

本文主要结果如下:

定理1 设 $s \in (0, 1)$, $n > 2s$, $2 < 2q < p_0$, $q_0 < 2^*$, $2^* = \frac{2n}{n-2s}$, $b(x) \in L^\infty(\Omega)$, 且 $b(x) > 0$, Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中具有 Lipschitz 边界的有界开集, 则方程组(2)存在山路解 $(u, v) \in E$, 且 $(u, v) \neq (0, 0)$.

推论1 假设方程组(4)中 $b > 2^{q-1} - 1$, $2 < 2q < 2^*$, $n > 2s$, $s \in (0, 1)$, 则问题(4)存在极小能量解 (u, v) , 其中 $u > 0, v > 0$.

2 一些基本的结论

这部分将证明一些有用的结论.

这里, 首先介绍一下空间 X 和 X_0 的一些基本结论. 论文中的一些记法如下:

$$Q = \mathbb{R}^{2n} \setminus \sigma$$

其中, $\sigma = (C\Omega) \times (C\Omega) \subset \mathbb{R}^{2n}$, $C\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

空间 $F = X \times X$ 的范数定义为

$$\|(f, g)\|_F^2 = \|f\|_X^2 + \|g\|_X^2$$

其中,

$$\|f\|_X^2 = \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_Q \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \quad (5)$$

容易验证 $\|\cdot\|_F$ 是 F 上的一个范数. 仅需证明 $\|(f, g)\|_F = 0$ 时, 在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处有 $(f, g) = (0, 0)$ 成立.

事实上, 由 $\|(f, g)\|_F = 0$, 得 $\|f\|_{L^2(\Omega)} = \|g\|_{L^2(\Omega)} = 0$, 所以在 Ω 上有

$$\text{a.e. } f = g = 0 \quad (6)$$

且

$$\begin{aligned} \int_Q \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy &= \\ \int_Q \frac{|g(x) - g(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

由式(7)知, 对几乎处处 $(x, y) \in Q$

$$f(x) = f(y), g(x) = g(y)$$

所以, f, g 在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处为常数, 不妨设 $f = c \in \mathbb{R}, g = d \in \mathbb{R}$.

由式(6)可得 $c = 0, d = 0$, 证毕.

下面, $G = H^s(\Omega) \times H^s(\Omega)$ 表示分数阶 Sobolev 空间, 并赋予范数

$$\|(f, g)\|_G^2 = \|f\|_{H^s(\Omega)}^2 + \|g\|_{H^s(\Omega)}^2$$

其中

$$\|f\|_{H^s(\Omega)}^2 = \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \quad (8)$$

注意到, 式(5)和式(8)并不等价, 因为 $\Omega \times \Omega$ 严格包含于 Q 中. 另外, $\|(\cdot)\|_p^p = \|\cdot\|_p^p + \|\cdot\|_p^p$ 表示 $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ 上的范数.

引理1 a. 若 $(u, v) \in F$, 则 $(u, v) \in G$, 且

$$\|(u, v)\|_G \leq \|(u, v)\|_F$$

b. 若 $(u, v) \in E$, 则 $(u, v) \in H^s(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\|(u, v)\|_G \leq \|(u, v)\|_{H^s(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n)} = \|(u, v)\|_F$$

证明 a. 若 $(u, v) \in F = X \times X$, 则

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy &\leq \\ \int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy &< +\infty \end{aligned}$$

同理

$$\int_{\Omega \times \Omega} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy < +\infty$$

因此, $(u, v) \in G = H^s(\Omega) \times H^s(\Omega)$,

$$\|(u, v)\|_G^2 = \|u\|_{H^s(\Omega)}^2 + \|v\|_{H^s(\Omega)}^2 = \|u\|_2^2 +$$

$$\int_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \|v\|_2^2 +$$

$$\int_{\Omega \times \Omega} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \leq \|u\|_2^2 +$$

$$\int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \|v\|_2^2 +$$

$$\int_Q \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy =$$

$$\|u\|_X^2 + \|v\|_X^2 = \|(u, v)\|_F^2$$

即

$$\|(u, v)\|_G \leq \|(u, v)\|_F$$

b. 由于 $E = \{(u, v) \in F: \mathbb{R}^n \setminus \Omega \text{ 中几乎处处有 } (u, v) = (0, 0)\}$, 因此, 若 $(u, v) \in E$, 则

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} < +\infty$$

$$\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|v\|_{L^2(\Omega)} < +\infty$$

且

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy &= \\ \int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy &< +\infty \end{aligned}$$

同理

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy < +\infty$$

所以 $(u, v) \in H^s(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n)$.

同时, $\|(u, v)\|_{H^s(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n)} = \|(u, v)\|_F$ 及

$$\|(u, v)\|_{H^s(\Omega) \times H^s(\Omega)} \leq \|(u, v)\|_{H^s(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n)}$$

即

$$\|(u, v)\|_G \leq \|(u, v)\|_{H^s(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n)} = \|(u, v)\|_F$$

引理 2 存在依赖于 n, s, Ω 的常数 $C(n, s, \Omega) > 1$, 使得对于任意的 $(u, v) \in E$, 有

$$\begin{aligned} &\int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \\ &\int_Q \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \leq \|(u, v)\|_F^2 \leq \\ &C \left(\int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \right. \\ &\left. \int_Q \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right) \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \|(u, v)\|_E^2 &= \int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \\ &\int_Q \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \end{aligned} \quad (9)$$

是 $E = X_0 \times X_0$ 上和式(5)等价的范数.

