

具有 Levy 噪声的随机 Holling-Tanner 模型

周艳丽¹, 璞桂萍²

(1. 上海健康医学院 文理学院, 上海 200093; 2. 上海健康医学院 健康信息技术与管理学院, 上海 200093)

摘要: 考虑了噪声对随机 Holling-Tanner 模型的影响. 这种噪声可以理解为海啸、地震、大规模的传染病等产生的突发的且随机性很强的干扰. 首先, 证明了该模型的全局正解的存在唯一性. 然后, 结合随机比较定理和鞅论等知识找到了种群在时间均值意义下持续存在和随机灭亡的充分条件. 这些结论说明 Levy 噪声对种群的持久性和灭绝性具有显著性的影响, 甚至可以使种群的长期动力学行为发生根本性改变. 最后, 通过数值模拟直观地验证了 Levy 噪声对种群的影响.

关键词: Holling-Tanner 模型; Levy 噪声; 持续; 绝灭

中图分类号: O 175.1 **文献标志码:** A

Stochastic Holling-Tanner Model with Levy Noise

ZHOU Yanli¹, PU Guiping²

(1. College of Arts and Science, Shanghai University of Medicine and Health Sciences, Shanghai 200093, China;

2. Faculty of Information Technology and Management, Shanghai University of
Medicine and Health Sciences, Shanghai 200093, China)

Abstract: The dynamics of stochastic Holling-Tanner model with noises were discussed. The noises can be considered as the flood, tsunami, earthquake, drought, large-scale infectious disease, volcanic eruptions and climate warming etc, and they can produce sudden, discrete and large stochastic perturbations. It is shown that the stochastic Holling-Tanner model with noises admits a unique positive global solution starting from the positive initial value. Then, sufficient conditions of the persistence in the meaning of time average and the extinction of the model were obtained by making use of the stochastic comparison theorem and martingale theory etc. The above conclusions show that Levy noises have significant effects on the persistence and extinction of the population, which can even make the long-time dynamic behavior of the population model change fundamentally. Numerical simulations were carried out to illustrate the influence of Levy noises on the population.

Keywords: Holling-Tanner model; Levy noise; persistence; extinction

由于生物种群模型理论对于实际应用的重要指导意义和价值, 这方面的研究越来越受到重视. 在自

然环境中存在着大量的不确定的随机因素,这些不确定的因素对生物种群模型有着明显的影响.因此,考虑随机生物种群模型能更客观、更全面地了解和认识生物的发展规律和内在本质.近些年来,许多学者将确定性的生物种群模型推广到随机的生物种群模型上,并取得了丰富的研究成果,如环境噪声无论多么小都可以抑制随机种群模型的爆破,模型解的长期行为持久性、非持久性、遍历性、平稳分布等^[1-12].

文献[1-12]提到的随机生物种群所受的环境噪声都是高斯白噪声干扰的结果.高斯白噪声是用来描述一类比较平稳的、连续的随机干扰.事实上,在生态生物系统中,由于洪水的泛滥、海啸、大规模的传染病、地震、大旱、火山爆发、气候变暖、股市震荡等产生的是突发的、不连续的、随机性很强的干扰.一旦发生,生物生长的环境就会发生很大的改变,甚至可以导致种群灭绝.此时,若仅仅用单一的高斯白噪声来描述这种突发现象,很难真实地反映种群的变化情况.在生物动力种群中,为了更好地描述现实世界中的随机现象,可以建立带 Levy 跳的数学模型来描述这种突变现象.

因此,研究带 Levy 跳的随机生物系统是非常必要的.近几年,已有学者开始关注这种新的激励对随机生物系统的影响^[13-17].受以上文献的启发,本文将文献[18]中的模型推广到带 Levy 跳的随机 Holling-Tanner 捕食与被捕食模型中.

1 模型的建立

在文献[18]中,Khellaf 等主要讨论模型

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t) \left(1 - x(t) - \frac{ay(t)}{\alpha x(t) + \beta y(t) + \gamma} \right) \\ \frac{dy(t)}{dt} = by(t) \left(1 - \frac{y(t)}{k + x(t)} \right) \end{cases} \quad (1)$$

初值为 $x(0) = x_0 > 0, y(0) = y_0 > 0$. 其中, $x(t), y(t)$ 分别表示被捕食者和捕食者在 t 时刻的密度,参数 $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ 均为正常数. Khellaf 等指出模型(1)存在 3 个平凡的平衡点

$$E_0 = (0, 0), E_{10} = (0, k), E_{20} = (1, 0)$$

同时,当 $ak < k\beta + \gamma$ 时,存在唯一的内部平衡点 $E^* = (x^*, y^*)$, 其中, x^* 是下面方程的正根

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)x^2 + (\beta k + \gamma + a - \alpha - \beta)x + \\ (ak - \beta k - \gamma) = 0 \end{aligned}$$

且 $y^* = x^* + k$.

Mandal 等^[12]对模型(1)进行了白噪声干扰,得到与模型(1)相对应的随机模型

$$\begin{cases} dx(t) = x(t) \left(1 - x(t) - \frac{ay(t)}{\alpha x(t) + \beta y(t) + \gamma} \right) dt + \sigma_1 x(t) dB_1(t) \\ dy(t) = by(t) \left(1 - \frac{y(t)}{k + x(t)} \right) dt + \sigma_2 y(t) dB_2(t) \end{cases} \quad (2)$$

式中: σ_1, σ_2 表示噪声强度; $B_1(t), B_2(t)$ 是定义在完备的概率空间 $(\Omega, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上具相互独立的标准布朗运动; $\{F_t\}_{t \geq 0}$ 是 Ω 上的一个 σ 代数且满足通常条件(即右连续, F_0 包含所有零测集).

文献[2]证明了模型(2)的全局正解存在唯一性、种群的持续存在性、模型存在平稳分布的条件等性质.

在模型(2)的基础上,进一步考虑带有 Levy 噪声的随机模型,具体模型为

$$\begin{cases} dx(t) = x(t^-) \left[\left(1 - x(t^-) - \frac{ay(t)}{\alpha x(t) + \beta y(t) + \gamma} \right) \cdot \right. \\ \quad \left. dt + \sigma_1 dB_1(t) + \int_Y \gamma_1(u) \tilde{N}(dt, du) \right] \\ dy(t) = by(t^-) \left[\left(1 - \frac{y(t)}{k + x(t)} \right) dt + \right. \\ \quad \left. \sigma_2 dB_2(t) + \int_Y \gamma_2(u) \tilde{N}(dt, du) \right] \end{cases} \quad (3)$$

式中: $x(t^-), y(t^-)$ 分别是 $x(t), y(t)$ 的左极限; $\tilde{N}(dt, dz) = N(dt, du) - \lambda(du)dt$ 是补偿性的泊松随机测度; N 是在 $(0, +\infty)$ 中的可测子集 Y 上具有特征测度 λ 的泊松计数测度, 即 $\lambda(Y) < \infty$; $\gamma_i(\cdot): Y \times \Omega \rightarrow R$ 是关于特征测度 λ 有界连续的, 且 F_t 是可测的; $B_1(t), B_2(t)$ 和 N 是相互独立的.

