

基于圈和三个孤立点的冠图的 Q -谱确定性

康同芳, 吴宝丰

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 设 G 是 n 阶图, H 是 m 阶图, 取 n 个 H 的拷贝, 并将 G 的第 i 个点和第 i 个 H 中的每一点相连 ($i=1, 2, \dots, n$), 所得到的 $(n+mn)$ 阶图称为冠图, 记为 $G \circ H$. 对基于圈和 3 个孤立点的冠图的 Q -谱确定性 (无符号拉普拉斯谱确定性), 即 $C_n \circ 3K_1$ 的 Q -谱确定性进行了研究, 证明了当 $n \neq 32, 64, 128$ 时, $C_n \circ 3K_1$ 由其 Q -谱确定.

关键词: 无符号拉普拉斯谱; Q -谱; 冠图; 单圈图

中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

Q -Spectral Characterization of the Corona of A Cycle and Three Isolated Vertices

KANG Tongfang, WU Baofeng

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Let G be a graph with n vertices, and H be a graph with m vertices. The corona $G \circ H$ is the graph with $n+mn$ vertices obtained from G and n copies of H by joining the i -th vertex of G to each vertex in the i -th copy of H ($i=1, 2, \dots, n$). The Q -spectral characterization of the corona $C_n \circ 3K_1$ was studied, where $C_n \circ 3K_1$ was the corona of a cycle and three isolated vertices. It is proved that $C_n \circ 3K_1$ is determined by its signless Laplacian spectrum when $n \neq 32, 64, 128$.

Keywords: signless Laplacian spectrum; Q -spectrum; corona; unicyclic graph

1 基本概念及背景介绍

现考虑的图均为简单无向图. 设 G 是 n 阶图, 顶点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 边集为 $E(G)$. 矩阵 $Q(G) = D(G) + A(G)$ 称为 G 的 Q -阵 (无符号拉普拉斯矩阵). 其中, $A(G)$ 为邻接矩阵, 若 v_i

和 v_j 之间有边相连, 则 $a_{ij} = 1$; 否则, $a_{ij} = 0$. $D(G) = \text{diag}(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$ 为度对角矩阵, $d(v_i)$ 表示顶点 v_i 的度. 图 G 的 Q -特征多项式记为 $\varphi_Q(G, x) = \det(xI_n - Q(G))$, G 的 Q -特征值即 $\varphi_Q(G, x)$ 的根都是非负实数, 记为 $q_i(G)$ ($i=1, 2, \dots, n$), 它们所构成的多重集合 $\{q_1(G), q_2(G), \dots, q_n(G)\}$ 称为 G 的 Q -谱 (无符号拉普

收稿日期: 2016-04-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11301340, 11201303); 上海市自然科学基金资助项目(12ZR1420300); 沪江基金资助项目(B14005)

第一作者: 康同芳(1990-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 代数图论. E-mail: 1441005190@qq.com

通信作者: 吴宝丰(1978-), 男, 讲师. 研究方向: 代数图论. E-mail: baufern@usst.edu.cn

拉斯谱).不妨设 $q_1(G) \geq q_2(G) \geq \dots \geq q_n(G) \geq 0$, 其中, 当 G 连通时, $q_n(G) = 0$ 当且仅当 G 是二部图.

C_n 和 K_n 分别表示 n 阶圈和 n 阶完全图, 特别地, K_1 为孤立点. 设 G 是 n 阶图, H 是 m 阶图, 取 n 个 H 的拷贝, 并将 G 的第 i 个点和第 i 个 H 中的每一点相连 ($i = 1, 2, \dots, n$), 所得到的 $(n + nm)$ 阶图称为冠图^[1], 记为 $G \circ H$. 例如, 冠图 $C_4 \circ 3K_1$ 如图 1 所示.

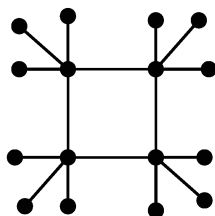


图 1 冠图 $C_4 \circ 3K_1$
Fig.1 Corona $C_4 \circ 3K_1$

对于图 G 和图 H , 如果它们的 Q -谱相同, 则称它们是 Q -同谱的. 如果与 G 是 Q -同谱的图必与 G 同构, 则称图 G 由其 Q -谱确定. 在图谱理论中, “哪些图由它的谱确定?”, 换句话说 “哪些图的结构由其谱确定?”, 这个问题起源于半个世纪前的化学领域^[2], 一直以来, 谱确定问题是一个比较困难的问题. 一个图是否由其谱确定, 没有一个统一的判断方法, 只能通过一些特殊的方法来判断一些特殊的图是否由其谱确定, 相关研究见文献[1-8]. 文献[3-4]分别证明了 $C_n \circ K_1$ 由其 Q -谱确定和由其 L -谱(拉普拉斯谱)确定. 文献[1]证明了 $C_n \circ 2K_1$ 由其 L -谱确定, 并且当 $n \neq 32, 64$ 时, $C_n \circ 2K_1$ 也由其 Q -谱确定, 类似的文献还有文献[5-7].