证明 首先, 由式(5)可得

$$\begin{aligned} \|(u, v)\|_F^2 &\geq \int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \\ &\int_Q \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \end{aligned}$$

另外, 因为 Ω 是有界的, 且 $2 < 2^* = \frac{2n}{n-2s}$, 所以 $L^{2^*}(\Omega)$ 连续嵌入到 $L^2(\Omega)$ 中, 可得

$$\|u\|_X^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \leq$$

$$|\Omega|^{\frac{2^*-2}{2^*}} \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^2 + \int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy$$

若 $(u, v) \in E = X_0 \times X_0$, 由引理 1 知 $(u, v) \in H^s(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n)$, 从而 $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, 由文献 [7] 的 Theorem 6.5 (这里 $p=2$), 可得

$$\|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy$$

其中, C 是仅依赖于 n, s 的正常数.

因此

$$\begin{aligned} \|u\|_X^2 &\leq (C |\Omega|^{\frac{2^*-2}{2^*}} + 1) \cdot \\ &\int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \end{aligned}$$

其中, C 是仅依赖于 n, s 的常数, 取 $C(n, s, \Omega) =$

$C |\Omega|^{\frac{2^*-2}{2^*}} + 1 > 1$, 则

$$\|u\|_X^2 \leq C \int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy$$

因此

$$\begin{aligned} \|(u, v)\|_F^2 &= \|u\|_X^2 + \|v\|_X^2 \leq \\ &C \left(\int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \right. \\ &\left. \int_Q \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right) \end{aligned}$$

要证明式(9)是 E 上的范数, 只需证明若 $\|(u, v)\|_E = 0$, 则有 $(u, v) = (0, 0)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处成立即可. 事实上, 由 $\|(u, v)\|_E = 0$ 可得

$$\begin{aligned} &\int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \\ &\int_Q \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = 0 \end{aligned}$$

同本节开始处的说明一样可证 $\mathbb{R}^n$ 中 $u = v = 0$ 几乎处处成立, 所以式(9)为 E 上的范数.

引理 3 $(E, \|(u, v)\|_E)$ 是 Hilbert 空间.

证明 首先对任意 $(u, v) \in E$, 考虑映射

$$(u, v) \mapsto \langle (u, v), (\varphi, \psi) \rangle :=$$

$$\begin{aligned} &\int_Q \frac{(u(x) - u(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \\ &\int_Q \frac{(v(x) - v(y))(\psi(x) - \psi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \end{aligned}$$

易知 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 E 上的内积, 它对应的范数和式(9)是一致的.

为证明 E 是一个 Hilbert 空间, 只需证 E 在范数 $\|(\cdot, \cdot)\|_E$ 下是完备的. 为此令 (u_j, v_j) 为 E 中的 Cauchy 列, 那么对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 ν_ϵ , 使得 $i, j \geq \nu_\epsilon$ 时有

$$\epsilon \geq \|(u_i - u_j, v_i - v_j)\|_E^2 \geq$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} \| (u_i - u_j, v_i - v_j) \|_F^2 &= \\ \frac{1}{C} (\| u_i - u_j \|_X^2 + \| v_i - v_j \|_X^2) &\geq \\ \frac{1}{C} \| u_i - u_j \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{C} \| v_i - v_j \|_{L^2(\Omega)}^2 &= \\ \frac{1}{C} \| (u_i - u_j, v_i - v_j) \|_{L^2(\Omega)}^2 & \quad (10) \end{aligned}$$

因为 $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 是完备的, 所以存在 $(u_\infty, v_\infty) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, 使得当 $j \rightarrow +\infty$ 时, 在 $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 中有 $(u_j, v_j) \rightarrow (u_\infty, v_\infty)$ 成立. 因此, 存在一个子列 $(u_{j_k}, v_{j_k}) \subset E$, 使得在 $\mathbb{R}^n$ 中 a. e. $(u_{j_k}, v_{j_k}) \rightarrow (u_\infty, v_\infty)^{[11]}$.

下证 $(u_\infty, v_\infty) \in E$. 由 Fatou 引理和式(10)中的第一个不等式(取 $\epsilon = 1$), 得

$$\begin{aligned} \int_Q \frac{|u_\infty(x) - u_\infty(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \\ \int_Q \frac{|v_\infty(x) - v_\infty(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \\ \int_Q \liminf_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{|u_{j_k}(x) - u_{j_k}(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \right. \\ \left. \frac{|v_{j_k}(x) - v_{j_k}(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right) \leq \\ \liminf_{k \rightarrow +\infty} \| (u_{j_k}, v_{j_k}) \|_E^2 = \\ \liminf_{k \rightarrow +\infty} \| (u_{j_k} - u_{v_1} + u_{v_1}, v_{j_k} - v_{v_1} + v_{v_1}) \|_E^2 = \\ \liminf_{k \rightarrow +\infty} \| (u_{j_k} - u_{v_1}, v_{j_k} - v_{v_1}) + (u_{v_1}, v_{v_1}) \|_E^2 \leq \\ \liminf_{k \rightarrow +\infty} [2 \| (u_{j_k} - u_{v_1}, v_{j_k} - v_{v_1}) \|_E^2 + \\ 2 \| (u_{v_1}, v_{v_1}) \|_E^2] \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} [2(1 + \\ \| (u_{v_1}, v_{v_1}) \|_E^2)] \leq 2(1 + \| (u_{v_1}, v_{v_1}) \|_E^2) < +\infty \end{aligned}$$

因此, $(u_\infty, v_\infty) \in E$.