结合实际生物意义,本文作如下假设:

$1 + \gamma_i(u) > 0 (i = 1, 2), u \in Y$, 对每一个 $m > 0$ 都有 $L_m > 0$ 且满足条件 A1 和条件 A2.

$$A1 \quad \int_Y |H_i(x, u) - H_i(y, u)|^2 \lambda(du) \leq L_m |x - y|^2, i = 1, 2;$$

$$A2 \quad |\ln(1 + \gamma_i(u))| \leq K_i (K_i > 0), i = 1, 2.$$

其中, $H_1(x, u) = \gamma_1(u)x(t^-), H_2(y, u) = \gamma_2(u)y(t^-)$.

于是

$$\int_Y [\ln(1 + \gamma_i(u))]^2 \lambda(du) < c, i = 1, 2 \quad (4)$$

记 $R_+^2 = \{(x, y) \in R^2 | x \geq 0, y \geq 0\}, R_+ = \{x \in$

$R \mid x \geq 0\}$.

2 模型(3)全局正解的存在唯一性

由于 $x(t)$, $y(t)$ 分别表示被捕食者和捕食者在 t 时刻的密度或种群的大小, 根据生物实际意义, 本文感兴趣的是正解. 目前还没看到对于种群随机模型(3)的研究结果, 本文主要研究随机模型(3)的种群动力学性质, 如解的全局正解的存在唯一性、有界性、随机持久及随机灭绝等.

首先, 利用变量变换和随机微分方程比较定理、伊藤公式等证明随机模型(3)的全局正解的存在唯一性.

定理 1 假设条件 A1 和 A2 成立. 对任意初值 $x_0 > 0, y_0 > 0$, 模型(3)存在唯一的局部正解 $(x(t), y(t)) \in R_+^2, t \in [0, \tau_e)$.

证明 考虑方程

$$\begin{cases} du(t) = \left(1 - \beta_1 - e^{u(t)} - \frac{ae^{v(t)}}{\alpha e^{u(t)} + \beta e^{v(t)} + \gamma}\right) \cdot \\ \quad dt + \sigma_1 dB_1(t) + \int_Y \ln(1 + \gamma_1(u)) \tilde{N}(dt, du) \\ dv(t) = \left(b - \beta_2 - \frac{be^{v(t)}}{k + e^{u(t)}}\right) dt + \sigma_2 dB_2(t) + \\ \quad \int_Y \ln(1 + \gamma_2(u)) \tilde{N}(dt, du) \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$\beta_i = \frac{\sigma_i^2}{2} + \int_Y [\gamma_i(u) - \ln(1 + \gamma_i(u))] \cdot \lambda(du), \quad i = 1, 2$$

初值为 $(u(0), v(0)) = (\ln x_0, \ln y_0) \in R_+^2$. 模型(5)的系数是局部 Lipschitz 连续的, 则存在唯一的局部正解 $(u(t), v(t)) (t \in [0, \tau_e))$, 其中, τ_e 是爆破时间^[1]. 利用推广的伊藤公式, 可得 $(x(t) = e^{u(t)}, y(t) = e^{v(t)})$ 是模型(3)具有初值 $x_0 > 0, y_0 > 0$ 的唯一局部正解.

定理 1 证明了模型(3)存在唯一的局部正解. 采用类似于文献[7]的方法, 进一步证明此解是全局的, 即证明 $\tau_e = \infty, a. s.$

由于模型(3)的解为正, 可得

$$dx(t) \leq x(t^-) \left[(1 - x(t)) dt + \sigma_1 dB_1(t) + \int_Y \gamma_1(u) \tilde{N}(dt, du) \right]$$

令

$$\Phi(t) = \frac{e^{(1-\beta_1)t + \sigma_1 B_1(t) + k_1(t)}}{x_0^{-1} + \int_0^t e^{(1-\beta_1)s + \sigma_1 B_1(s) + k_1(s)} ds} \quad (6)$$

则 $\Phi(t)$ 是

$$d\Phi(t) = \Phi(t^-) \left[(1 - \Phi(t)) dt + \sigma_1 dB_1(t) + \int_Y \gamma_1(u) \tilde{N}(dt, du) \right], \quad \Phi(0) = x_0 \quad (7)$$

的唯一解. 其中, $k_1(t) = \int_0^t \int_Y \ln(1 + \gamma_1(u)) \tilde{N}(dt, du)$.

由随机微分方程比较定理^[19]得

$$x(t) \leq \Phi(t), \quad t \in [0, \tau_e), \quad a. s.$$

由模型(3)的第二式可得

$$\begin{aligned} dy(t) &= y(t^-) \left[\left(b - \frac{by(t)}{k + x(t)} \right) dt + \sigma_2 dB_2(t) + \int_Y \gamma_2(u) \tilde{N}(dt, du) \right] = \\ &= y(t^-) \left[\left(b - \frac{by(t)}{k} + \frac{bx(t)y(t)}{k(k + x(t))} \right) dt + \sigma_2 dB_2(t) + \int_Y \gamma_2(u) \tilde{N}(dt, du) \right] \geq \\ &= y(t^-) \left[\left(b - \frac{by(t)}{k} \right) dt + \sigma_2 dB_2(t) + \int_Y \gamma_2(u) \tilde{N}(dt, du) \right] \end{aligned}$$

显然

$$\psi(t) = \frac{e^{(b-\beta_2)t + \sigma_2 B_2(t) + k_2(t)}}{y_0^{-1} + \int_0^t e^{(b-\beta_2)s + \sigma_2 B_2(s) + k_2(s)} ds} \quad (8)$$

是方程

$$d\psi(t) = \psi(t^-) \left[\left(b - \frac{b\psi(t)}{k} \right) dt + \sigma_2 dB_2(t) + \int_Y \gamma_2(u) \tilde{N}(dt, du) \right], \quad \psi(0) = y_0 \quad (9)$$

的唯一解, 且 $y(t) \geq \psi(t), t \in [0, \tau_e), a. s.$

又

$$dy(t) \leq y(t^-) \left[\left(b - \frac{by(t)}{k + \Phi(t)} \right) dt + \sigma_2 dB_2(t) + \int_Y \gamma_2(u) \tilde{N}(dt, du) \right]$$

