

Hunter-Saxton 方程的对称约化与群不变解

檀美英, 胡恒春

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 借助符号计算软件 Maple, 根据微分方程单参数不变群和群不变解的概念, 利用李群对称的待定系数法, 得到 Hunter-Saxton 方程的包含 5 个任意常数和 1 个任意函数的一般形式的对称. 通过该对称中任意的函数和常数的不同选取, 将 Hunter-Saxton 方程约化为不同形式的常微分方程. 最后对约化后的常微分方程进行变换求解, 进一步得出 Hunter-Saxton 方程的一些群不变解和精确解.

关键词: Hunter-Saxton 方程; 李群对称; 群不变解

中图分类号: O 175 **文献标志码:** A

Symmetry Reduction and Group Invariant Solutions of Hunter-Saxton Equations

TAN Meiyong, HU Hengchun

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: By using the symbolic computation software Maple, according to the concepts of single parameter invariant groups and group invariant solutions of differential equations, the general symmetry of the Hunter-Saxton equation was obtained with the help of its symmetry equation, which included five arbitrary constants and one arbitrary function. The Hunter-Saxton equation was reduced to some types of different ordinary differential equations by selecting different constants and function. Finally, with the transformational solving of the ordinary differential equations, group invariant solutions and exact solutions of the Hunter-Saxton equation were obtained directly.

Keywords: Hunter-Saxton equation; Lie symmetry group; group-invariant solutions

对称在自然科学中扮演着重要角色, 在孤立子理论中, 研究非线性系统的对称也尤为重要. 因为通过方程的对称方程, 能够用经典李群法和非经典李

群法将非线性偏微分方程进行约化, 利用约化方程可以求出该方程的群不变解. 目前一些方程的对称方程已经被求出, 如 Korteweg-de Vries 方程^[1],

收稿日期: 2015-12-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(110711640); 国家自然科学基金青年基金资助项目(11201302); 上海市自然科学基金资助项目(10ZR1420800); 上海市重点学科建设资助项目(XTKX2012)

第一作者: 檀美英(1990-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 孤立子与可积系统. E-mail: tanmy1207@163.com

通信作者: 胡恒春(1976-), 女, 副教授. 研究方向: 孤立子与可积系统. E-mail: hhengchun@163.com

Modified Korteweg-de Vries 方程^[2], Ablowitz-Kaup-Newell-Segur 方程^[3]等. 现在求取对称方程的常用方法是经典李群变换法^[4], 但这个方法涉及到方程的延拓结构, 对有些方程来说计算量很大也很复杂. 而用待定系数求方程对称的方法与经典李群变换法求对称颇为相似, 但却避免了有关延拓结构的复杂计算, 显得简单而直接, 也可以进一步从求出的对称中找到单参数不变群和群不变解.

1 Hunter-Saxton 方程简介

考虑 Hunter-Saxton(HS)方程

$$u_{xxt} + 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} = 0 \quad (1)$$

该方程最早由 Hunter 和 Saxton^[5]推导出来, 引起了物理和数学界的广泛关注. 很多研究者在此基础上取得了一定的研究成果^[5-12]. 文献[6]中, 作者对 HS 方程的另一种形式

$$u_{xt} + \frac{1}{2}u_x^2 + uu_{xx} = 0 \quad (2)$$

采用经典李群变换法得到方程(2)的对称并对该方程的守恒律进行了分析. 在文献[7]中, 作者对方程(2)的相似解的几种类型进行了深入探讨, 并给出了不同形式的精确解. 文献[8]中, 作者求出了 Hunter-Saxton 方程的逆散射方程及其精确解. 在文献[9]中, 作者则用动力系统分岔方法求出了广义二分量 Hunter-Saxton 方程系统的单峰孤立波和 Compacton 解. 由于用一般的经典李群变换法求方程(1)的对称方程计算量太大, 本文提出了采用待定系数法求其对称方程的方法^[4], 避免了经典李群变换法中有关延拓的计算, 使得计算过程与计算量都大幅减少. 在求出 Hunter-Saxton 方程的对称方程后, 进一步选取一些特殊对称, 得到方程(1)的单参数不变群和群不变解, 分情况将方程(1)约化为常微分方程, 并求出部分精确解.