接下来只需证整个序列在 E 中收敛到 (u_∞, v_∞) . 为此, 令 $i \geq v_\epsilon$, 由式(10)的第一个不等式、引理 2 及 Fatou 引理可得

$$\begin{aligned} \| (u_i, v_i) - (u_\infty, v_\infty) \|_E^2 &= \| (u_i - u_\infty, \\ v_i - v_\infty) \|_E^2 &\leq \| (u_i - u_\infty, v_i - v_\infty) \|_F^2 = \\ \| u_i - u_\infty \|_X^2 + \| v_i - v_\infty \|_X^2 &= \| u_i - u_\infty \|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ \int_Q \frac{|u_i(x) - u_\infty(x) - u_i(y) + u_\infty(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \\ \| v_i - v_\infty \|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ \int_Q \frac{|v_i(x) - v_\infty(x) - v_i(y) + v_\infty(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \\ \int_\Omega \liminf_{k \rightarrow +\infty} (|u_i - u_{j_k}|^2 + |v_i - v_{j_k}|^2) dx dy + \\ \int_Q \liminf_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{|u_i(x) - u_{j_k}(x) - u_i(y) + u_{j_k}(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{|v_i(x) - v_{j_k}(x) - v_i(y) + v_{j_k}(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} \right) dx dy \leq \\ \liminf_{k \rightarrow +\infty} (\| u_i - u_{j_k} \|_2^2 + \| v_i - v_{j_k} \|_2^2) + \\ \liminf_{k \rightarrow +\infty} (\| u_i - u_{j_k} \|_{X_0}^2 + \| v_i - v_{j_k} \|_{X_0}^2) = \\ \liminf_{k \rightarrow +\infty} \| u_i - u_{j_k}, v_i - v_{j_k} \|_2^2 + \\ \liminf_{k \rightarrow +\infty} \| u_i - u_{j_k}, v_i - v_{j_k} \|_E^2 \leq \\ \liminf_{k \rightarrow +\infty} \| (u_i - u_{j_k}, v_i - v_{j_k}) \|_F^2 \leq \\ C \liminf_{k \rightarrow +\infty} \| (u_i - u_{j_k}, v_i - v_{j_k}) \|_E^2 \leq C\epsilon \end{aligned}$$

即在 E 中当 $i \rightarrow +\infty$ 时, $(u_i, v_i) \rightarrow (u_\infty, v_\infty)$, 引理得证.

引理 4 令 (u_j, v_j) 为 E 中的有界序列, 则对任意的 $\nu \in [1, 2^*)$, 存在子列(仍记为 (u_j, v_j))和 $(u_\infty, v_\infty) \in L^\nu(\mathbb{R}^n) \times L^\nu(\mathbb{R}^n)$, 使得该子列当 $j \rightarrow +\infty$ 时, 在 $L^\nu(\mathbb{R}^n) \times L^\nu(\mathbb{R}^n)$ 中

$$(u_j, v_j) \rightarrow (u_\infty, v_\infty)$$

证明 由引理 1 的 b 可知 $(u_j, v_j) \in H^s(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n)$. 另外, 由引理 1 的 b 以及引理 2 可得

$$\begin{aligned} \| (u_j, v_j) \|_G &\leq \| (u_j, v_j) \|_{H^s(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n)} = \\ \| (u_j, v_j) \|_F &\leq C \| (u_j, v_j) \|_E \end{aligned}$$

其中, C 仅依赖于 n, s 和 Ω . 因为 (u_j, v_j) 在 E 中有界, 所以在 G 中有界, 因此也在 $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 中有界, 故 $\{u_j\}, \{v_j\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中有界.

由文献[7]的 Corollary 7.2 以及 Ω 的条件可知, 对任意的 $m \in [1, 2^*)$ 存在 $u_\infty, v_\infty \in L^m(\Omega)$ 和该序列的一个子列(下标仍记为 j), 使得在 $L^m(\Omega)$ 中, 当 $j \rightarrow +\infty$ 时, $u_j \rightarrow u_\infty, v_j \rightarrow v_\infty$. 因为 (u_j, v_j) 在 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ 中等于 0, 所以在 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ 中可以定义 $(u_\infty, v_\infty) := (0, 0)$. 因此在 $L^m(\mathbb{R}^n)$ 中, $(u_j, v_j) \rightarrow (u_\infty, v_\infty)$.

3 山路解的存在性

这部分将利用山路引理来找泛函的临界点. 因此, 首先需要验证泛函 J 的几何特征, 并且满足 PS 紧性条件.

命题 1 对泛函 J , 存在 $\rho > 0, \beta > 0$, 使得对于任意满足 $\| (u, v) \|_E = \rho$ 的 $(u, v) \in E$, 有 $J(u, v) \geq \beta$.

证明 令任意的 $(u, v) \in E$, 因为 $b(x) \in L^\infty(\Omega)$, 所以存在 $b > 0$, 使得 $b(x) \leq b$, 则

$$J(u, v) = \frac{1}{2} \int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy +$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_Q \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \frac{1}{p_0} \int_\Omega |u|^{p_0} dx - \\ & \frac{1}{q_0} \int_\Omega |v|^{q_0} dx - \frac{1}{q} \int_\Omega b(x) |uv|^q dx \geq \\ & \frac{1}{2} \int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \\ & \frac{1}{2} \int_Q \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \frac{1}{p_0} \int_\Omega |u|^{p_0} dx - \\ & \frac{1}{q_0} \int_\Omega |v|^{q_0} dx - \frac{b}{q} \int_\Omega |uv|^q dx = \frac{1}{2} \|(u, v)\|_E^2 - \\ & \frac{1}{p_0} \|u\|_{p_0}^{p_0} - \frac{1}{q_0} \|v\|_{q_0}^{q_0} - \frac{b}{q} \int_\Omega |uv|^q dx \end{aligned}$$