则可得

$$\Psi(t) = \frac{e^{(b-\beta_2)t + \sigma_2 B_2(t) + k_2(t)}}{y_0^{-1} + \int_0^t \frac{b}{k + \Phi(s)} e^{(b-\beta_2)s + \sigma_2 B_2(s) + k_2(s)} ds} \quad (10)$$

是方程

$$d\Psi(t) = \Psi(t^-) \left[\left(b - \frac{b\Psi(t)}{k + \Phi(t)} \right) dt + \sigma_2 dB_2(t) + \int_Y \gamma_2(u) \tilde{N}(dt, du) \right], \quad \Psi(0) = y_0 \quad (11)$$

的解. 其中

$$k_2(t) = \int_0^t \int_Y \ln(1 + \gamma_2(u) \tilde{N}(dt, du))$$

由随机微分方程比较定理^[19]得

$$y(t) \leq \Psi(t), t \in [0, \tau_e), \text{ a. s.}$$

另外

$$\begin{aligned} dx(t) &\geq x(t^-) \left[\left(1 - x(t) - \frac{ay(t)}{\gamma} \right) dt + \right. \\ &\quad \left. \sigma_1 dB_1(t) + \int_Y \gamma_1(u) \tilde{N}(dt, du) \right] \geq \\ &\quad x(t^-) \left[\left(1 - x(t) - \frac{a\Psi(t)}{\gamma} \right) dt + \right. \\ &\quad \left. \sigma_1 dB_1(t) + \int_Y \gamma_1(u) \tilde{N}(dt, du) \right] \end{aligned}$$

显然

$$\varphi(t) = \frac{e^{(1-\beta_1)t + \sigma_1 B_1(t) + k_1(t) - \frac{a}{\gamma} \int_0^t \Psi(s) ds}}{x_0^{-1} + \int_0^t e^{(1-\beta_1)s + \sigma_1 B_1(s) + k_1(s) - \frac{a}{\gamma} \int_0^s \Psi(u) du} ds} \quad (12)$$

是方程

$$\begin{aligned} d\varphi(t) &= \varphi(t^-) \left[\left(1 - \varphi(t) - \frac{a\Psi(t)}{\gamma} \right) dt + \right. \\ &\quad \left. \sigma_1 dB_1(t) + \int_Y \gamma_1(u) \tilde{N}(dt, du) \right], \varphi(0) = x_0 \quad (13) \end{aligned}$$

的解, 且满足

$$x(t) \geq \varphi(t), t \in [0, \tau_e), \text{ a. s.}$$

综合以上结论, 可得

$$\varphi(t) \leq x(t) \leq \Phi(t), \psi(t) \leq y(t) \leq \Psi(t), \\ t \in [0, \tau_e), \text{ a. s.}$$

由于 $\varphi(t), \Phi(t), \psi(t)$ 和 $\Psi(t) (t \geq 0)$ 都是全局存在的, 故可得定理 2.

定理 2 任意给定初值 $x_0 > 0, y_0 > 0$, 模型(3)几乎必然存在唯一正解 $(x(t), y(t)) \in R_+^2 (t \geq 0)$, 且存在式(6), (8), (10), (12)所定义的函数 $\Phi(t), \psi(t), \Psi(t), \varphi(t)$ 满足

$$\varphi(t) \leq x(t) \leq \Phi(t), \psi(t) \leq y(t) \leq \Psi(t), \\ t \geq 0, \text{ a. s.} \quad (14)$$

3 模型(3)解的长期行为

现讨论随机模型(3)的持久性. 陈兰荪等^[20]给出了确定性系统的时间均值意义下的持续存在的定义. Mandal 等^[12]类似地给出了随机意义下的种群持续的定义.

定义 1^[12, 21] 称种群 $x(t)$ 在时间均值意义下

是持久的, 若

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds > 0, \text{ a. s.}$$

为了方便问题的证明, 首先引入几个引理.

引理 1^[16] 设 $x(t) \in C(\Omega \times [0, +\infty), R_+)$.

a. 若存在正常数 T, ρ, ρ_0 , 使得

$$\ln x(t) \leq \rho t - \rho_0 \int_0^t x(s) ds + F(t), \text{ a. s.}$$

对所有的 $t \geq T$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{t} = 0, \text{ a. s.}$, 则

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \leq \frac{\rho}{\rho_0}, \text{ a. s.}$$

b. 若存在正常数 $T, \rho, \rho_0, \sigma_i (i=1, 2)$, 使得

$$\ln x(t) \geq \rho t - \rho_0 \int_0^t x(s) ds + F(t), \text{ a. s.}$$

对所有的 $t \geq T$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{t} = 0, \text{ a. s.}$, 则

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \geq \frac{\rho}{\rho_0}, \text{ a. s.}$$

引理 2^[14] 设 $M(t) (t \geq 0)$ 是局部鞅, 定义

$$\rho_M(t) = \int_0^t \frac{d\langle M \rangle(s)}{(1+s)^2}, t \geq 0$$

其中, $\langle M \rangle(t) = \langle M, M \rangle(t)$. 若 $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_M(t) < +\infty$,

$$\text{则 } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = 0, \text{ a. s.}$$

引理 3 若 $1 > \beta_1, b > \beta_2$ 成立, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln y(t)}{t} = 0, \text{ a. s.}$$

证明 设存在足够大的 T , 使得对所有的 $t \geq T$ 时, 有 $\frac{1}{2} e^{(1-\beta_1)t} \geq 1$ 成立. 于是, 当 $t \geq T$ 时, 由式(6)得

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{e^{(1-\beta_1)t + \sigma_1 B_1(t) + k_1(t)}}{x_0^{-1} + \int_0^t e^{(1-\beta_1)s + \sigma_1 B_1(s) + k_1(s)} ds} \leq \\ &\leq \frac{e^{(1-\beta_1)t + \sigma_1 B_1(t) + k_1(t)}}{\int_0^t e^{(1-\beta_1)s + \sigma_1 B_1(s) + k_1(s)} ds} \leq \\ &\leq \frac{e^{(1-\beta_1)t + \sigma_1 B_1(t) + k_1(t)}}{e^{[\sigma_1 \min_{0 \leq s \leq t} B_1(s) + \min_{0 \leq s \leq t} k_1(s)]} \int_0^t e^{(1-\beta_1)s} ds} = (1 - \beta_1) \cdot \\ &\frac{e^{(1-\beta_1)t + \sigma_1 B_1(t) + k_1(t)}}{e^{[\sigma_1 \min_{0 \leq s \leq t} B_1(s) + \min_{0 \leq s \leq t} k_1(s)]} (e^{(1-\beta_1)t} - 1)} \leq 2(1 - \beta_1) \cdot \\ &\frac{e^{(1-\beta_1)t + \sigma_1 B_1(t) + k_1(t)}}{e^{[\sigma_1 \min_{0 \leq s \leq t} B_1(s) + \min_{0 \leq s \leq t} k_1(s)]} e^{(1-\beta_1)t}} = 2(1 - \beta_1) \cdot \\ &e^{\{\sigma_1 [B_1(t) - \min_{0 \leq s \leq t} B_1(s)] + k_1(t) - \min_{0 \leq s \leq t} k_1(s)\}} \leq 2(1 - \beta_1) \cdot \\ &e^{\{\sigma_1 [B_1(t) - \min_{0 \leq s \leq t} B_1(s)] + k_1(t) - \min_{0 \leq s \leq t} k_1(s)\}} \quad (15) \end{aligned}$$

