

基于对称模糊数和最优 h 值线性回归模型的质量功能展开研究

朱 倩, 陆秋君

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 模糊线性回归参数 h 决定模糊系数的可能性分布, 影响模型的系统可靠性. 分析了含有参数 p 的对称模糊数的模型, 得出质量功能展开中具有最优 h 值的函数关系. 当参数 p 给定时, 考虑系统模糊性和系统隶属度两个因素, 依据模糊线性回归模型系统可靠性最大的原则, 得到最优 h 值; 并将该理论应用于质量功能展开的实例, 选取有代表性的 3 个 p 值, 分别对应二次根型、三角型和抛物型对称模糊数进行讨论, 得到对应的最优 h 值. 在最优 h 值的前提下, 分析对应的系统模糊性和可靠性的变化规律, 通过对比分析, 得到系统可靠性最大的函数关系.

关键词: 模糊线性回归; 对称模糊数; 最优 h 值; 质量功能展开; 系统可靠性

中图分类号: O 212 **文献标志码:** A

Quality Function Deployment Based on a Kind of Linear Regression Model with Symmetric Fuzzy Numbers and Optimized h Values

ZHU Qian, LU QiuJun

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The parameter h , in a fuzzy linear regression (FLR) model, determines the probability distribution of the fuzzy coefficients and influences the system credibility of the FLR model. To obtain the functional relationships with optimized h values in quality function deployment (QFD), the FLR model was analyzed, where the coefficients were assumed as symmetric fuzzy numbers containing parameter p . When the parameter p was given, considering both the system fuzziness and membership, the h values were determined according to the criterion of maximum credibility of the system. An illustrative example was provided to demonstrate the performance of the proposed approach. Meanwhile, the optimized h values were obtained under different representatives of p values, namely, the secondary root, triangle and parabolic symmetric fuzzy numbers. The changing disciplines of the system fuzziness and reliability were analyzed with regard to the optimized h values. The maximum system credibility of the functional relationship can be obtained by comparing the corresponding results.

收稿日期: 2016-01-30

第一作者: 朱 倩(1992-), 女, 硕士研究生. 研究方向: 应用数理统计. E-mail: zhuqian_1992@126.com

通信作者: 陆秋君(1974-), 女, 副教授. 研究方向: 应用数理统计、经济计量学和模糊数学. E-mail: fuzzy_lu@163.com

Keywords: fuzzy linear regression; symmetric fuzzy number; optimized h value; quality function deployment; system credibility

质量功能展开(QFD)起源于20世纪末的日本^[1],它将客户的需求通过不同阶段的产品规划转变为产品功能,已被用来作为顾客导向的方法,分析客户对不同属性的产品的需求,从而促进产品的设计^[2].QFD的方法已成功应用在许多行业,包括软件开发过程^[3]、供应链管理^[4]、项目选择和分配^[5]、预测分析^[6]及投资^[7]等.

到目前为止,在质量功能展开中确定函数关系有两大分支.一是有经验的产品专家根据清晰输入或者模糊输入决定函数关系.在传统的质量功能展开中,客户要求倾向于主观性和定量性,得到的结论往往是不精确的.另一分支是模糊回归的方法.Tanaka等^[8]根据Zadeh^[9]的扩展原理首次将模糊回归的方法引入QFD中.Kim等^[10]用模糊线性回归(FLR)模型来估计QFD中的函数关系,并提出了一种模糊多准则的方法进行产品设计.Moskowitz等^[11]、Kim等^[12]研究了具有对称三角模糊数的模糊线性回归模型中,模糊线性回归参数 h 与隶属函数的形状和模糊参数的展形之间的关系.Liu等^[13]在综合考虑了系统模糊性和系统隶属度的因素下,提出系统可靠性最大的准则,选择具有最优 h 值的模糊线性回归模型.Liu等^[14]研究了具有对称三角模糊数的模糊线性回归模型在质量功能展开中的应用,Chen等^[15]将其推广到具有非对称模糊数的线性回归模型.