因为

$$\frac{1}{q} b |u|^q |v|^q \leq \frac{1}{2q} b (|u|^{2q} + |v|^{2q})$$

所以

$$\begin{aligned} J(u, v) & \geq \frac{1}{2} \|(u, v)\|_E^2 - \frac{1}{p_0} \|u\|_{p_0}^{p_0} - \\ & \frac{1}{q_0} \|v\|_{q_0}^{q_0} - \frac{b}{2q} \int_\Omega (|u|^{2q} + |v|^{2q}) dx = \\ & \frac{1}{2} \|(u, v)\|_E^2 - \frac{1}{p_0} \|u\|_{p_0}^{p_0} - \frac{1}{q_0} \|v\|_{q_0}^{q_0} - \\ & \frac{b}{2q} (\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q}) \geq \frac{1}{2} \|(u, v)\|_E^2 - \\ & \frac{1}{p_0} \|u\|_{p_0}^{p_0} - \frac{1}{q_0} \|v\|_{q_0}^{q_0} - \frac{b}{2q} (\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q})^q \end{aligned}$$

因为 Ω 有界且 $2 < 2q < 2^*$, 因此 $H^s(\Omega)$ 连续嵌入到 $L^{2q}(\Omega)$ 中(见文献[5]). 因此存在常数 $C_1, C_2 > 0$, 使得

$$\begin{aligned} \|u\|_{2q}^2 & \leq C_1 \|u\|_{H^s(\Omega)}^2 = C_1 \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \right. \\ & \left. \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right) \leq C_1 \|u\|_X^2 \cdot \\ \|v\|_{2q}^2 & \leq C_2 \|v\|_{H^s(\Omega)}^2 = C_2 \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \right. \\ & \left. \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right) \leq C_2 \|v\|_X^2 \end{aligned}$$

由引理 2 可知, 存在 $C', C'' > 0$, 使得

$$\|u\|_{2q}^2 + \|v\|_{2q}^2 \leq C' \|(u, v)\|_E^2 \leq C'' \|(u, v)\|_E^2$$

因为 $2 < 2q < p_0, q_0 < 2^*$, 所以有 $L^{2^*}(\Omega)$ 连续嵌入到 $L^{p_0}(\Omega)$ 中、 $L^{2^*}(\Omega)$ 连续嵌入到 $L^{q_0}(\Omega)$ 中, 即存在仅依赖于 n, s 的正常数 C_3 , 使得

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p_0}(\Omega)}^2 & \leq C_3 \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^2 \leq C_3 \|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \\ & C_3 \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = C_3 \|u\|_{X_0}^2 \end{aligned}$$

因此

$$\|u\|_{L^{p_0}(\Omega)}^{p_0} = (\|u\|_{L^{p_0}(\Omega)}^2)^{\frac{p_0}{2}} \leq C_3 \|u\|_{X_0}^{p_0}$$

同理

$$\|v\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{q_0} \leq C_3 \|v\|_{X_0}^{q_0}$$

因为存在常数 C_4 , 使得

$$\|u\|_{X_0}^{p_0} + \|v\|_{X_0}^{q_0} \leq C_4 (\|u\|_{X_0}^2 +$$

$$\|v\|_{X_0}^2)^{\min(\frac{p_0}{2}, \frac{q_0}{2})} = C_4 \|(u, v)\|_E^{\min(p_0, q_0)}$$

成立, 所以, 存在常数 $C, C_* > 0$, 使得

$$J(u, v) \geq \frac{1}{2} \|(u, v)\|_E^2 -$$

$$C \|(u, v)\|_E^{\min(p_0, q_0)} - C_* \|(u, v)\|_E^{2q}$$

由 $2 < 2q < p_0, q_0$ 可知, 对于充分小的 ρ , 可使得

$$\inf_{\|(u, v)\|_E = \rho} J(u, v) \geq$$

$$\rho^2 \left(\frac{1}{2} - C \rho^{\min(p_0, q_0)-2} - C_* \rho^{2q-2} \right) =: \beta > 0$$

命题得证.

命题 2 存在 $(u, v) \in E$, 使得 $\|(u, v)\|_E > \rho, J(u, v) < \beta$, 且在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处有 $u \geq 0, v \geq 0$ 成立. 其中, ρ, β 是命题 1 中给出的.

证明 选取 $u_0, v_0 \in X_0$, 使得 $\|u_0\|_{X_0} = 1, \|v_0\|_{X_0} = 1$, 且 $u_0 \geq 0, v_0 \geq 0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处成立, 因此 $\|(u_0, v_0)\|_E^2 = 2$. 由式(3)可知这种取法是合理的.

令 $t > 0$, 有

$$\begin{aligned} J(tu_0, tv_0) & = \frac{1}{2} \int_Q \frac{|tu_0(x) - tv_0(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \\ & \frac{1}{2} \int_Q \frac{|tv_0(x) - tv_0(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \\ & \frac{1}{p_0} \int_\Omega |tu_0|^{p_0} dx - \frac{1}{q_0} \int_\Omega |tv_0|^{q_0} dx - \\ & \frac{1}{q} t^{2q} \int_\Omega b(x) |u_0 v_0|^q dx = \frac{1}{2} t^2 \|(u_0, v_0)\|_E^2 - \\ & \frac{1}{p_0} t^{p_0} \|u_0\|_{p_0}^{p_0} - \frac{1}{q_0} t^{q_0} \|v_0\|_{q_0}^{q_0} - \frac{1}{q} t^{2q} \int_\Omega b(x) \cdot \\ & |u_0 v_0|^q dx \leq \frac{1}{2} t^2 \|(u_0, v_0)\|_E^2 - \\ & \frac{1}{p_0} t^{p_0} \|u_0\|_{p_0}^{p_0} - \frac{1}{q_0} t^{q_0} \|v_0\|_{q_0}^{q_0} = \\ & t^2 - \frac{1}{p_0} t^{p_0} \|u_0\|_{p_0}^{p_0} - \frac{1}{q_0} t^{q_0} \|v_0\|_{q_0}^{q_0} \end{aligned}$$

不妨假设 $p_0 < q_0$, 则有 $L^{q_0}(\Omega)$ 连续嵌入到 $L^{p_0}(\Omega)$ 中, 即存在 $C' > 0$, 使得

$$C' \|v_0\|_{p_0}^{q_0} \leq \|v_0\|_{q_0}^{q_0}$$

因此

$$J(tu_0, tv_0) \leq t^2 - \frac{1}{p_0} t^{p_0} \|u_0\|_{p_0}^{p_0} -$$

$$\frac{1}{q_0} t^{q_0} C' \|v_0\|_{p_0}^{q_0}$$

当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 存在常数 $C > 0$, 使得

$$J(tu_0, tv_0) \leq t^2 - Ct^{p_0} (\|u_0\|_{p_0}^{p_0} + \|v_0\|_{p_0}^{q_0})$$

即 $t \rightarrow +\infty$ 时, $J(tu, tv) \rightarrow -\infty$.