由式(15)可以得到如下不等式成立:

$$\begin{aligned}
& \int_T^t \frac{b}{k + \Phi(s)} e^{(b-\beta_2)s + \sigma_2 B_2(s) + k_2(s)} ds \geq \int_T^t \frac{be^{(b-\beta_2)s + \sigma_2 B_2(s) + k_2(s)}}{k + 2(1-\beta_1)e^{\{\lceil \sigma_1 \lceil B_1(s) - \min_{0 \leq u \leq s} B_1(u) \rceil + k_1(s) - \min_{0 \leq u \leq s} k_1(u) \rceil\}}} ds \geq \\
& \int_T^t \frac{be^{(b-\beta_2)s + \sigma_2 B_2(s) + k_2(s)}}{[k + 2(1-\beta_1)]e^{\{\lceil \sigma_1 \lceil B_1(s) - \min_{0 \leq u \leq s} B_1(u) \rceil + k_1(s) - \min_{0 \leq u \leq s} k_1(u) \rceil\}}} ds \geq \frac{b}{k + 2(1-\beta_1)} \cdot \\
& \int_T^t e^{\{\lceil \sigma_1 \lceil \min_{0 \leq u \leq s} B_1(u) - \max_{0 \leq u \leq s} B_1(u) \rceil + \min_{0 \leq u \leq s} k_1(u) - \max_{0 \leq u \leq s} k_1(u) \rceil\}} e^{(b-\beta_2)s + \sigma_2 B_2(s) + k_2(s)} ds \geq \frac{b}{k + 2(1-\beta_1)} \cdot \\
& e^{\{\lceil \sigma_1 \lceil \min_{0 \leq u \leq s} B_1(u) - \max_{0 \leq u \leq s} B_1(u) \rceil + \min_{0 \leq u \leq s} k_1(u) - \max_{0 \leq u \leq s} k_1(u) \rceil\}} e^{\min_{0 \leq u \leq s} \sigma_2 B_2(u) + \min_{0 \leq u \leq s} k_2(u)} \int_T^t e^{(b-\beta_2)s} ds = \\
& \frac{b}{[k + 2(1-\beta_1)](b-\beta_2)} e^{\{\lceil \sigma_1 \lceil \min_{0 \leq u \leq s} B_1(u) - \max_{0 \leq u \leq s} B_1(u) \rceil + \min_{0 \leq u \leq s} k_1(u) - \max_{0 \leq u \leq s} k_1(u) \rceil\}} \cdot \\
& e^{\min_{0 \leq u \leq s} \sigma_2 B_2(u) + \min_{0 \leq u \leq s} k_2(u)} (e^{(b-\beta_2)t} - e^{(b-\beta_2)T}) \quad (16)
\end{aligned}$$

将式(16)与式(10)结合,可推出

$$\frac{1}{\Psi(t)} \geq e^{\{-(b-\beta_2)(t-T) - \sigma_2(B_2(t) - B_2(T)) - (k_2(t) - k_2(T))\}}.$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{y(T)} + \frac{b(e^{(b-\beta_2)t} - e^{(b-\beta_2)T})}{[k + 2(1-\beta_1)](b-\beta_2)} \cdot \right. \\
& e^{\{\lceil \sigma_1 \lceil \min_{0 \leq u \leq s} B_1(u) - \max_{0 \leq u \leq s} B_1(u) \rceil + \min_{0 \leq u \leq s} k_1(u) - \max_{0 \leq u \leq s} k_1(u) \rceil\}} \cdot \\
& \left. e^{\min_{0 \leq u \leq s} \sigma_2 B_2(u) + \min_{0 \leq u \leq s} k_2(u)} \right] \geq K(t)G(t)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
K(t) &= \frac{be^{\{(b-\beta_2)T + \sigma_2 B_2(T) + k_2(T)\}} (1 - e^{\{-(b-\beta_2)(t-T)\}})}{[k + 2(1-\beta_1)](b-\beta_2)} \\
G(t) &= e^{\{\lceil \sigma_1 \lceil \min_{0 \leq u \leq s} B_1(u) - \max_{0 \leq u \leq s} B_1(u) \rceil + \min_{0 \leq u \leq s} k_1(u) - \max_{0 \leq u \leq s} k_1(u) \rceil\}} \cdot \\
& e^{\min_{0 \leq u \leq s} \sigma_2 B_2(u) + \min_{0 \leq u \leq s} k_2(u)} e^{-\sigma_2 \max_{0 \leq u \leq s} B_2(u) - \max_{0 \leq u \leq s} k_2(u)}
\end{aligned}$$

因此,可得

$$\frac{\ln \Psi(t)}{t} \leq -\frac{\ln K(t)}{t} - \frac{\ln G(t)}{t} \quad (17)$$

根据式(4)可知

$$\langle k_i(t), k_i(t) \rangle = t \int_Y [\ln(1 + \gamma_i(u))]^2 \cdot$$

$$\lambda(du) < ct, i = 1, 2$$

由引理2得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{k_i(t)}{t} = 0, i = 1, 2, \text{ a.s.} \quad (18)$$

又

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_i(t)}{t} = 0, i = 1, 2, \text{ a.s.}$$

结合以上结论可推出

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln K(t)}{t} = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln G(t)}{t} = 0, \text{ a.s.} \quad (19)$$

将式(19)带入到式(17),得

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln y(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \Psi(t)}{t} \leq 0, \text{ a.s.} \quad (20)$$

现证明 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln y(t)}{t} \geq 0$, a.s. 对式(9)应用

伊藤公式

$$d \ln \phi(t) = \left[(b - \beta_2 - \frac{b}{k} \phi(t)) \right] dt +$$

$$\sigma_2 dB_2(t) + \int_Y \ln(1 + \gamma_2(u)) \tilde{N}(dt, du) \Big]$$

上式两端同时从 $0 \sim t$ 积分,并且两端同除以 t ,得

$$t^{-1} \ln \phi(t) = t^{-1} \ln \phi(0) + (b - \beta_2) - t^{-1} \frac{b}{k} \cdot$$

$$\int_0^t \phi(s) ds + t^{-1} \sigma_2 B_2(t) + t^{-1} k_2(t) \quad (21)$$

由式(18)可知,对于任意 $\epsilon > 0$,都存在 T ,使得

$$-\epsilon/2 \leq t^{-1} \ln \phi(0) \leq \epsilon/2,$$

$$-\epsilon/2 \leq t^{-1} k_2(t) \leq \epsilon/2, t \geq T \quad (22)$$

成立.