2 Hunter-Saxton 方程的对称

对于非线性发展方程

$$\Phi(x, t, u_x, u_t, \dots) = 0 \quad (3)$$

称函数 $\sigma(x, t, u_x, u_t, \dots)$ 为方程(3)的一个对称, 如果

$$\Phi'(u)\sigma = 0 \quad (4)$$

对任意的 u 都成立, 其中

$$\Phi'(u)\sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\sigma + \frac{\partial \Phi}{\partial u_x}\sigma_x + \frac{\partial \Phi}{\partial u_t}\sigma_t + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{xt}}\sigma_{xt} + \dots$$

考虑 Hunter-Saxton 方程(1), 令

$$u = u + \epsilon \sigma \quad (5)$$

式中, ϵ 是参数, 并且 $\epsilon \ll 1$. 将式(5)代入方程(1)中会得到有关 ϵ 的一元二次方程组, 提出有关 ϵ 的一次项系数, 得到方程(1)的对称应满足的方程为

$$\sigma_{xxt} + 2u_x \sigma_{xx} + 2\sigma_x u_{xx} + u\sigma_{xxx} + \sigma u_{xxx} = 0 \quad (6)$$

设方程(1)有形如

$$\sigma(x, t, u) = a(x, t)u_x + b(x, t)u_t + c(x, t)u + d(x, t) \quad (7)$$

的对称, 这时

$$\sigma_x = a_x u_x + a u_{xx} + b_x u_t + b u_{xt} + c_x u + c u_x + d_x \quad (8)$$

$$\sigma_{xx} = a_{xx} u_x + 2a_x u_{xx} + a_{xt} u_t + b_{xx} u_t + 2b_x u_{xt} + b_{xt} u_{tt} + c_{xx} u + 2c_x u_x + c_{xt} u_t + d_{xx} \quad (9)$$

$$\sigma_{xxx} = a_{xxx} u_x + 3a_{xx} u_{xx} + 3a_{xt} u_t + a_{xtt} u_{tt} + b_{xxx} u_t + 3b_{xx} u_{xt} + 3b_x u_{xtt} + b_{xtt} u_{ttt} + c_{xxx} u + 3c_{xx} u_x + 3c_x u_{xt} + c_{xtt} u_{tt} + d_{xxx} \quad (10)$$

$$\sigma_{xxt} = a_{xxt} u_x + a_{xt} u_{xx} + 2a_{xtt} u_t + 2a_{xtt} u_{tt} + b_{xxt} u_t + b_{xt} u_{tt} + 2b_{xtt} u_{ttt} + c_{xxt} u + 2c_{xt} u_x + 2c_{xtt} u_t + c_{xtt} u_{tt} + d_{xxt} \quad (11)$$

$$u_{xxt} = -2u_x u_{xx} - uu_{xxx} \quad (12)$$

将式(8)~(12)代入方程(6)并化简. 由 u 的各阶偏导数的系数为 0, 得到 a, b, c, d 应满足下列条件:

$$u^2 u_{xxx} : 3b_x = 0$$

$$uu_{xxx} : a_x + c - b_t = 0$$

$$u_{xxx} : a_t + d = 0$$

$$uu_{xx} : 3a_{xx} + 5c_x = 0$$

$$u_{xx} : 2a_{xt} + c_t + 2d_x = 0$$

$$u_x^2 : 2a_{xx} + 4c_x = 0$$

$$u_x : a_{xxt} + 2c_{xt} + 2d_{xt} = 0$$

由上列 7 组关系式, 得到 a, b, c, d 的解为

$$a = (k_4 + k_1 t + k_2)x + f(t) + k_5,$$

$$b = \frac{1}{2}k_1 t^2 + k_2 t + k_3, c = -k_4,$$

$$d = -f'(t) - k_1 x$$

其中, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 为任意常数, $f(t)$ 为 t 的任意函数. 由此可以得出 Hunter-Saxton 方程 $u_{xxt} +$

$2u_x u_{xxt} + uu_{xxx} = 0$ 的对称为

$$\sigma = [(k_4 + k_1 t + k_2)x + f(t) + k_5]u_x + \left[\frac{1}{2}k_1 t^2 + k_2 t + k_3\right]u_t - k_4 u - f'(t) - k_1 x \quad (13)$$

3 单参数不变群及其群不变解

根据文献[13], 对称 σ 有其相应的单参数不变群, 不妨取 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 0, f(t) = t$, 此时, $\sigma = tu_x - 1$. 由对称与相应的单参数不变群的关系^[13]可知, 只需解下列常微分方程就可得到其单参数不变群.