同样, 若 $q_0 < p_0$, 则

$$J(tu_0, tv_0) \leq t^2 -$$

$$Ct^{q_0} (\|u_0\|_{p_0}^{p_0} + \|v_0\|_{q_0}^{q_0}) \rightarrow -\infty$$

因此, 取 $(u, v) = T(u_0, v_0)$, 其中 T 足够大, 则该 (u, v) 满足命题条件.

命题 1 和命题 2 给出了山路引理所满足的几何条件. 接下来通过命题 3 和命题 4 验证 PS 条件.

命题 3 令 $c \in \mathbb{R}$, (u_j, v_j) 是 E 中的序列, 且满足当 $j \rightarrow +\infty$ 时,

$$J(u_j, v_j) \rightarrow c \quad (11)$$

$$\sup\{|\langle J'(u_j, v_j), (\varphi, \psi) \rangle| :$$

$$(\varphi, \psi) \in E, \|(\varphi, \psi)\|_E = 1\} \rightarrow 0 \quad (12)$$

则 (u_j, v_j) 在 E 中有界.

证明 令 (u_j, v_j) 为 E 中的序列. 由 $\langle J'(u, v), (\varphi, \psi) \rangle$ 的定义可得

$$\begin{aligned} \langle J'(u, v), (\varphi, \psi) \rangle = & \int_Q \frac{(u(x) - u(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \\ & \int_Q \frac{(v(x) - v(y))(\psi(x) - \psi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \\ & \int_\Omega (u^{p_0-1} \varphi + v^{q_0-1} \psi) dx - \\ & \int_\Omega b(x) (u^{q-1} v^q \varphi + v^{q-1} u^q \psi) dx \end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned} \langle J'(u_j, v_j), (u_j, v_j) \rangle = & \int_Q \frac{|u_j(x) - u_j(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \\ & \int_Q \frac{|v_j(x) - v_j(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \\ & \left(\int_\Omega (|u_j|^{p_0} + |v_j|^{q_0}) dx \right) - \\ & 2 \int_\Omega b(x) |u_j v_j|^q dx \end{aligned}$$

对任意 $j \in N$, 由式(11)~(12)可知, 存在 $K > 0$, 使得

$$|J(u_j, v_j)| \leq K \quad (13)$$

$$\left| \left\langle J'(u_j, v_j), \frac{(u_j, v_j)}{\|(u_j, v_j)\|_E} \right\rangle \right| \leq K \quad (14)$$

因此

$$\frac{1}{\|(u_j, v_j)\|_E} \langle J'(u_j, v_j), (u_j, v_j) \rangle \geq -K$$

即

$$\langle J'(u_j, v_j), (u_j, v_j) \rangle \geq -K \|(u_j, v_j)\|_E \quad (15)$$

由式(13)和式(15)可得

$$J(u_j, v_j) - \frac{1}{2q} \langle J'(u_j, v_j), (u_j, v_j) \rangle \leq$$

$$K(1 + \|(u_j, v_j)\|_E)$$

因为 $2 < 2q < p_0, q_0 < 2^*$, 所以

$$J(u_j, v_j) - \frac{1}{2q} \langle J'(u_j, v_j), (u_j, v_j) \rangle =$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q} \right) \|(u_j, v_j)\|_E^2 + \left(\frac{1}{2q} - \frac{1}{p_0} \right) \|u_j\|_{p_0}^{p_0} +$$

$$\left(\frac{1}{2q} - \frac{1}{q_0} \right) \|v_j\|_{q_0}^{q_0} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q} \right) \|(u_j, v_j)\|_E^2$$

因而存在常数 $K_* > 0$, 使得对任意的 $j \in N$, 有

$$\|(u_j, v_j)\|_E^2 \leq K_* (1 + \|(u_j, v_j)\|_E)$$

命题 3 得证.

命题 4 令 (u_j, v_j) 为 E 中的有界序列且满足命题 3 中的条件(12), 则存在 $(u_\infty, v_\infty) \in E$ 及某子列, 使得当 $j \rightarrow +\infty$ 时, $\|(u_j - u_\infty, v_j - v_\infty)\|_E \rightarrow 0$.

证明 由引理 3 知 E 为一个 Hilbert 空间, 所以是自反的, 因为 (u_j, v_j) 在 E 中是有界的, 所以存在子列(仍记为 (u_j, v_j))以及 $(u_\infty, v_\infty) \in E$, 使得对任意的 $(\varphi, \psi) \in E$, 当 $j \rightarrow +\infty$ 时,

$$\begin{aligned} & \int_Q \frac{(u_j(x) - u_j(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \\ & \int_Q \frac{(v_j(x) - v_j(y))(\psi(x) - \psi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \rightarrow \\ & \int_Q \frac{(u_\infty(x) - u_\infty(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \\ & \int_Q \frac{(v_\infty(x) - v_\infty(y))(\psi(x) - \psi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \quad (16) \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} \langle J'(u, v), (\varphi, \psi) \rangle = & \int_Q \frac{(u(x) - u(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \\ & \int_Q \frac{(v(x) - v(y))(\psi(x) - \psi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \\ & \int_\Omega (u^{p_0-1} \varphi + v^{q_0-1} \psi) dx - \\ & \int_\Omega b(x) (u^{q-1} v^q \varphi + v^{q-1} u^q \psi) dx \end{aligned}$$