将式(22)代入式(21),可得

$$t^{-1} \ln \phi(t) \leq b - \beta_2 + \epsilon -$$

$$t^{-1} \frac{b}{k} \int_0^t \phi(s) ds + t^{-1} \sigma_2 B_2(t), t \geq T \quad (23)$$

$$t^{-1} \ln \phi(t) \geq b - \beta_2 - \epsilon -$$

$$t^{-1} \frac{b}{k} \int_0^t \phi(s) ds + t^{-1} \sigma_2 B_2(t), t \geq T \quad (24)$$

令 ϵ 充分小,使得 $b - \beta_2 - \epsilon > 0$,由引理1得到

$$\frac{k(b - \beta_2 - \epsilon)}{b} \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \phi(s) \leq$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \phi(s) \leq \frac{k(b - \beta_2 + \epsilon)}{b}, \text{ a.s.}$$

由于 ϵ 的任意性,可得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \phi(s) = \frac{k(b - \beta_2)}{b}, \text{ a.s.} \quad (25)$$

注意到 $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \phi(0) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} B_2(t) =$

$0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} k_2(t) = 0$.再结合式(21),可得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \phi(t) = 0, \text{ a.s.}$$

由定理1的证明过程可知

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln y(t) \geq \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \phi(t) = 0, \text{ a.s.}$$

联立式(20),得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln y(t)}{t} = 0, \text{ a.s.} \quad (26)$$

引理 4 若 $1 > \beta_1 + \frac{a}{\beta}$ 成立, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t)}{t} = 0, \text{ a. s.}$$

证明 注意到

$$\begin{aligned} dx(t) &\leq x(t^-) \left[(1 - x(t))dt + \right. \\ &\quad \left. \sigma_1 dB_1(t) + \int_Y \gamma_1(u) \tilde{N}(dt, du) \right] \\ dx(t) &\geq x(t^-) \left[\left(1 - x(t) - \frac{a}{\beta} \right) dt + \right. \\ &\quad \left. \sigma_1 dB_1(t) + \int_Y \gamma_1(u) \tilde{N}(dt, du) \right] \end{aligned}$$

利用伊藤公式, 得

$$\begin{aligned} \ln x(t) &\leq \ln x_0 + (1 - \beta_1)t - \\ &\quad \int_0^t x(s)ds + \sigma_1 B_1(t) + k_1(t) \\ \ln x(t) &\geq \ln x_0 + \left(1 - \beta_1 - \frac{a}{\beta} \right)t - \\ &\quad \int_0^t x(s)ds + \sigma_1 B_1(t) + k_1(t) \end{aligned}$$

进一步可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \ln x(t) &\leq \frac{1}{t} \ln x_0 + (1 - \beta_1) - \\ &\quad \frac{1}{t} \int_0^t x(s)ds + \sigma_1 \frac{B_1(t)}{t} + \frac{k_1(t)}{t} \\ \frac{1}{t} \ln x(t) &\geq \frac{1}{t} \ln x_0 + \left(1 - \beta_1 - \frac{a}{\beta} \right) - \\ &\quad \frac{1}{t} \int_0^t x(s)ds + \sigma_1 \frac{B_1(t)}{t} + \frac{k_1(t)}{t} \end{aligned}$$

结合引理 1、式(8)以及文献[7]中的结论, 可得如下结论: 当 $1 > \beta_1$ 成立时, 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t)}{t} \leq 0$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s)ds \leq 1 - \beta_1, \text{ a. s.}$$

若满足 $1 > \beta_1 + \frac{a}{\beta}$, 则 $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t)}{t} \geq 0$,

$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s)ds \geq 1 - \beta_1 - \frac{a}{\beta}$, a. s. 从而得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t)}{t} = 0, \text{ a. s.}$$

定理 3 若 $1 > \beta_1, b > \beta_2$ 成立. 设 $(x(t), y(t))$ 是模型(3)具有初值 $(x_0, y_0) \in R_+^2$ 的正解, 则

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{y(s)}{\gamma + \alpha x(s) + \beta y(s)} ds &= \frac{1 - \beta_1}{a}, \text{ a. s.} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{y(s)}{k + x(s)} ds &= \frac{b - \beta_2}{b}, \text{ a. s.} \quad (27) \end{aligned}$$

证明 令 $V(x(t)) = \ln x(t), x(t) \in (0,$

$+\infty)$. 对模型(3)的 2 个方程两边从 $0 \sim t$ 积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{y(s)}{\gamma + \alpha x(s) + \beta y(s)} ds &= - \frac{\ln x(t) - \ln x_0}{a} - \\ &\quad \int_0^t x(s)ds + \frac{1 - \beta_1}{a}t + \frac{\sigma_1 B_1(t)}{a} + \frac{k_1(t)}{a} \\ \int_0^t \frac{y(s)}{k + x(s)} ds &= - \frac{\ln y(t) - \ln y(0)}{b} + \\ &\quad \frac{b - \beta_2}{b}t + \frac{\sigma_2 B_2(t)}{b} + \frac{k_2(t)}{b} \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{y(s)}{\gamma + \alpha x(s) + \beta y(s)} ds &= - \frac{\ln x(t) - \ln x_0}{ta} - \\ &\quad \frac{1}{t} \int_0^t x(s)ds + \frac{1 - \beta_1}{a} + \frac{\sigma_1 B_1(t)}{ta} + \frac{k_1(t)}{ta} \\ \frac{1}{t} \int_0^t \frac{y(s)}{k + x(s)} ds &= - \frac{\ln y(t) - \ln y(0)}{bt} + \\ &\quad \frac{b - \beta_2}{b} + \frac{\sigma_2 B_2(t)}{bt} + \frac{k_2(t)}{bt} \end{aligned}$$

由引理 3 和引理 4 与 $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} B_i(t) = 0$,

$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} k_i(t) = 0, i = 1, 2$, 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{y(s)}{\gamma + \alpha x(s) + \beta y(s)} ds = \frac{1 - \beta_1}{a}, \text{ a. s.}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{y(s)}{k + x(s)} ds = \frac{b - \beta_2}{b}$$

定理 3 的结论说明, 模型(3)的 Leslie-Gower 项在时间均值意义下是稳定的.