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{d\epsilon} = \sigma(\bar{u}) = t\bar{u}_x - 1 \\ \bar{u}|_{\epsilon=0} = u \end{cases} \quad (14)$$

对 $\sigma(\bar{u}) = t\bar{u}_x - 1$, 需解微分方程 $\frac{d\bar{u}}{d\epsilon} = t\bar{u}_x - 1$, 由于 $\frac{d\epsilon}{1} = \frac{dx}{t} = \frac{dt}{0} = \frac{du}{1}$ 有下列 3 个独立首次积分

$$x - t\epsilon, t, \bar{u} - \epsilon \quad (15)$$

从而得到方程(14)的解, $\bar{u} = f(x - t\epsilon, t) + \epsilon$ (f 为任意函数), 且它满足初始条件 $\bar{u}|_{\epsilon=0} = u$, 于是得到 $\bar{u} = u(x - t\epsilon, t) + \epsilon$. 因此, 得到 $\sigma = tu_x - 1$ 相应的单参数变换群为

$$g_\epsilon: u \rightarrow \bar{u} = u(x - t\epsilon, t) + \epsilon$$

再由对称和群不变解的关系^[4]可知, 要寻找方程(1)的群不变解, 只需要解下列方程组

$$\begin{cases} u_{xxt} + 2u_x u_{xxt} + uu_{xxx} = 0 \\ \sigma(u) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

现在来寻找方程(1)的一些群不变解.

a. 当 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0, f(t) + k_5 \neq 0$ 时, 此时, $\sigma = [f(t) + k_5]u_x - f'(t)$. 解方程 $[f(t) + k_5]u_x - f'(t) = 0$ 得

$$u = \frac{f'(t)}{f(t) + k_5}x + g(t) \quad (17)$$

代入方程(16), 满足 $u_{xxt} + 2u_x u_{xxt} + uu_{xxx} = 0$. 因此, 方程(1)的群不变解为 $u = \frac{f'(t)}{f(t) + k_5}x + g(t)$. 其中 $f(t), g(t)$ 均为 t 的任意函数.

b. 当 $k_1 = k_2 = k_4 = k_5 = f(t) = 0$ 时, 此时, $\sigma = k_3 u_t$, 有特征方程 $\frac{dt}{k_3} = \frac{dx}{0} = \frac{du}{0}$, 得其相似变量和相似解为

$$\xi = x, u = f(\xi) \quad (18)$$

代入 $u_{xxt} + 2u_x u_{xxt} + uu_{xxx} = 0$ 有

$$2f'f'' + ff''' = 0 \quad (19)$$

故 $\sigma = k_3 u_t$ 时, 若 $f(\xi)$ 是方程(19)的解, 则 $u = f(x)$ 就是方程(1)的群不变解.

c. $k_1 = k_2 = k_4 = f(t) = 0$ 时, $\sigma = k_5 u_x +$

$k_3 u_t$, 由特征方程 $\frac{dt}{k_3} = \frac{dx}{k_5} = \frac{du}{0}$, 解得

$$u = f(\xi), \xi = x - \frac{k_5}{k_3}t \quad (20)$$

代入方程 $u_{xxt} + 2u_x u_{xxt} + uu_{xxx} = 0$, 得

$$f'''f - \frac{k_5}{k_3}f''' + 2f'f'' = 0 \quad (21)$$

故当 $\sigma = k_5 u_x + k_3 u_t$ 时, 若 $f(\xi)$ 是方程(21)的解, 则 $u = f\left(x - \frac{k_5}{k_3}t\right)$ 就是方程(1)的群不变解.

4 方程的对称约化和精确解

下面利用得到的对称, 约化方程(1), 考虑以下几种情况.

情况 1 $k_1 = 1, k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = f(t) = 0$ 时, 有 $\sigma = txu_x + \frac{1}{2}t^2 u_t - x$, 由 $txu_x + \frac{1}{2}t^2 u_t - x = 0$ 的特征方程 $\frac{dx}{tx} = \frac{dt}{\frac{1}{2}t^2} = \frac{du}{x}$, 得到相似变量和

相似解为

$$\xi = xt^{-2}, u = f(\xi) + \frac{2x}{t} \quad (22)$$

代入方程(1)并化简, 可将方程(1)约化为

$$2f'f'' + ff''' = 0 \quad (23)$$

对式(23)积分一次, 得到 $2ff'' + f'^2 = a$. 其中, a 为积分常数. 特别地, 当 a 为 0 时, 得到方程(23)的解为

$$f = \frac{1}{4}(12a_1 x + 12a_2)^{\frac{2}{3}} \quad (24)$$

式中, a_1, a_2 为任意常数, 所以方程(1)的精确解为

$$u = \frac{1}{4}(12a_1 x + 12a_2)^{\frac{2}{3}} + \frac{2x}{t} \quad (25)$$

情况 2 $k_2 = 1, k_1 = k_3 = k_4 = k_5 = f(t) = 0$ 时, $\sigma = xu_x + tu_t$, 由 $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} = \frac{du}{0}$, 可以得到方程(1)的相似变量和相似解为