本文研究冠图 $C_n \circ 3K_1$ 的 Q -谱确定性, 给出了若干引理以及 $C_n \circ 3K_1$ 的 Q -谱及其性质, 给出了 $C_n \circ 3K_1$ 的 Q -同谱图其度序列可能的 3 种情况(定理 1), 并证明了当 $n \neq 32, 64, 128$ 时, $C_n \circ 3K_1$ 由其 Q -谱确定(定理 2).

2 引理与推论

引理 1^[9] 对于任意图 G , 它的 Q -特征值 0 的重数等于其二部连通分支的个数.

引理 2^[10] 设图 G 的顶点集是 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $d(v_i)$ 表示顶点 v_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的度, 则下面的结论成立:

- a. $\min\{d(v_i) + d(v_j) \mid v_i v_j \in E(G)\} \leq$

$$q_1(G) \leq \max\{d(v_i) + d(v_j) \mid v_i v_j \in E(G)\};$$

- b. 设 G 是 $n > 1$ 阶连通图, 最大度为 Δ , 则 $q_1(G) \geq \Delta + 1$.

引理 3^[9] 设图 G 有 n 个顶点、 m 条边、 t 个三角形, 顶点的度为 $d_1, d_2, \dots, d_n$.

$$\text{令 } T_k = \sum_{i=1}^n [q_i(G)]^k, \text{ 则}$$

$$T_0 = n, T_1 = \sum_{i=1}^n d_i = 2m$$

$$T_2 = 2m + \sum_{i=1}^n d_i^2, T_3 = 6t + 3 \sum_{i=1}^n d_i^2 + \sum_{i=1}^n d_i^3$$

引理 4^[10] 设 H 是连通图 G 的一个真子图, 则 $q_1(H) < q_1(G)$.

边数等于顶点数的连通图称为单圈图, 它恰含一个圈, 若这个圈为奇圈, 则称该图为奇单圈图.

引理 5^[3] 设图 G 的无符号拉普拉斯矩阵是 Q , 则 $\det(Q) = 4$ 当且仅当 G 是奇单圈图.

在文献[11]中, Hoffman 等给出了图的内部路的定义. 设 $v_0 v_1 \dots v_k$ ($k \geq 1$) 是图 G 的一条途径, 其中, $v_1, v_2, \dots, v_k$ 互不相同 (v_0, v_k 不必不同), 若 $d(v_0) > 2, d(v_k) > 2, d(v_i) = 2$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$), 则称 $v_0 v_1 \dots v_k$ 为 G 的一条内部路.

引理 6^[10,12] 设 uv 是连通图 G 的一条边, G_{uv} 是通过将 G 的边 uv 剖分得到的图, 则下面结论成立:

- a. 若 $G = C_n$, 则 $q_1(G_{uv}) = q_1(G) = 4$;
b. 若 $G \neq C_n$, uv 不在 G 的一条内部路上, 则 $q_1(G_{uv}) > q_1(G)$;
c. 若 uv 在 G 的一条内部路上, 则 $q_1(G_{uv}) < q_1(G)$.

设图 G 有 n 个顶点、 m 条边, $\varphi_Q(G, x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n$ 是 G 的 Q -特征多项式. 每一分支是树或者是奇单圈图的生成子图, 称为 G 的 TU -子图^[9]. 若 G 的 TU -子图 H 是由 c 个奇单圈图和树 $T_1, T_2, \dots, T_s$ 组成的, 则 H 的

$$\text{权定义为 } W(H) = 4^c \prod_{i=1}^s (1 + |E(T_i)|) =$$

$$4^c \prod_{i=1}^s n_i, \text{ 其中, } n_i \text{ 为树 } T_i \text{ 的阶数. 特别地, 若 } H \text{ 中没有树分支, 则 } W(H) = 4^c.$$

引理 7^[9] 图 G 的 Q -特征多项式系数满足

$$p_j = (-1)^j \sum_{H_j} W(H_j), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

其中, 求和取遍 G 中所有边数为 j 的 TU -子图 H_j .

引理 8^[13] 设 e 是 n 阶图 G 中的一条边,则

$$q_1(G) \geq q_1(G-e) \geq q_2(G) \geq q_2(G-e) \geq \cdots \geq q_n(G) \geq q_n(G-e) \geq 0$$

引理 9^[6] 设 G 是 n 阶图, H 是 m 阶 r -正则图,则

$$\varphi_Q(G \circ H, x) = \varphi_Q\left(G, \frac{x^2 - (m+2r+1)x + 2mr}{x - 2r - 1}\right) \cdot$$

$$[\varphi_Q(H, x-1)]^n$$

即 $G \circ H$ 的 Q -谱是

$$\{(q_i(H) + 1)^{(n)} (i = 2, \dots, m), ((q_j(G) + m + 2r + 1) \pm \sqrt{(q_j(G) + m - 2r - 1)^2 + 4m}) / 2 (j = 1, 2, \dots, n)\}$$

推论 1 $C_n \circ 3K_1$ 的 Q -谱是

$$\left\{1^{(2n)}, 4 \pm \sqrt{12}, \frac{q_i + 4 \pm \sqrt{(q_i + 2)^2 + 12}}{2} (i = 1, 2, \dots, n-1)\right\}$$

其中, $q_i = 2 + 2\cos \frac{2\pi i}{n} (i = 1, 2, \dots, n-1)$.