本文分析含有参数 p 的对称模糊数,推导最优 h 值模糊线性回归模型的求解过程;并将该理论模型应用于质量功能展开,在不同 p 值前提下,对应得到最优 h 值、系统模糊性和系统可靠性进行相关分析,得到最优模糊函数关系.

1 理论知识

1.1 对称模糊数的线性回归模型

传统的线性回归模型,假设被解释变量是解释变量的线性组合.有 m 对样本观察数据 $\{(y_1, x_1), (y_2, x_2), \dots, (y_i, x_i), \dots, (y_m, x_m)\}$, 其中, y_i 是第 i 个清晰观察值, $x_i = (x_{i0}, x_{i1}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{in})$ 是第 i 个清晰输入向量,并对任意的 i , 有 $x_{i0} = 1$ 成立, x_{ij} 是第 i 个样本的第 j 个变量的观测值.一般来

说,被解释变量和解释变量之间的模糊函数关系为

$$\hat{y}_i = f(x_i) = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_{i1} + \dots + \tilde{A}_j x_{ij} + \dots + \tilde{A}_n x_{in} = \sum_{j=0}^n \tilde{A}_j x_{ij}, i=1 \quad (1)$$

式中: $\hat{y}_i$ 是 y_i 的模糊估计值; $\tilde{A}_j$ 是具有对称模糊数的模糊系数, $j=0, 1, \dots, n$.

设式(1)中的 $\tilde{A}_j$ 有一个隶属函数,记为 $\tilde{A}_j(x)$, 表示为

$$\tilde{A}_j(x) = L\left(\frac{x - a_j^c}{a_j^s}\right) \quad (2)$$

式中: $L(x) = \max\{0, 1 - |x|^p\}$, $p > 0$; $\tilde{A}_j$ 表示为 $\tilde{A}_j = (a_j^c, a_j^s)_L$, $j=0, 1, \dots, n$; a_j^c 和 a_j^s 分别表示 $\tilde{A}_j$ 的中心值和展形;参数 p 代表模糊程度的强弱.

如图1所示,考虑到不同隶属函数的对称情况,为方便研究,仅讨论3种典型模糊程度的情况,即 $p=0.5$, $p=1$ 和 $p=2$,分别对应于具有二次根型模糊数、三角型模糊数、抛物型模糊数^[16]. a_j^L , a_j^R 分别为 x 的左展值、右展值.模糊线性回归的目标是根据最小模糊性来决定 $f(x_i)$ ^[8],表示为

$$y_i \in [f(x_i)]^h, i=1, 2, \dots, m \quad (3)$$

式中, $[f(x_i)]^h$ 是 h 水平下通过输入向量 x_i , 根据式(1)得到的模糊线性回归函数的模糊输出,是一个取值区间.

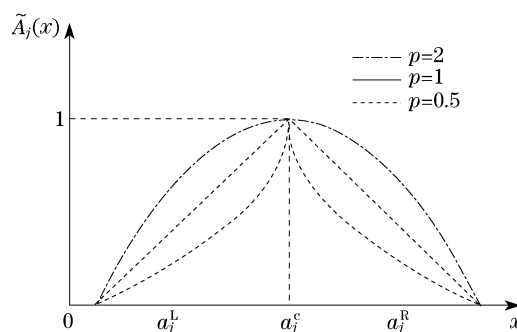


图1 不同 p 值时具有对称模糊数的隶属函数

Fig.1 Membership function of the symmetric fuzzy number corresponding to different p values

通过中心值 $f^c(x_i)$ 和展形 $f^s(x_i)$, 得到预测模糊值 $f(x_i) = (f^c(x_i), f^s(x_i))_L$, 即

$$f^c(x_i) = \sum_{j=0}^n a_j^c x_{ij} \quad (4)$$

$$f^s(x_i) = \sum_{j=0}^n a_j^s |x_{ij}| \quad (5)$$

同时,可以得到 $h (0 \leq h < 1)$ 水平下的 $f(x_i) = (f^c(x_i), f^s(x_i))_L$ 的区间:

$$[f(x_i)]^h = [f^c(x_i) - (1-h)^{\frac{1}{p}} f^s(x_i), f^c(x_i) + (1-h)^{\frac{1}{p}} f^s(x_i)] \quad (6)$$

当 $h=0$ 时, $f(x_i)$ 取 0 水平截集为模糊集合支集的闭包.