$$\xi = xt^{-1}, u = f(\xi) \quad (26)$$

代入方程(1), 将方程(1)约化为

$$-\xi f''' + ff''' + 2f'f'' - 2f'' = 0 \quad (27)$$

所以, 若 $f(\xi)$ 为方程(27)的解, 则 $u = f(xt^{-1})$ 为方

程(1)的解

情况 3 设 $k_3 = 1, k_1 = k_2 = k_4 = k_5 = f(t) = 0, \sigma = u_t$, 解特征方程 $\frac{dx}{0} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{0}$, 得到相似变量和相似解为

$$\xi = x, u = f(\xi) \quad (28)$$

将式(26)代入方程(1), 可将方程(1)约化为

$$2f'f'' + ff''' = 0 \quad (29)$$

该方程与对情况 1 的约化方程积分一次后的形式一样, 故由情况 1 解得其精确解为

$$u = \frac{1}{4} (12a_1 x + 12a_2)^{\frac{2}{3}} \quad (30)$$

式中, a_1, a_2 为任意常数

情况 4 $k_4 = 1, k_1 = k_2 = k_3 = k_5 = f(t) = 0, \sigma = xu_x - u$, 解 $xu_x - u = 0$ 的特征方程 $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{0} = \frac{du}{u}$, 得到它的相似变量和相似解为

$$\xi = t, u = f(\xi)x \quad (31)$$

代入方程(1), 知满足方程 $u_{xxt} + 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} = 0$, 所以方程(1)的精确解为

$$u = f(t)x \quad (32)$$

式中, $f(t)$ 为 t 的任意函数.

情况 5 $k_5 = 1, k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = f(t) = 0$ 时, $\sigma = u_x$, 由特征方程 $\frac{dx}{1} = \frac{dt}{0} = \frac{du}{0}$, 可得相似变量和相似解为

$$\xi = t, u = f(\xi) \quad (33)$$

代入方程(1), 易知满足方程 $u_{xxt} + 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} = 0$, 故方程(1)的精确解为

$$u = f(t) \quad (34)$$

式中, $f(t)$ 为 t 的任意函数.

情况 6 $f(t) = f'(t), k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 0$ 时. 有 $\sigma = f(t)u_x - f'(t)$, 由 $f(t)u_x - f'(t) = 0$ 的特征方程

$$\frac{dx}{f(t)} = \frac{dt}{0} = \frac{du}{f'(t)} \quad (35)$$

可以得到方程(1)的相似变量和相似解为

$$\xi = t, u = f(\xi) + \frac{f'(t)}{f(t)}x \quad (36)$$

代入方程(1), 知满足方程 $u_{xxt} + 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} = 0$. 所以方程(1)的精确解为

$$u = f(t) + \frac{f'(t)}{f(t)}x \quad (37)$$

式中, $f(t)$ 为 t 的任意函数.

情况 7 $k_2 = k_4 = 1, f(t) = \frac{1}{2}t^2 + t, k_1 =$

$k_3 = k_5 = 0$ 时, $\sigma = \left(t + 2x + \frac{1}{2}t^2\right)u_x + tu_t - (u + t + 1)$, 由 $\left(t + 2x + \frac{1}{2}t^2\right)u_x + tu_t - (u + t + 1) = 0$ 得特征方程

$$\frac{dx}{t + 2x + \frac{1}{2}t^2} = \frac{dt}{t} = \frac{du}{u + t + 1} \quad (38)$$

解得相似变量和相似解为 $\xi = \frac{2x + 2t - t^2 \ln t}{2t^2}$, $u = f(\xi)t + t \ln t - 1$, 代入方程(1), 得其约化方程为

$$\left(2\xi + \frac{1}{2}\right)f''' + 3f'' - 2f'f'' - ff''' = 0 \quad (39)$$

所以, 若 $f(\xi)$ 为方程(39)的解, 则

$$u = f\left(\frac{2x + 2t - t^2 \ln t}{2t^2}\right)t + t \ln t - 1 \quad (40)$$

为 HS 方程(1)的解.

5 结 论

本文用李对称的待定系数法求出了 Hunter-Saxton 方程的对称, 然后利用对称将该方程约化, 求出了方程的群不变解. 这种方法具有普遍性, 可以将其推广到其他非线性偏微分方程中, 这为求解非线性偏微分方程及探索它们新的物理规律提供了一种途径和方法, 有一定的实际意义. 而用其他更为简便的方法去寻求 Hunter-Saxton 方程的各种形式的解, 是今后的一个研究重点.