证明 $3K_1$ 的 Q -谱是 $\{0^{(3)}\}$, C_n 的 Q -谱是

$$\left\{2 + 2\cos \frac{2\pi i}{n} (i = 1, 2, \dots, n)\right\}, \text{由引理 9 可知结论成立.}$$

推论 2 $q_1(C_n \circ 3K_1) = 4 + \sqrt{12}$, 且为单根.

推论 3 设 n 是偶数, 则

a. $C_n \circ 3K_1$ 所有非零 Q -特征值的乘积为 $4n^2$;

b. $C_n \circ 3K_1$ 的所有重数至少为 2 的 Q -特征值的乘积为 $\frac{n^2}{4}$.

证明 a. n 为偶数时, 0 是 $C_n \circ 3K_1$ 的 Q -特征值, 重数为 1, 从而所有非零 Q -特征值的乘积乘以 $(-1)^{4n-1}$ 等于特征多项式系数 p_{4n-1} . 考虑 $C_n \circ 3K_1$ 的 $(4n-1)$ 条边的 TU -子图, 由引理 7 可得 $p_{4n-1} = (-1)^{4n-1} 4n^2$, 从而结论 a 成立.

b. n 为偶数时, 由推论 1 可知 $C_n \circ 3K_1$ 的 Q -谱为

$$\left\{1^{(2n)}, 4 \pm \sqrt{12}, 4, 0, \left(\frac{q_i + 4 + \sqrt{(q_i + 2)^2 + 12}}{2}\right)^{(2)}, \left(\frac{q_i + 4 - \sqrt{(q_i + 2)^2 + 12}}{2}\right)^{(2)}\right\}$$

其中, $q_i = 2 + 2\cos \frac{2\pi i}{n} (i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1)$. 设 $C_n \circ 3K_1$ 的所有重数至少为 2 的 Q -特征值的乘积

为 α , 则 $4(4 + \sqrt{12})(4 - \sqrt{12})\alpha = 4n^2$, 从而 $\alpha = \frac{n^2}{4}$. 证毕.

3 主要结论

定理 1 设图 G 与 $C_n \circ 3K_1 (n \geq 3)$ 是 Q -同谱的, $\Delta(G)$ 是 G 的最大度, a_i 是 G 中度为 i 的顶点数, $t(G)$ 是 G 中三角形的个数, 则下面结论之一成立:

a. $\Delta(G) = 5, a_0 = 0, a_1 = 3n, a_2 = a_3 = a_4 = 0, a_5 = n, t(G) = t(C_n \circ 3K_1)$;

b. $\Delta(G) = 6, a_0 = 1, a_1 = 3n - 2, a_2 = a_3 = 0, a_4 = 5, a_5 = n - 6, a_6 = 2, t(G) = 0, n$ 为偶数;

c. $\Delta(G) = 6, a_0 = 1, a_1 = 3n - 2, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = n - 3, a_6 = 1, t(G) = 1, n$ 为偶数.

证明 由引理 1 可知 G 与 $C_n \circ 3K_1$ 有相同的二部连通分支数, 即 G 至多有一个二部连通分支, 所以, $a_0 \leq 1$. 若 $a_0 = 1$, 则 G 有孤立点, 此时 $C_n \circ 3K_1$ 为二部图, n 为偶数, 从而 $n \geq 4, t(C_n \circ 3K_1) = 0$.

由推论 2 可知 $q_1(G) = q_1(C_n \circ 3K_1) = 4 + \sqrt{12}$, 由引理 2 可知 $\Delta(G) + 1 \leq q_1(G) \leq 2\Delta(G)$, 从而 $2 + \sqrt{3} \leq \Delta(G) \leq 3 + \sqrt{12}$, 即 $4 \leq \Delta(G) \leq 6$. 以下按 $\Delta(G)$ 的值进行讨论.