此时,式(3)可以对应写成

$$\sum_{j=0}^n a_j^c x_{ij} - (1-h)^{\frac{1}{p}} \sum_{j=0}^n a_j^s |x_{ij}| \leq y_i \leq \sum_{j=0}^n a_j^c x_{ij} + (1-h)^{\frac{1}{p}} \sum_{j=0}^n a_j^s |x_{ij}| \quad (7)$$

Tanaka 等^[8]提出模糊线性回归模型的系统模糊性,记为 Δ .

$$\Delta = \sum_{i=1}^m \Delta \tilde{y}_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n a_j^s |x_{ij}| \quad (8)$$

式中, $\Delta \tilde{y}_i$ 是 $\hat{y}_i$ 的模糊性,即

$$\Delta \tilde{y}_i = f^s(x_i) \quad (9)$$

因此,当 p 给定时,可以根据下面的线性规划模型求解对称模糊系数 $\tilde{A}_j$,即

$$\begin{cases} \min \Delta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n a_j^s |x_{ij}| \\ \text{s. t.} \\ (1-h)^{\frac{1}{p}} \sum_{j=0}^n a_j^s |x_{ij}| - \sum_{j=0}^n a_j^c x_{ij} \geq -y_i, \\ i = 1, 2, \dots, m \\ (1-h)^{\frac{1}{p}} \sum_{j=0}^n a_j^s |x_{ij}| + \sum_{j=0}^n a_j^c x_{ij} \geq y_i \\ a_j^s \geq 0, j = 0, 1, \dots, n \end{cases} \quad (10)$$

1.2 模糊线性回归模型的可靠性

在模糊线性回归模型中,当给定 p 值时,参数 h 决定着模糊系数的可能性分布.根据 Liu 等^[13]提出的系统可靠性,考虑系统模糊性和系统隶属度这 2 个因素,假定 h_1 和 h_2 是区间 $[0, 1)$ 上的 2 个不同的值, $\tilde{A}_j^1$ 和 $\tilde{A}_j^2$ 是分别对应于 h_1 和 h_2 的对称模糊系数, $\hat{y}_i^1$ 和 $\hat{y}_i^2$ 是式(1)中 y_i 的模糊估计值.由式(1)可计算 $\hat{y}_i^1$ 和 $\hat{y}_i^2$.

$$\hat{y}_i^1 = \sum_{j=0}^n \tilde{A}_j^1 x_{ij} \quad (11)$$

$$\hat{y}_i^2 = \sum_{j=0}^n \tilde{A}_j^2 x_{ij} \quad (12)$$

当原始数据集相同时,需比较 $\hat{y}_i^1$ 和 $\hat{y}_i^2$,哪个是对 y_i 更好的估计.一般情况下,模糊性 $\Delta \tilde{y}_i$ 越小,隶属度 $\hat{y}_i(y_i)$ 越大,则对应 y_i 的模糊估计值 $\hat{y}_i$ 效果越好.将 y_i 对应的模糊估计值 $\hat{y}_i$ 的可靠性记为 z_i .

$$z_i = \frac{\hat{y}_i(y_i)}{\Delta \tilde{y}_i} \quad (13)$$

由式(13)可得式(1)中所有数据集的系统可靠性,记为 z .

$$z = \sum_{i=1}^m z_i = \sum_{i=1}^m \frac{\hat{y}_i(y_i)}{\Delta \tilde{y}_i} \quad (14)$$

z 越大,表明得到的模糊线性回归模型效果越好.