由式(12)可知

$$\left\langle J'(u_j, v_j), \frac{(u_j, v_j)}{\|(u_j, v_j)\|_E} \right\rangle = \frac{1}{\|(u_j, v_j)\|_E} \cdot$$

$$\langle J'(u_j, v_j), (u_j, v_j) \rangle = \frac{1}{\|(u_j, v_j)\|_E} \cdot$$

$$\begin{aligned} & \left(\int_Q \frac{|u_j(x) - u_j(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \right. \\ & \int_Q \frac{|v_j(x) - v_j(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \\ & \int_\Omega (|u_j|^{2q} + |v_j|^{2q}) dx - \\ & \left. 2b \int_\Omega |u_j v_j|^q dx \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & \int_Q \frac{|u_j(x) - u_j(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \\ & \int_Q \frac{|v_j(x) - v_j(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \rightarrow \\ & \int_\Omega (|u_j|^{p_0} + |v_j|^{q_0}) dx + \\ & 2 \int_\Omega b(x) |u_j v_j|^q dx \end{aligned} \quad (17)$$

同样,

$$\begin{aligned} & \left\langle J'(u_j, v_j), \frac{(u_\infty, v_\infty)}{\|(u_\infty, v_\infty)\|_E} \right\rangle = \frac{1}{\|(u_\infty, v_\infty)\|_E} \cdot \\ & \langle J'(u_j, v_j), (u_\infty, v_\infty) \rangle = \frac{1}{\|(u_\infty, v_\infty)\|_E} \cdot \\ & \left[\int_Q \frac{(u_j(x) - u_j(y))(u_\infty(x) - u_\infty(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \right. \\ & \int_Q \frac{(v_j(x) - v_j(y))(v_\infty(x) - v_\infty(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \\ & \int_\Omega (|u_j|^{p_0-1} |u_\infty| + |v_j|^{q_0-1} |v_\infty|) dx - \\ & \left. \int_\Omega b(x) (|u_j|^{q-1} |v_j|^q |u_\infty| + \right. \\ & \left. |v_j|^{q-1} |u_j|^q |v_\infty|) dx \right] \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (18)$$

由引理4,对某子序列,当 $j \rightarrow +\infty$ 时, $(u_j, v_j) \rightarrow (u_\infty, v_\infty)$ 在 $L^q(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n)$ 中, $(u_j, v_j) \rightarrow (u_\infty, v_\infty)$ a.e. 在 $\mathbb{R}^n$ 中.

由文献[11]的 Theorem IV. 9 可知,存在 $l(x), m(x) \in L^q(\mathbb{R}^n)$, 使得对任意 $j \in N$:

$$\begin{aligned} & |u_j(x)| \leq l(x) \text{ a.e. 在 } \mathbb{R}^n \text{ 中,} \\ & |v_j(x)| \leq m(x) \text{ a.e. 在 } \mathbb{R}^n \text{ 中} \end{aligned}$$

由控制收敛定理^[12]可得

$$\begin{aligned} & \int_\Omega (|u_j|^{p_0} + |v_j|^{q_0}) dx + 2 \int_\Omega b(x) \cdot \\ & |u_j v_j|^q dx \rightarrow \int_\Omega (|u_\infty|^{p_0} + |v_\infty|^{q_0}) dx + \\ & 2 \int_\Omega b(x) |u_\infty v_\infty|^q dx \end{aligned} \quad (19)$$

$$\int_\Omega (|u_j|^{p_0-1} |u_\infty| + |v_j|^{q_0-1} |v_\infty|) dx +$$

$$\begin{aligned} & \int_\Omega b(x) (|u_j|^{q-1} |v_j|^q |u_\infty| + \\ & |v_j|^{q-1} |u_j|^q |v_\infty|) dx \rightarrow \int_\Omega (|u_\infty|^{p_0} + \\ & |v_\infty|^{q_0}) dx + 2 \int_\Omega b(x) |u_\infty v_\infty|^q dx \end{aligned} \quad (20)$$

由式(16)、式(18)、式(20)得

$$\begin{aligned} & \langle J'(u_j, v_j), (u_\infty, v_\infty) \rangle \rightarrow \\ & \int_Q \frac{|u_\infty(x) - u_\infty(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \\ & \int_Q \frac{|v_\infty(x) - v_\infty(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \\ & \int_\Omega (|u_\infty|^{p_0} + |v_\infty|^{q_0}) dx - \\ & 2 \int_\Omega b(x) |u_\infty v_\infty|^q dx = 0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & \int_Q \frac{|u_\infty(x) - u_\infty(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \\ & \int_Q \frac{|v_\infty(x) - v_\infty(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \\ & \int_\Omega (|u_\infty|^{p_0} + |v_\infty|^{q_0}) dx + \\ & 2 \int_\Omega b(x) |u_\infty v_\infty|^q dx \end{aligned}$$

由式(17)和式(19)得当 $j \rightarrow +\infty$

$$\|(u_j, v_j)\|_E^2 \rightarrow \|(u_\infty, v_\infty)\|_E^2$$

由 Brezis-Leb 引理,可知

$$\|(u_j, v_j) - (u_\infty, v_\infty)\|_E \rightarrow 0$$

定理 1 的证明 由命题 1~4 及山路引理可知,

泛函 J 存在临界点 $(u, v) \in E$, 并且

$$J(u, v) \geq \beta > 0 = J(0, 0)$$

以及 $(u, v) \neq (0, 0)$, 定理 1 得证.