情形 1 $\Delta(G) = 4$. 由引理 3 可知

$$\sum_{i=0}^4 a_i = 4n, \sum_{i=1}^4 ia_i = 8n, \sum_{i=1}^4 i^2 a_i = 28n \quad (1)$$

a. 若 $a_0 = 0$, 解方程组(1)得

$$a_1 = 6n - a_4, a_2 = -8n + 3a_4, a_3 = 6n - 3a_4$$

从而 $a_2 + a_3 = -2n < 0$, 与 $a_2 \geq 0, a_3 \geq 0$ 矛盾.

b. 若 $a_0 = 1$, 解方程组(1)得

$$a_1 = 6n - 3 - a_4, a_2 = -8n + 3 + 3a_4, a_3 = 6n - 1 - 3a_4$$

从而 $a_2 + a_3 = -2n + 2 \geq 0$, 得 $n \leq 1$, 矛盾.

情形 2 $\Delta(G) = 5$. 由引理 3 可知

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^5 a_i = 4n, \sum_{i=1}^5 ia_i = 8n, \sum_{i=1}^5 i^2 a_i = 28n \\ \sum_{i=1}^5 i^3 a_i + 6t(G) = 128n + 6t(C_n \circ 3K_1) \end{cases} \quad (2)$$

a. 若 $a_0 = 0$, 解方程组(2)得

$$a_1 = 6n - a_4 - 3a_5$$

$$a_2 = -8n + 3a_4 + 8a_5$$

$$a_3 = 6n - 3a_4 - 6a_5$$

$$t(G) = 4n + t(C_n \circ 3K_1) - a_4 - 4a_5$$

由 $a_3 \geq 0, a_2 + a_3 \geq 0$ 得

$$\begin{cases} 0 \leq a_4 \leq 2n - 2a_5 \\ -2n + 2a_5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a_5 = n$$

此时 $a_1 = 3n - a_4 \geq 0, a_2 = 3a_4 \geq 0, a_3 = -3a_4 \geq 0$, 于是, $a_1 = 3n, a_2 = a_3 = a_4 = 0$, 从而 $t(G) = t(C_n \circ 3K_1)$, 即得定理 1 的结论 a.

b. 若 $a_0 = 1$, 解方程组(2)得

$$a_1 = 6n - 3 - a_4 - 3a_5$$

$$a_2 = -8n + 3 + 3a_4 + 8a_5$$

$$a_3 = 6n - 1 - 3a_4 - 6a_5$$

由 $a_3 \geq 0, a_2 + a_3 \geq 0$ 得

$$\begin{cases} 0 \leq a_4 \leq 2n - \frac{1}{3} - 2a_5 \\ -2n + 2 + 2a_5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow n - 1 \leq a_5 \leq n - \frac{1}{6}$$

即 $a_5 = n - 1$. 此时 $a_2 = 3a_4 - 5 \geq 0, a_3 = -3a_4 + 5 \geq 0$, 从而 $a_4 = \frac{5}{3}$, 矛盾.

情形 3 $\Delta(G) = 6$. 由引理 3 可知

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^6 a_i = 4n, \sum_{i=1}^6 ia_i = 8n, \sum_{i=1}^6 i^2 a_i = 28n \\ \sum_{i=1}^6 i^3 a_i + 6t(G) = 128n + 6t(C_n \circ 3K_1) \end{cases} \quad (3)$$

a. 若 $a_0 = 0$. 当 $n \geq 4$ 时, $t(C_n \circ 3K_1) = 0$, 解方程组(3)得

$$a_1 = 6n - a_4 - 3a_5 - 6a_6$$

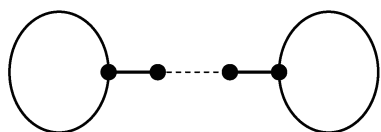
$$a_2 = -8n + 3a_4 + 8a_5 + 15a_6$$

$$a_3 = 6n - 3a_4 - 6a_5 - 10a_6$$

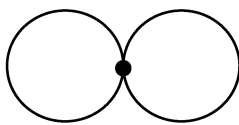
$$t(G) = 4n - a_4 - 4a_5 - 10a_6$$

于是

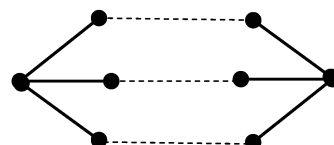
$$\begin{cases} a_2 + a_3 \geq 0 \\ a_2 + 3t(G) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_5 + 5a_6 \geq 2n \\ 4a_5 + 15a_6 \leq 4n \end{cases}$$



(a) “dumbbell” 图



(b) “∞” 图



(c) “θ” 图

图 2 3 类图

Fig. 2 Three families of graphs

引理 10 设 G 是双圈图, 且 $q_1(G) \leq q_1(C_n \circ 3K_1)$, 则存在顶点 $v \in V(G)$, 使得 $2 \leq$

解得 $a_6 = 0$, 与 $\Delta(G) = 6$ 矛盾.