参考文献:

- [1] 韦雪敏, 唐红武. Kdv 方程的 Lie 对称分析和精确解[J]. 桂林电子科技大学学报, 2010, 30(4): 355 - 358.
- [2] 王珍, 吉飞宇. mKdv 方程的对称与群不变解[J]. 纯粹数学与应用数学, 2011, 27(6): 778 - 780.
- [3] 康晓蓉, 鲜大权. (2+1) 维 AKNS 方程的对称约化和新的非行波精确解[J]. 量子电子学报, 2013, 30(6): 678 - 683.
- [4] 田畴. 李群及其在微分方程中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [5] HUNTER J K, SAXTON R. Dynamics of director fields[J]. Siam Journal on Applied Mathematics, 1991, 51(6): 1498 - 1521.
- [6] MEHDI N, FATEMEH A. Symmetry analysis and conservation laws for the Hunter-Saxton equation[J]. Communications in Theoretical Physics, 2013, 59(3): 335 - 348.

- [7] BAXTER M, VAN GORDER R A, VAJRAMELU K. Several types of similarity solutions for the Hunter-Saxton equation[J]. Communications in Theoretical Physics, 2015, 63(6): 675 – 681.
- [8] BEALS R, SATTINGER D H, SZMIGIELSKI J. Inverse scattering solutions of the Hunter-Saxton equation[J]. Applicable Analysis, 2001, 78(3/4): 255 – 269.
- [9] ZUO D F. A two-component μ -Hunter-Saxton equation[J]. Inverse Problems, 2010, 26(8): 085003.
- [10] 张剑梅. 一类弱耗散双组份 Hunter-Saxton 系统的爆破与爆破率[J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(5): 280 – 288.
- [11] HUNTER J K, ZHENG Y X. On a completely integrable nonlinear hyperbolic variational equation[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1994, 79(2/3/4): 361 – 386.
- [12] LI C H, WEN S H, CHEN A Y. Single peak solitary wave and compacton solutions of the generalized two-component Hunter-Saxton system [J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 79(2): 1575 – 1585.
- [13] CHOU T. Symmetries and group-invariant solutions of differential equations[J]. Applied Mathematics—A Journal of Chinese Universities, 1994, 9(4): 319 – 324.

(编辑:丁红艺)

(上接第 312 页)

- [3] MIRZAKHAH M, KIANI D. The sun graph is determined by its signless Laplacian spectrum[J]. Electronic Journal of Linear Algebra, 2010, 20: 610 – 620.
- [4] BOULET R. Spectral characterizations of sun graphs and broken sun graphs [J]. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2009, 11(2): 149 – 160.
- [5] BU C J, ZHOU J. Starlike trees whose maximum degree exceed 4 are determined by their Q -spectra[J]. Linear Algebra and its Applications, 2012, 436(1): 143 – 151.
- [6] BU C J, HOU J, LI H B. Spectral determination of some chemical graphs[J]. Filomat, 2012, 26(6): 1123 – 1131.
- [7] ZHANG Y P, LIU X G, ZHANG B Y, et al. The lollipop graph is determined by its Q -spectrum[J]. Discrete Mathematics, 2009, 309(10): 3364 – 3369.
- [8] 沈富强, 吴宝丰. 最小 Q -特征值为给定整数的一类图[J]. 上海理工大学学报, 2014, 36(5): 425 – 428.
- [9] CVETKOVIĆ D, ROWLINSON P, SIMIĆ S K. Signless Laplacians of finite graphs[J]. Linear Algebra and its Applications, 2007, 423(1): 155 – 171.
- [10] WANG J F, HUANG Q X, BELARDO F, et al. On graphs whose signless Laplacian index does not exceed 4.5[J]. Linear Algebra and its Applications, 2009, 431(1/2): 162 – 178.
- [11] HOFFMAN A J, SMITH J H. On the spectral radii of topologically equivalent graphs[M] // FIEDKER M. Recent Advances in Graph Theory. New York: Academic Press, 1975: 273 – 281.
- [12] CVETKOVIĆ D, SIMIĆ S K. Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, II [J]. Linear Algebra and its Applications, 2010, 432(9): 2257 – 2272.
- [13] CVETKOVIĆ D, ROWLINSON P, SIMIĆ S K. Eigenvalue bounds for the signless Laplacian[J]. Publications de L'Institut Mathématique, 2007, 81(95): 11 – 27.

(编辑:石 瑛)