4 研究方程组存在正解的条件

特殊地,当 $p_0 = q_0 = 2q, b(x) = b$ 时,方程组(2)变为方程组(4)

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = |u|^{2q-2} u + b |v|^q |u|^{q-2} u, & x \in \Omega \\ (-\Delta)^s v = |v|^{2q-2} v + b |u|^q |v|^{q-2} v, & x \in \Omega \\ u = 0, v = 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

它对应的泛函 $J^*: E \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\begin{aligned} J^*(u, v) = & \frac{1}{2} \int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \\ & \frac{1}{2} \int_Q \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2q} \int_{\Omega} |u|^{2q} dx - \frac{1}{2q} \int_{\Omega} |v|^{2q} dx - \frac{b}{q} \int_{\Omega} |uv|^q dx$$

为了研究问题(4)存在正解需要满足的条件,首先给出几个有用的引理.

定义 Nehari 流形为

$$\mathcal{N} = \{\omega \in E \setminus \{0\} : \langle I'(\omega), \omega \rangle = 0\}$$

引理 5 对于每一个 $\omega \in E \setminus \{0\}$, 存在唯一的 $\bar{t}(\omega) > 0$, 使得 $\bar{t}(\omega)\omega \in \mathcal{N}$. 当 $t = \bar{t}(\omega)$ 时, $J^*(t\omega)$ 在 $t \geq 0$ 上取得最大值. 函数

$$\omega \mapsto \bar{t}(\omega) : E \setminus \{0\} \mapsto (0, +\infty)$$

是连续的, 且映射

$$\omega \mapsto \bar{t}(\omega)\omega$$

定义了 E 中单位球到 $\mathcal{N}$ 的一个同胚.

证明 首先证明泛函 J^* 满足如下的几何性质:

a. $(0, 0)$ 是一个严格极小值点;

b. 对任意 $\omega \in E \setminus \{0\}$ 及充分大的 $t > 0$, 有 $J^*(t\omega) < 0$.

事实上, 如果定义

$$F(u, v) = \frac{1}{2q} [|u|^{2q} + |v|^{2q}] + \frac{1}{q} b |u|^q |v|^q$$

则 F 满足

$$\lim_{\|(u, v)\|_{E \rightarrow 0}} \frac{1}{\|(u, v)\|_{E \rightarrow 0}^2} \int_{\Omega} F(u, v) = \lim_{\|(u, v)\|_{E \rightarrow 0}} \frac{1}{\|(u, v)\|_{E \rightarrow 0}^2} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \|(u, v)\|_E^2 - J^*(u, v) \right] = 0 \quad (21)$$

$$F(u, v) \geq \frac{1}{2q} (|u|^{2q} + |v|^{2q}) \quad (22)$$

由式(21)可推出 a 成立. 由式(22)可知, 对任意 $t > 0$, 下面的不等式成立

$$J^*(tu, tv) \leq \frac{1}{2} t^2 \|(u, v)\|_E^2 - \frac{t^{2q}}{2q} \int_{\Omega} (|u|^{2q} + |v|^{2q}) dx = t^{2q} \left[\frac{1}{2t^{2q-2}} \|(u, v)\|_E^2 - \frac{1}{2q} \int_{\Omega} (|u|^{2q} + |v|^{2q}) dx \right]$$

因此 b 成立.

对任意 $\omega = (u, v) \in E \setminus \{0\}$ 和 $t > 0$, 令

$$g(t) := J^*(t\omega) = J^*(tu, tv) \quad (23)$$

由 a, b 可知存在 $\bar{t} = \bar{t}(\omega) > 0$, 使得

$$g(\bar{t}) = \max_{t > 0} g(t) \quad (24)$$

因为 g 的每一个正的驻点 $t > 0$ 满足

$$g'(t) = t \|(u, v)\|_E^2 - 2qt^{2q-1} \int_{\Omega} F(u, v) = t \left\{ \|(u, v)\|_E^2 - t^{2q-2} \left[\|(u, v)\|_{\frac{2q}{q}}^{2q} + 2 \int_{\Omega} b |uv|^q dx \right] \right\} = 0 \quad (25)$$

因为 $q > 1$, 所以 $\bar{t} = \bar{t}(\omega)$ 是 $t > 0$ 上唯一使得 $t\omega \in \mathcal{N}$ 的点. 因此 $\mathcal{N}$ 与 E 中的单位球径向同胚. 式(25)表明映射 $\omega \mapsto \bar{t}(\omega)\omega$ 是连续的.

记

$$c_{\mathcal{N}} := \inf_{\mathcal{N}} J^*(\omega)$$

$$c_1 := \inf_{\omega \in E \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} J^*(t\omega)$$

$$c := \inf_{\Gamma} \max_{[0, 1]} J^*(\gamma(t))$$

其中

$$\Gamma = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow E, \gamma \text{ 连续, 且 } \gamma(0) = 0, J^*(\gamma(1)) < 0\}$$

引理 6 $c_{\mathcal{N}} = c_1 = c$.

证明 由引理 5 可知

$$c_1 = \inf_{\omega \in E \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} J^*(t\omega) = \inf_{E \setminus \{0\}} J^*(\bar{t}(\omega)\omega) = \inf_{z \in \mathcal{N}} J^*(z) = c_{\mathcal{N}}$$

因为对充分大的 t , 有 $J^*(t\omega) < 0$, 所以 $c \leq c_1$. 又因为任意的 $\gamma \in \Gamma$ 与 $\mathcal{N}$ 相交, 故 $c \geq c_{\mathcal{N}}$. 因此结论得证.

注: 事实上, 下面的证明只需用到 $c \leq c_1$ 即可.

推论 1 的证明 由定理 1 可知式(4)存在非平凡解 $(u, v) \neq (0, 0)$.