当 $n = 3$ 时, $t(C_n \circ 3K_1) = 1$, 此时 $t(G) = 4n + 1 - a_4 - 4a_5 - 10a_6$, 于是

$$\begin{cases} a_2 + a_3 \geq 0 \\ a_2 + 3t(G) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_5 + 5a_6 \geq 2n = 6 \\ 4a_5 + 15a_6 \leq 4n + 3 = 15 \end{cases}$$

解得 $a_6 \leq \frac{3}{5}$, 即 $a_6 = 0$, 与 $\Delta(G) = 6$ 矛盾.

b. 若 $a_0 = 1$, 此时 n 为偶数, $n \geq 4, t(C_n \circ 3K_1) = 0$, 解方程组(3)得

$$a_1 = 6n - 3 - a_4 - 3a_5 - 6a_6$$

$$a_2 = -8n + 3 + 3a_4 + 8a_5 + 15a_6$$

$$a_3 = 6n - 1 - 3a_4 - 6a_5 - 10a_6$$

$$t(G) = 4n + 1 - a_4 - 4a_5 - 10a_6$$

于是

$$\begin{cases} a_2 + a_3 \geq 0 \\ a_2 + 3t(G) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_5 + 5a_6 \geq 2n - 2 \\ 4a_5 + 15a_6 \leq 4n + 6 \end{cases} \Rightarrow a_6 \leq 2$$

当 $a_6 = 1$ 时, 解得 $n - \frac{7}{2} \leq a_5 \leq n - \frac{9}{4}$, 即 $a_5 = n - 3$, 此时 $a_2 = -6 + 3a_4 \geq 0, a_3 = 7 - 3a_4 \geq 0$, 从而 $a_4 = 2$, 于是, $a_1 = 3n - 2, a_2 = 0, a_3 = 1, t(G) = 1$, 即定理 1 的结论 c.

当 $a_6 = 2$ 时, 同理可得 $a_5 = n - 6, a_4 = 5$, 从而 $a_1 = 3n - 2, a_2 = a_3 = 0, t(G) = 0$, 即得定理 1 的结论 b.

综合以上情形, 定理 1 得证.

边数等于顶点数加 1 的连通图称为双圈图. “dumbbell”图是将 2 个不交的圈用路连接, 且路的 2 个端点分别在 2 个圈上. “∞”图是由 2 个圈组成, 且这 2 个圈有且只有 1 个公共点. “θ”图是将 2 个点用 3 条不相交的路连接得到(见图 2). 每个双圈图必恰含“dumbbell”图、“∞”图、“θ”图之一作为子图, 因此, 双圈图可以分为 3 类: “dumbbell”型、“∞”型和“θ”型.

进一步, 当 G 是“dumbbell”型时, 则至少存在 2 个顶点 $v_1, v_2 \in V(G)$, 使得 $2 \leq d(v_i) \leq$

4($i=1,2$).

证明 用反证法.按以下3种情况分别讨论.

a. G 是“dumbbell”型.假设 G 至多有1个度为2,3或4的点,则其余顶点的度是1或者大于等于5,从而 G 有真子图 $C_g \circ 3K_1$ (g 为某整数),由引理4和推论2可知, $q_1(G) > q_1(C_g \circ 3K_1) = q_1(C_n \circ 3K_1)$,矛盾.

b. G 是“ ∞ ”型.假设 G 没有度为2,3或4的点,则 G 有真子图 $C_g \circ 3K_1$ (g 为某整数),同理产生矛盾.

c. G 是“ θ ”型.假设 G 没有度为2,3或4的点,若连接2点的3条路中最短路的长度小于3,则可以通过剖分内部路将该最短路的长度变为3,此时的图记为 $\tilde{G}$,则 $\tilde{G}$ 有真子图 $C_g \circ 3K_1$ (g 为某整数).

由引理4、引理6和推论2可知, $q_1(G) \geq q_1(\tilde{G}) > q_1(C_g \circ 3K_1) = q_1(C_n \circ 3K_1)$,矛盾.

引理11 设图 G 与 $C_n \circ 3K_1$ 是 Q -同谱的, $n=2^\gamma$, γ 为正整数, g 为奇数,则 $C_g \circ 3K_1$ 不是 G 的1个分支.

证明 假设 $C_g \circ 3K_1$ 是 G 的1个分支,由推论1可知,存在 $q_i = 2 + 2\cos \frac{2\pi i}{n}$ ($1 \leq i \leq n=2^\gamma$),使得

$$q_i + 4 + \sqrt{(q_i + 2)^2 + 12} = 2 + 2\cos \frac{2\pi}{g} + 4 + \sqrt{(2 + 2\cos \frac{2\pi}{g} + 2)^2 + 12} \quad (4)$$

令 $f(x) = x + 4 + \sqrt{(x+2)^2 + 12}$, $x \in [0,4]$,则 $f'(x) = 1 + \frac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2 + 12}}$. 当 $x \in [0,4]$ 时,有 $f'(x) > 0$,即 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上关于 x 严格单调递增.由式(4)得 $\cos \frac{2\pi i}{n} = \cos \frac{2\pi}{g}$,这对于奇数 g 与 $n=2^\gamma$ 是不可能的,因此, $C_g \circ 3K_1$ 不是 G 的1个分支.证毕.