定理 4 假设 $\beta > a$. 如果 $1 > \beta_1 + \frac{a}{\beta}$ 成立, 设

$(x(t), y(t))$ 是模型(3)具有初值 $(x_0, y_0) \in R_+^2$ 的正解, 则

$$\begin{aligned} 1 - \beta_1 - \frac{a}{\beta} &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s)ds \leq \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s)ds &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s)ds \leq \\ 1 - \beta_1, \text{ a. s.} \end{aligned}$$

证明 定义 $V(x(t)) = \ln x(t)$, 应用伊藤公式, 得

$$\begin{aligned} \ln x(t) &= \ln x_0 + (1 - \beta_1)t - \int_0^t x(s)ds - \\ &\quad \int_0^t \frac{ay(s)}{\alpha x(s) + \beta y(s) + \gamma} ds + \sigma_1 B_1(t) + k_1(t) \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \ln x(t) &= \frac{1}{t} \ln x_0 + (1 - \beta_1) - \frac{1}{t} \int_0^t x(s)ds - \\ &\quad \frac{1}{t} \int_0^t \frac{ay(s)}{\alpha x(s) + \beta y(s) + \gamma} ds + \sigma_1 \frac{B_1(t)}{t} + \frac{k_1(t)}{t} \end{aligned}$$

进一步可得

$$\frac{1}{t} \ln x(t) \leq \frac{1}{t} \ln x_0 + (1 - \beta_1) -$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds + \sigma_1 \frac{B_1(t)}{t} + \frac{k_1(t)}{t}$$

$$\frac{1}{t} \ln x(t) \geq \frac{1}{t} \ln x_0 + \left(1 - \beta_1 - \frac{a}{\beta}\right) -$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds + \sigma_1 \frac{B_1(t)}{t} + \frac{k_1(t)}{t}$$

当 t 充分大时,由引理 1 以及 $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} k_1(t) = 0$,可得

$$1 - \beta_1 - \frac{a}{\beta} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \leq$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \leq$$

$$1 - \beta_1, \text{ a. s.}$$

定理 5 假设 $\beta > a$. 如果 $1 > \beta_1 + \frac{a}{\beta}, b > \beta_2$ 成立,设 $(x(t), y(t))$ 是模型(3)具有初值 $(x_0, y_0) \in R_+^2$ 的正解,则模型(3)在时间均值意义下具有持久性.

证明 显然,由定理 4 可得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \geq 1 - \beta_1 - \frac{a}{\beta} > 0 \quad (28)$$

现只需证明 $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds > 0$ 即可.

定义 $V(y(t)) = \ln y(t)$,应用伊藤公式,得

$$d \ln y(t) = \left(b - \beta_2 - \frac{by(t)}{k} + \frac{bx(t)y(t)}{k(k+x(t))}\right) dt +$$

$$dt + \sigma_2 dB_2(t) + \int_Y \ln(1 + \gamma_2(u)) \tilde{N}(dt, du) \quad (29)$$

对式(29)两端从 $0 \sim t$ 积分,可得

$$\ln \frac{y(t)}{y(0)} \geq (b - \beta_2)t - \frac{b}{k} \int_0^t y(s) ds + \sigma_2 B_2(t) + k_2(t)$$

令 t 充分大,并结合式(18)和引理 1 的 b,可得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds \geq \frac{k(b - \beta_1)}{b} > 0 \quad (30)$$

由式(28)和式(30)可知结论成立.

由于 $x - 1 - \ln x \geq 0, x > 0$,则可以推出

$$\begin{aligned} \beta_i &= \frac{\sigma_i^2}{2} + \int_Y [\gamma_i(u) - \ln(1 + \gamma_i(u))] \lambda(du) = \\ &\frac{\sigma_i^2}{2} + \int_Y [1 + \gamma_i(u) - 1 - \\ &\ln(1 + \gamma_i(u))] \lambda(du) \geq \frac{\sigma_i^2}{2}, i = 1, 2 \end{aligned}$$

若令 $\gamma_i = 0, i = 1, 2$,则可以得到文献[12]中的定理 5.1 的结论.

现给出与以上结论相反的结果.前面主要讨论

的是种群的持久性,现给出种群灭绝所需要的条件.

定理 6 设 $(x(t), y(t))$ 是模型(3)具有初值 $(x_0, y_0) \in R_+^2$ 的正解,则有下列结论成立:

a. 若 $1 - \frac{a}{\beta} < \beta_1, b < \beta_2$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, \text{ a. s.}$

b. 若 $1 - \frac{a}{\beta} < \beta_1, b > \beta_2$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0,$
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds = \frac{k(b - \beta_1)}{b}, \text{ a. s.}$

c. 若 $1 - \frac{a}{\beta} > \beta_1, b < \beta_2$, 则

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, \text{ a. s.}$$

证明 a. 对所有 $t \geq 0$,利用伊藤公式,得

$$d \ln y(t) = \left(b - \beta_2 - \frac{by(t)}{k + x(t)}\right) dt + \sigma_2 dB_2(t) + \int_Y \ln(1 + \gamma_2(u)) \tilde{N}(dt, du) \quad (31)$$

对式(31)两端同时从 $0 \sim t$ 积分,可得

$$\ln y(t) - \ln y_0 = (b - \beta_2)t - \int_0^t \frac{by(s)}{k + x(s)} ds + \sigma_2 B_2(t) + k_2(t)$$

进一步化简,得

$$\frac{1}{t} \ln \frac{y(t)}{y_0} \leq (b - \beta_2) + \sigma_2 B_2(t) + k_2(t) \quad (32)$$

又当 t 充分大时

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{k_2(t)}{t} = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_2(t)}{t} = 0, \text{ a. s.}$$

故当 $b < \beta_2$ 时,由式(32)得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, \text{ a. s.}$$

利用同样的方法可证得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \text{ a. s.}$$

b. 由 a 的结论易知 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. 因此,当 t 充分大时,可以取任意小的 $\epsilon > 0$,使得

$$\ln y(t) - \ln y_0 \leq (b - \beta_2)t - \frac{b}{k + \epsilon} \int_0^t y(s) ds + \sigma_2 B_2(t) + k_2(t)$$

$$\ln y(t) - \ln y_0 \geq (b - \beta_2)t -$$

$$\frac{b}{k - \epsilon} \int_0^t y(s) ds + \sigma_2 B_2(t) + k_2(t)$$

成立,应用引理 1,可得

$$\frac{(k - \epsilon)(b - \beta_1)}{b} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds \leq$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds \leq \frac{(k + \epsilon)(b - \beta_1)}{b}, \text{ a. s.}$$

由于 ϵ 的任意性,可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds = \frac{k(b - \beta_1)}{b}, \text{ a. s.}$$

c. 由定理 4 和 a 得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \geq 1 - \beta_1 - \frac{a}{\beta} > 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, \text{ a. s.}$$

从以上结论可知,确定性模型和只有 Brown 白噪声干扰的随机模型中种群是持续存在的.但是,在 Levy 噪声干扰下可以导致种群灭绝.