首先证明 u, v 都是非平凡的. 若 $v \equiv 0$, 则 $\omega = (u_0, 0)$, 而 u_0 是下面问题的解:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = u^{2q-1}, & x \in \Omega \\ u > 0, & x \in \Omega \\ u = 0, & \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \quad (26)$$

同样, 若 $u \equiv 0$, 则 $\omega = (0, v_0)$, v_0 是下面问题的解:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s v = v^{2q-1}, & x \in \Omega \\ v > 0, & x \in \Omega \\ v = 0, & \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

接下来只需证明

$$c = J^*(u, v) < \min\{J^*(u_0, 0), J^*(0, v_0)\}$$

因为 u_0 是式(26)的解, 所以

$$\|u_0\|_{X_0}^{2q} = \|u_0\|_{\frac{2q}{q}}^{2q}, \|v_0\|_{X_0}^{2q} = \|v_0\|_{\frac{2q}{q}}^{2q}$$

因此可以得到如下关系:

$$C := J^*(u_0, 0) = \frac{q-1}{2q} \|u_0\|_{\frac{2q}{q-1}}^2 = \frac{q-1}{2q} \|u_0\|_{X_0}^2 \quad (27)$$

$$J^*(0, v_0) = C = \frac{q-1}{2q} \|v_0\|_{X_0}^2 \quad (28)$$

另外,由引理6可知

$$c = J^*(u, v) \leq \max_{t \geq 0} J^*(t(\varphi, \psi)), \\ \forall (\varphi, \psi) \in E$$

由式(27)和式(28)知,只需找到 $(\varphi, \psi) \in E$, $\varphi \neq 0$ 且 $\psi \neq 0$,使得

$$c \leq c_1 \leq \max_{t \geq 0} J^*(t(\varphi, \psi)) < C$$

其中, C 由式(27)定义.

任给 $(\varphi, \psi) \in E$,考虑由式(23)定义的 $g(t)$ 的最大值 $I(\varphi, \psi)$,这里

$$I(\varphi, \psi) = \max_{t \geq 0} g(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \cdot$$

$$\left[\frac{(\|\varphi\|_{X_0}^2 + \|\psi\|_{X_0}^2)^q}{\|\varphi\|_{\frac{2q}{q-1}}^2 + \|\psi\|_{\frac{2q}{q-1}}^2 + 2b \|\varphi\psi\|_{\frac{q}{q-1}}} \right]^{\frac{1}{q-1}}$$

因此可以找到一个 (φ, ψ) , $\varphi \neq 0$ 且 $\psi \neq 0$,使得

$$c \leq I(\varphi, \psi) < J^*(u_0, 0) = C$$

因为 u_0 是式(26)的解,所以 $(-\Delta)^s u_0 = u_0^{2q-1}$,令 $t = \left(\frac{1}{b+1}\right)^{\frac{1}{2q-2}} > 0$,易知 (tu_0, tu_0) 是式(4)的一个解.

取 $(\varphi, \psi) = (tu_0, tu_0)$,则

$$I(tu_0, tu_0) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \cdot$$

$$\left[\frac{(\|tu_0\|_{X_0}^2 + \|tu_0\|_{X_0}^2)^q}{\|tu_0\|_{\frac{2q}{q-1}}^2 + \|tu_0\|_{\frac{2q}{q-1}}^2 + 2b \|t^2 u_0^2\|_{\frac{q}{q-1}}} \right]^{\frac{1}{q-1}} = \\ \frac{1 - \frac{1}{q}}{(b+1)^{\frac{1}{q-1}}} \|u_0\|_{X_0}^2 = \frac{2C}{(b+1)^{\frac{1}{q-1}}}$$

因此只需证明 $\frac{2C}{(b+1)^{\frac{1}{q-1}}} < C$ 即可,而当 $b > 2^{q-1} - 1$

时不等式显然是成立的,推论1得证.

参考文献:

[1] SERVADEI R, VALDINOCI E. Lewy-Stampacchia type

estimates for variational inequalities driven by (non) local operators[J]. *Revista Matemática Iberoamericana*, 2013, 29(3): 1091 - 1126.

[2] DI NEZZA E, PALATUCCI G, VALDINOCI E. Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces[J]. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2012, 136(5): 521 - 573.

[3] BREZIS H. *Analyse fonctionnelle-theorie et applications* [M]. Paris: Masson, 1983.

[4] SERVADEI R, VALDINOCI E. Mountain pass solutions for non-local elliptic operators [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, 389(2): 887 - 898.

[5] MAIA L A, MONTEFUSCO E, PELLACCI B. Positive solutions for a weakly coupled nonlinear Schrödinger system[J]. *Journal of Differential Equations*, 2006, 229(2): 743 - 767.

[6] AMBROSETTI A, RABINOWITZ P. Dual variational methods in critical point theory and applications [J]. *Journal of Functional Analysis*, 1973, 14(4): 349 - 381.

[7] RABINOWITZ P H. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations* [M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1986.

[8] STRUWE M. *Variational methods: applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems* [M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 1990.

[9] PUCCI P, RADULESCU V. The impact of the mountain pass theory in nonlinear analysis: a mathematical survey[J]. *Bollettino Dell Unione Matematica Italiana*, 2010, 3(3): 543 - 584.

[10] BREZIS H, LIEB E H. Minimum action solutions of some vector field equations[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 1984, 96(1): 97 - 113.

[11] RABINOWITZ P H. On a class of nonlinear Schrödinger equations [J]. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 1992, 43(2): 270 - 291.

[12] 陈雨彤, 魏公明. 具奇异非线性项 p -Laplace 方程 Dirichlet 问题解的存在唯一性[J]. *上海理工大学学报*, 2015, 37(4): 311 - 316.

(编辑: 丁红艺)