引理12 设图 G 与 $C_n \circ 3K_1$ 是 Q -同谱的,若 G 与 $C_n \circ 3K_1$ 具有相同的度序列,则 $G \cong C_n \circ 3K_1$.

证明 由引理1和引理3可知, G 至多有1个二部连通分支,且 G 的边数和顶点数相等.假设 G 恰有1个分支为树,则 G 必有1个分支是双圈图,记为 G_0 .因为, G 与 $C_n \circ 3K_1$ 具有相同的度序列,从而 G 没有度为2,3或4的点,所以,由引理10可知, $q_1(G) \geq q_1(G_0) > q_1(C_n \circ 3K_1)$,矛盾,因此, G 的所有分支均为单圈图.

由于 G 没有度为2,3或4的点,所以, G 的所

有单圈分支都有形如 $C_g \circ 3K_1$ 的子图.而由推论2可知, $q_1(C_n \circ 3K_1) = 4 + \sqrt{12}$ 是一个单根,且与 n 无关,从而 G 至多有1个单圈分支;否则, G 至少有2个 Q -特征值大于等于 $q_1(C_g \circ 3K_1) = 4 + \sqrt{12}$,矛盾.故 G 是单圈图,且含子图 $C_g \circ 3K_1$ (g 为某整数),根据引理4, $G \cong C_g \circ 3K_1$.考虑到 G 与 $C_n \circ 3K_1$ 具有相同的阶数,所以, $G \cong C_n \circ 3K_1$.证毕.

定理2 设整数 $n \geq 3$ 且 $n \neq 32, 64, 128$, 则 $C_n \circ 3K_1$ 由其 Q -谱确定.

证明 设图 G 与 $C_n \circ 3K_1$ 是 Q -同谱的, a_i 表示 G 中度为 i 的顶点数, $t(G)$ 表示 G 中三角形的个数.由定理1可知, $\Delta(G) = 5$ 或 6 .

假设 $\Delta(G) = 6$, 则 G 必满足以下2种情况之一:

a. $\Delta(G) = 6, a_0 = 1, a_1 = 3n - 2, a_2 = a_3 = 0, a_4 = 5, a_5 = n - 6, a_6 = 2, t(G) = 0, n$ 为偶数;

b. $\Delta(G) = 6, a_0 = 1, a_1 = 3n - 2, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = n - 3, a_6 = 1, t(G) = 1, n$ 为偶数.

于是, n 为偶数,0是 G 的 Q -特征值且为单根,从而 G 是由1个孤立点和一些非二部连通分支组成的.设 $G_1, G_2, \dots, G_c$ 是 G 的非二部连通分支,不失一般性,设 $G_1, G_2, \dots, G_{c-1}$ 是奇单圈图, G_c 是双圈图.设 $H = G - e$, 其中, e 是 G_c 的一条边,且 $G_c - e$ 为奇单圈图.由推论3及其证明可知, G 有 Q -特征值 $\left(\frac{q_i + 4 \pm \sqrt{(q_i + 2)^2 + 12}}{2} \right)^{(2)}$ (其中,

$q_i = 2 + 2\cos \frac{2\pi i}{n}, i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1$), 它们的乘积为 $\frac{n^2}{4}$. 于是由引理8(删边插值)可知, H 必有 Q -特征值

$\frac{q_i + 4 \pm \sqrt{(q_i + 2)^2 + 12}}{2}$, 它们的乘积为 $\sqrt{\frac{n^2}{4}} = \frac{n}{2}$. 设 H 其余的非零 Q -特征值的乘积为 β , 由引理

5得 $\frac{n}{2}\beta = 4^c$. 因为, 图的 Q -特征值都是代数整数

(即整数或无理数), 所以, $\beta = \frac{2 \times 4^c}{n}$ 为整数, 从而存在整数 γ , 使得 $n = 2^\gamma$. 由引理11可知, G_i ($i = 1, 2, \dots, c-1$) 不可能是形如 $C_g \circ 3K_1$ 的奇单圈图, 也不可能形如 $C_g \circ 3K_1$ 的真子图, 从而 G_i ($i = 1, 2, \dots, c-1$) 至少有1个度为2,3或4的点.

以下按 G 满足的2种情况分别讨论.

情形1 $a_0 = 1, a_1 = 3n - 2, a_2 = a_3 = 0, a_4 = 5, a_5 = n - 6, a_6 = 2, t(G) = 0, n$ 为偶数. 此时 G_i

($i = 1, 2, \dots, c$)的围长均大于3.

情形 1.1 G_c 是含 2 个奇圈的“dumbbell”型双圈图.