4 数值模拟和例子

利用 Euler 方法^[21]对文中的主要结论进行数值模拟分析.在图 1~4 中,绿线表示确定性模型(1)的解,蓝线表示只有 Brown 白噪声的随机模型(2)的解,红线表示带有 Levy 噪声的随机模型(3)的解.图中参数均取为

$$a = 3, \alpha = 4, \beta = 4, \gamma = 2, b = 0.3, k = 1;$$

$$\sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0.2$$

初值为 $x_0 = 0.4, y_0 = 0.2$.

通过计算可得 $E^* = (x^*, y^*) = (0.5531,$

1.5531). 现通过例子来讨论 Levy 噪声对种群的影响.

例 1 取 $\gamma_1 = 0.4, \gamma_2 = 0.3$, 且由参数取值可得

$$\beta_1 = \frac{\sigma_1^2}{2} + \int_Y [\gamma_1(u) - \ln(1 + \gamma_1(u))] \cdot$$

$$\lambda(du) = 0.0685, \frac{a}{\beta} = 0.75$$

$$\beta_2 = \frac{\sigma_2^2}{2} + \int_Y [\gamma_2(u) - \ln(1 + \gamma_2(u))] \cdot$$

$$\lambda(du) = 0.0576$$

$$1 - \beta_1 - \frac{a}{\beta} = 1 - 0.8185 = 0.1815 > 0$$

$$b - \beta_2 = 0.3 - 0.0576 = 0.2424 > 0$$

显然满足

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \geq 1 - \beta_1 - \frac{a}{\beta} > 0, \text{ a. s.}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds = \frac{k(b - \beta_1)}{b}, \text{ a. s.}$$

如图 1 所示,此时 $x(t), y(t)$ 在时间均值意义下是持续存在的,这与在 Brown 白噪声的影响结果相同,只是由于 Levy 噪声的存在使得模型(3)的解围绕内部平衡点 $E^* = (x^*, y^*)$ 的振幅变大.

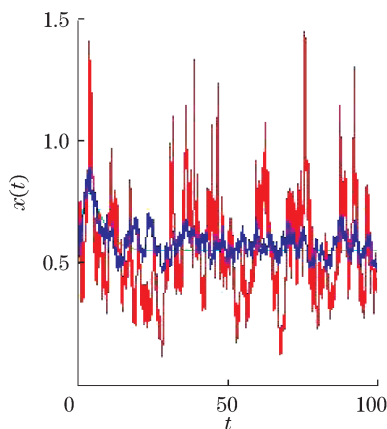


图 1 $a=3, \alpha=4, \beta=4, \gamma=2, b=0.3, k=1; \sigma_1=0.1, \sigma_2=0.2, \gamma_1=0.4, \gamma_2=0.3$

Fig. 1 $a=3, \alpha=4, \beta=4, \gamma=2, b=0.3, k=1; \sigma_1=0.1, \sigma_2=0.2, \gamma_1=0.4, \gamma_2=0.3$

例 2 取 $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 1.0$, 简单计算可得

$$\beta_1 + \frac{a}{\beta} = 1.1665 > 1, \beta_2 = 0.3269$$

$$0.02 + 0.3069 > b = 0.3$$

与例 1 的结论相反,且满足定理 6 的 a 的条件,此时 $x(t), y(t)$ 均趋于灭绝.图 2 验证了此结论.如图 2 所示,尽管在 Brown 白噪声干扰下 $x(t), y(t)$ 是持续存在的,但对于模型(3)来说,解趋于 0.

例 3 取 $\gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 0.3$, 使得满足定理 6 的 b 的条件,图 3 验证了定理 6 的 b 的结论,即当条件

$$1 < \beta_1 + \frac{a}{\beta}, b > \beta_2 \text{ 成立时, 有 } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0,$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds = \frac{k(b - \beta_1)}{b}, \text{ a. s. 成立. 如图 3 所示,直观地显示了 } x(t) \text{ 具有非持久性,而 } y(t) \text{ 在时间均值意义下具有持久性.}$

例 4 取 $\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 1.0$, 使满足定理 6 的 c 的条件,则结论是

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \geq 1 - \beta_1 - \frac{a}{\beta} > 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, \text{ a. s.}$$

也就是说, $x(t)$ 具有持久性, 而 $y(t)$ 具有非持久性, 即 $y(t)$ 最终将灭绝, 如图 4 所示.

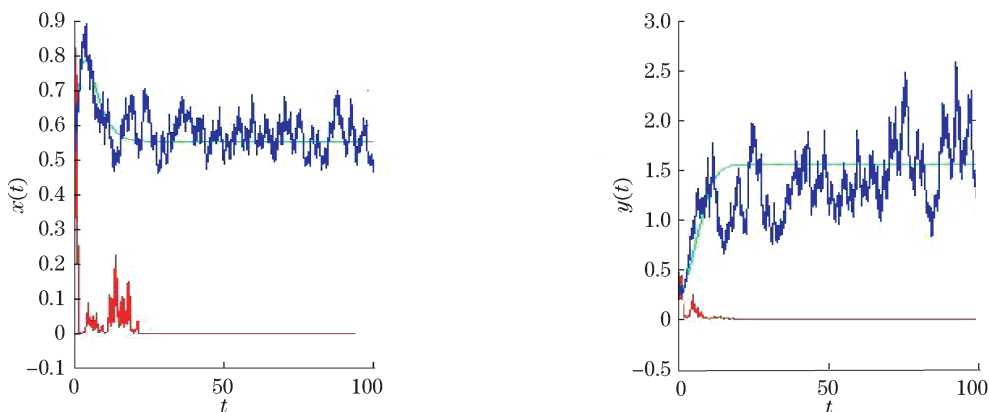


图 2 $a=3, \alpha=4, \beta=4, \gamma=2, b=0.3, k=1; \sigma_1=0.1, \sigma_2=0.2, \gamma_1=1.2, \gamma_2=1.0$.

Fig.2 $a=3, \alpha=4, \beta=4, \gamma=2, b=0.3, k=1; \sigma_1=0.1, \sigma_2=0.2, \gamma_1=1.2, \gamma_2=1.0$.