由引理 10 可知, G_c 中至少有 2 个度为 2, 3 或 4 的点. 由 $a_2 = a_3 = 0, a_4 = 5$ 得 $c \leq 4$. 设 p ($p \geq 10$) 是 G_c 中 2 个奇圈的长度和, q 是连接 G_c 中 2 个奇圈的路的长度, 则 $p + q \leq 4n - a_1 - 5(c - 1) = n - 5c + 7$. 另一方面, 由引理 7 和推论 3 可知, G 中所有非零 Q -特征值的乘积为 $4^{c-1}(4p + 4^2q) = 4n^2$. 于是,

$$\begin{cases} p + q \leq n - 5c + 7 \\ p + 4q = 4^{1-c}n^2 \\ p \geq 10 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3}(4^{1-c}n^2 - n + 5c - 7) \leq q \leq n - 5c - 3$$

即 $4^{1-c}n^2 - 4n + 20c + 2 \leq 0$.

当 $c = 1$ 或 2 时, $f(n) = 4^{1-c}n^2 - 4n + 20c + 2$ 的判别式均小于 0, 矛盾.

当 $c = 3$ 时, 解得 $27 \leq n \leq 37$, 考虑到 n 为 2^r 形式, 所以, $n = 32$, 与条件不符.

当 $c = 4$ 时, 解得 $23 \leq n \leq 233$, 所以, $n = 32, 64$ 或 128, 也与条件不符.

情形 1.2 若 G_c 不是含 2 个奇圈的“dumbbell”型双圈图.

此时, G_c 是“0”型、“ ∞ ”型或者是带有 1 个偶圈 1 个奇圈的“dumbbell”型双圈图, 由引理 10 可知, G_c 中至少有 1 个度为 2, 3 或 4 的点. 由 $a_2 = a_3 = 0, a_4 = 5$ 得 $c \leq 5$. 设 x 是 G_c 中使得 $G_c - e$ 为奇单圈图的边 e 的个数, 则 $4^c x = 4n^2$, 从而 $x = 4^{1-c}n^2 \leq 4n - a_1 - 5(c - 1) = n - 5c + 7$, 即 $4^{1-c}n^2 - n + 5c - 7 \leq 0$.

当 $c = 1$ 时, 解得 $-1 \leq n \leq 2$, 矛盾.

当 $c = 2$ 或 3 时, $f(n) = 4^{1-c}n^2 - n + 5c - 7$ 的判别式均小于 0, 矛盾.

当 $c = 4$ 时, 解得 $19 \leq n \leq 45$, 考虑到 n 为 2^r 形式, 所以, $n = 32$, 与条件不符.

当 $c = 5$ 时, 解得 $20 \leq n \leq 236$, 所以, $n = 32, 64$ 或 128, 也与条件不符.

情形 2 $a_0 = 1, a_1 = 3n - 2, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = n - 3, a_6 = 1, t(G) = 1, n$ 为偶数. 此时 G 中恰有 1 个三角形.

情形 2.1 G_c 是含 2 个奇圈的“dumbbell”型双圈图.

由 $a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 2$ 得 $c \leq 2$. 设 p ($p \geq 8$) 是 G_c 中 2 个奇圈的长度和, q 是连接 G_c 中 2 个奇圈的路的长度.

当 $c = 1$ 时, G_1 是双圈图且含三角形, 则 $p + q \leq 4n - a_1 = n + 2$. 另一方面, $4p + 4^2q = 4n^2$, 于是

$$\begin{cases} p + q \leq n + 2 \\ p + 4q = n^2 \Rightarrow \frac{1}{3}(n^2 - n - 2) \leq q \leq n - 6 \\ p \geq 8 \end{cases}$$

即 $n^2 - 4n + 16 \leq 0$, 其判别式小于 0, 矛盾.

当 $c = 2$ 时, $p + q \leq \max\{4n - a_1 - 5, 4n - a_1 - 3\} = n - 1$. 又 $4(4p + 4^2q) = 4n^2$. 于是

$$\begin{cases} p + q \leq n - 1 \\ p + 4q = 4^{-1}n^2 \Rightarrow \frac{1}{3}(4^{-1}n^2 - n + 1) \leq q \leq n - 9 \\ p \geq 8 \end{cases}$$

即 $4^{-1}n^2 - 4n + 28 \leq 0$, 其判别式小于 0, 矛盾.

情形 2.2 若 G_c 不是含 2 个奇圈的“dumbbell”型双圈图.

由 $a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 2$ 可知, $c \leq 3$. 设 x 是 G_c 中使得 $G_c - e$ 为奇单圈图的边 e 的个数, 则 $4^c x = 4n^2$, 故 $x = 4^{1-c}n^2$.

当 $c = 1$ 时, $x = n^2 \leq 4n - a_1 = n + 2$, 即 $n^2 - n - 2 \leq 0$, 解得 $-1 \leq n \leq 2$, 矛盾.

当 $c = 2$ 或 3 时,

$$x = 4^{1-c}n^2 \leq \max\{4n - a_1 - 5(c - 2) - 3, 4n - a_1 - 5(c - 1)\} = n - 5c + 9$$

即 $4^{1-c}n^2 - n + 5c - 9 \leq 0$.

当 $c = 2$ 时, 解得 $n = 2$, 矛盾.

当 $c = 3$ 时, $f(n) = 4^{1-c}n^2 - n + 5c - 9$ 的判别式小于 0, 矛盾.

综合以上情形, $\Delta(G) \neq 6$, 即 $\Delta(G) = 5$, 因而由定理 1 可知, G 与 $C_n \circ 3K_1$ 具有相同的度序列, 再由引理 12 可知, $G \cong C_n \circ 3K_1$, 即 $C_n \circ 3K_1$ 由其 Q -谱确定. 证毕.

当 $n = 32, 64$ 或 128 时, $C_n \circ 3K_1$ 是否由其 Q -谱确定, 利用本文的方法无法确定, 解决该问题需要用新的方法. 同样, 文献[1]也遗留了类似的问题: 当 $n = 32$ 或 64 时, $C_n \circ 2K_1$ 不知道是否由其 Q -谱确定.

参考文献:

- [1] BU C J, ZHOU J, LI H B, et al. Spectral characterizations of the corona of a cycle and two isolated vertices[J]. Graphs and Combinatorics, 2014, 30(5): 1123 - 1133.
- [2] VAN DAM E R, HAEMERS W H. Which graphs are determined by their spectrum? [J]. Linear Algebra and its Applications, 2003, 373(11): 241 - 272.

(下转第 317 页)

- [7] BAXTER M, VAN GORDER R A, VAJRAMELU K. Several types of similarity solutions for the Hunter-Saxton equation[J]. Communications in Theoretical Physics, 2015, 63(6): 675 – 681.
- [8] BEALS R, SATTINGER D H, SZMIGIELSKI J. Inverse scattering solutions of the Hunter-Saxton equation[J]. Applicable Analysis, 2001, 78(3/4): 255 – 269.
- [9] ZUO D F. A two-component μ -Hunter-Saxton equation[J]. Inverse Problems, 2010, 26(8): 085003.
- [10] 张剑梅. 一类弱耗散双组份 Hunter-Saxton 系统的爆破与爆破率[J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(5): 280 – 288.
- [11] HUNTER J K, ZHENG Y X. On a completely integrable nonlinear hyperbolic variational equation[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1994, 79(2/3/4): 361 – 386.
- [12] LI C H, WEN S H, CHEN A Y. Single peak solitary wave and compacton solutions of the generalized two-component Hunter-Saxton system [J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 79(2): 1575 – 1585.
- [13] CHOU T. Symmetries and group-invariant solutions of differential equations[J]. Applied Mathematics—A Journal of Chinese Universities, 1994, 9(4): 319 – 324.

(编辑: 丁红艺)

(上接第 312 页)

- [3] MIRZAKHAH M, KIANI D. The sun graph is determined by its signless Laplacian spectrum[J]. Electronic Journal of Linear Algebra, 2010, 20: 610 – 620.
- [4] BOULET R. Spectral characterizations of sun graphs and broken sun graphs [J]. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2009, 11(2): 149 – 160.
- [5] BU C J, ZHOU J. Starlike trees whose maximum degree exceed 4 are determined by their Q -spectra [J]. Linear Algebra and its Applications, 2012, 436(1): 143 – 151.
- [6] BU C J, HOU J, LI H B. Spectral determination of some chemical graphs [J]. Filomat, 2012, 26(6): 1123 – 1131.
- [7] ZHANG Y P, LIU X G, ZHANG B Y, et al. The lollipop graph is determined by its Q -spectrum[J]. Discrete Mathematics, 2009, 309(10): 3364 – 3369.
- [8] 沈富强, 吴宝丰. 最小 Q -特征值为给定整数的一类图[J]. 上海理工大学学报, 2014, 36(5): 425 – 428.
- [9] CVETKOVIĆ D, ROWLINSON P, SIMIĆ S K. Signless Laplacians of finite graphs[J]. Linear Algebra and its Applications, 2007, 423(1): 155 – 171.
- [10] WANG J F, HUANG Q X, BELARDO F, et al. On graphs whose signless Laplacian index does not exceed 4.5[J]. Linear Algebra and its Applications, 2009, 431(1/2): 162 – 178.
- [11] HOFFMAN A J, SMITH J H. On the spectral radii of topologically equivalent graphs[M] // FIEDKER M. Recent Advances in Graph Theory. New York: Academic Press, 1975: 273 – 281.
- [12] CVETKOVIĆ D, SIMIĆ S K. Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, II [J]. Linear Algebra and its Applications, 2010, 432(9): 2257 – 2272.
- [13] CVETKOVIĆ D, ROWLINSON P, SIMIĆ S K. Eigenvalue bounds for the signless Laplacian[J]. Publications de L'Institut Mathématique, 2007, 81(95): 11 – 27.

(编辑: 石 瑛)