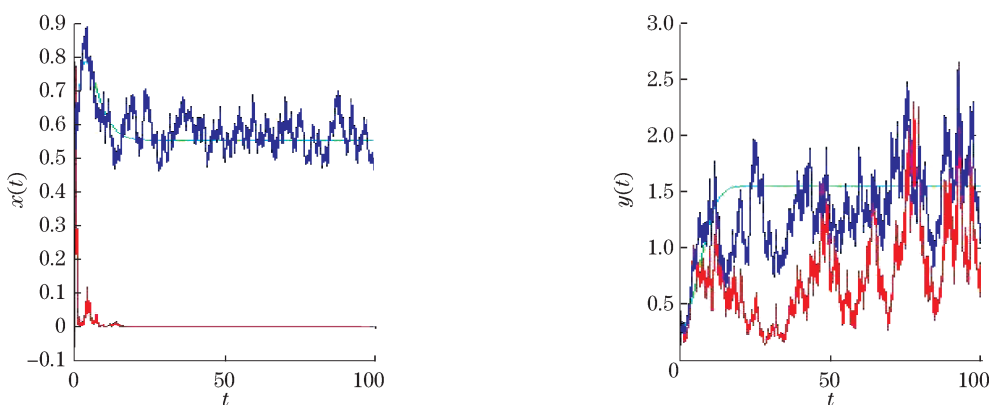


图 3 $a=3, \alpha=4, \beta=4, \gamma=2, b=0.3, k=1; \sigma_1=0.1, \sigma_2=0.2, \gamma_1=1.2, \gamma_2=0.3$

Fig.3 $a=3, \alpha=4, \beta=4, \gamma=2, b=0.3, k=1; \sigma_1=0.1, \sigma_2=0.2, \gamma_1=1.2, \gamma_2=0.3$

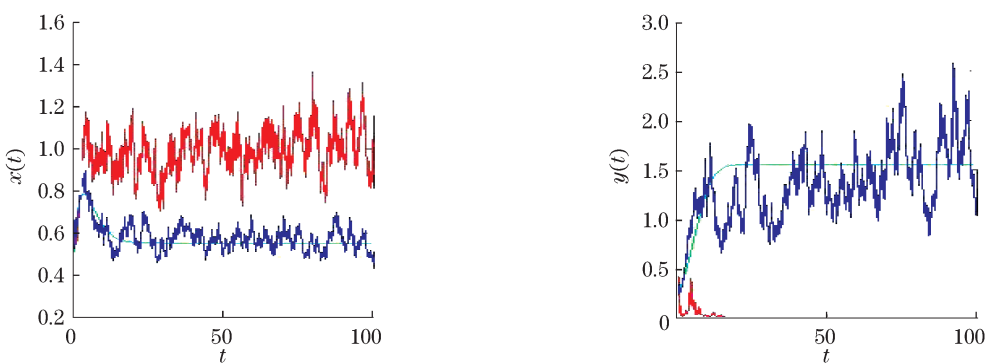


图 4 $a=3, \alpha=4, \beta=4, \gamma=2, b=0.3, k=1; \sigma_1=0.1, \sigma_2=0.2, \gamma_1=0.1, \gamma_2=1.0$.

Fig.4 $a=3, \alpha=4, \beta=4, \gamma=2, b=0.3, k=1; \sigma_1=0.1, \sigma_2=0.2, \gamma_1=0.1, \gamma_2=1.0$.

参考文献:

- [1] MAO X R, MARION G, RENSHAW E. Environmental Brownian noise suppresses explosions in population dynamics[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2002, 97(1): 95 - 110.
- [2] MAO X R, SABANIS S, RENSHAW E. Asymptotic

behaviour of the stochastic Lotka-Volterra model[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 287(1): 141 - 156.

- [3] BAHAR A, MAO X R. Stochastic delay Lotka-Volterra model [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 292(2): 364 - 380.
- [4] MAO X R. Delay population dynamics and environmental

- noise[J]. *Stochastics and Dynamics*, 2005, 5(2): 149 – 162.
- [5] MAO X R, YUAN C G, ZOU J Z. Stochastic differential delay equations of population dynamics[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2005, 304(1): 296 – 320.
- [6] DU N H, SAM V H. Dynamics of a Stochastic Lotka-Volterra model perturbed by white noise[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2006, 324(1): 82 – 97.
- [7] JI C Y, JIANG D Q, SHI N Z. Analysis of a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes with stochastic perturbation[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2009, 359(2): 482 – 498.
- [8] JI C Y, JIANG D Q, LI X Y. Qualitative analysis of a stochastic ratio-dependent predator-prey system[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, 235(5): 1326 – 1341.
- [9] JI C Y, JIANG D Q. Dynamics of a stochastic density dependent predator-prey system with Beddington-DeAngelis functional response[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2011, 381(1): 441 – 453.
- [10] JI C Y, JIANG D Q, SHI N Z. A note on a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes with stochastic perturbation[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2011, 377(1): 435 – 440.
- [11] MAO X R. Stationary distribution of stochastic population systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2011, 60(6): 398 – 405.
- [12] MANDAL P S, BANERJEE M. Stochastic persistence and stationary distribution in a Holling-Tanner type prey-predator model[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2012, 391(4): 1216 – 1233.
- [13] YUAN C G, MAO X R. Stability of stochastic delay hybrid systems with jumps[J]. *European Journal of Control*, 2010, 16(6): 595 – 608.
- [14] BAO J H, MAO X R, YIN G, et al. Competitive Lotka-Volterra population dynamics with jumps[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2011, 74(17): 6601 – 6616.
- [15] BAO J H, YUAN C G. Stochastic population dynamics driven by Lévy noise[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, 391(2): 363 – 375.
- [16] LIU M, WANG K. Dynamics of a Leslie-Gower Holling-type II predator-prey system with Lévy jumps[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2013, 85: 204 – 213.
- [17] LIU M, WANG K. Stochastic Lotka-Volterra systems with Lévy noise[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2014, 410(2): 750 – 763.
- [18] KHELLAF W, HAMRI N. Boundedness and global stability for a predator-prey system with the Beddington-DeAngelis functional response[J]. *Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, 2010, 2010: 1 – 24.
- [19] PENG S G, ZHU X H. Necessary and sufficient condition for comparison theorem of 1-dimensional stochastic differential equations[J]. *Stochastic Processes and their Applications*, 2006, 116(3): 370 – 380.
- [20] 陈兰荪, 陈健. 非线性生物动力系统[M]. 北京: 科学出版社, 1993.
- [21] PROTTER P, TALAY D. The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations[J]. *The Annals of Probability*, 1997, 25(1): 393 – 423.

(编辑: 石 瑛)