1.3 对称模糊系数的最优 h 值

在给定样本数据对情况下,对具有对称模糊系数的模糊线性回归模型,考虑模型的系统模糊性最小和系统可靠性最大两项准则,为回归模型选择最优 h 值.选择最优 h 值的具体步骤如下:

假定 h_1 和 h_2 是区间 $[0, 1)$ 上的 2 个不同的值,由式(10)得, h_1 的最优解、最优模糊性和最优目标函数值分别为: $\tilde{A}_j^{h_1*} = (\hat{a}_j^c, (\hat{a}_j^s)^{h_1*})_L$, $\Delta \tilde{y}_i^{h_1*}$ 和 Δ^{h_1*} , 其中, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$. h_2 的最优解、最优模糊性和最优目标函数值分别为

$$\tilde{A}_j^{h_2*} = \left(\hat{a}_j^c, \left(\frac{1-h_1}{1-h_2} \right)^{\frac{1}{p}} (\hat{a}_j^s)^{h_1*} \right)_L, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (15)$$

$$\Delta \tilde{y}_i^{h_2*} = \left(\frac{1-h_1}{1-h_2} \right)^{\frac{1}{p}} \Delta \tilde{y}_i^{h_1*}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (16)$$

$$\Delta^{h_2*} = \left(\frac{1-h_1}{1-h_2} \right)^{\frac{1}{p}} \Delta^{h_1*} \quad (17)$$

由式(15)~(17)可知, h 由 h_1 变到 h_2 , 模糊系数 $\tilde{A}_j$ 的中心值 $\hat{a}_j^c$ 保持不变,而 $\tilde{A}_j$ 的展形值 $\hat{a}_j^s$, 最优模糊性 $\Delta \tilde{y}_i^{h_2*}$ 和最优目标函数值 Δ^{h_2*} 均增大 $[(1-h_1)/(1-h_2)]^{\frac{1}{p}}$ 倍.

对于 h_1 , y_i 的最优模糊输出结果,记为 $\hat{y}_i^{h_1*} = (\hat{y}_i^c, (\hat{y}_i^s)^{h_1*})_L$, 当 $y_i \in [\hat{y}_i^c - (\hat{y}_i^s)^{h_1*}, \hat{y}_i^c + (\hat{y}_i^s)^{h_1*}]$, 对应的隶属度为

$$(\hat{y}_i(y_i))^{h_1*} = 1 - \left[\frac{|\hat{y}_i^c - y_i|}{(\hat{y}_i^s)^{h_1*}} \right]^p,$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad (18)$$

若定义

$$q_i^{h_1} = \frac{|\hat{y}_i^c - y_i|}{(\hat{y}_i^s)^{h_1^*}} = \frac{\left| \sum_{j=0}^n \hat{a}_j^c x_{ij} - y_i \right|}{\sum_{j=0}^n (\hat{a}_j^s)^{h_1^*} |x_{ij}|}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (19)$$

则式(18)可以写成

$$(\hat{y}_i(y_i))^{h_1^*} = 1 - (q_i^{h_1})^p, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (20)$$

由式(9), (13), (20), 预测模糊估计结果 $\hat{y}_i^{h_1^*}$ 的可靠性 $z_i^{h_1}$ 可表示为

$$z_i^{h_1} = \frac{(\hat{y}_i(y_i))^{h_1^*}}{\Delta \hat{y}_i^{h_1^*}} = \frac{1 - (q_i^{h_1})^p}{\sum_{j=0}^n (\hat{a}_j^s)^{h_1^*} |x_{ij}|}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (21)$$

因此, 式(1)中对于 h_1 的模糊线性回归模型的系统可靠性 z^{h_1} 为

$$z^{h_1} = \sum_{i=1}^m z_i^{h_1} = \sum_{i=1}^m \frac{1 - (q_i^{h_1})^p}{\sum_{j=0}^n (\hat{a}_j^s)^{h_1^*} |x_{ij}|} \quad (22)$$

对于 h_2 , 由式(15)~(17), (19)可得

$$q_i^{h_2} = \frac{|\hat{y}_i^c - y_i|}{(\hat{y}_i^s)^{h_2^*}} = \frac{|\hat{y}_i^c - y_i|}{\left(\frac{1-h_1}{1-h_2}\right)^{\frac{1}{p}} (\hat{y}_i^s)^{h_1^*}} = \left(\frac{1-h_2}{1-h_1}\right)^{\frac{1}{p}} q_i^{h_1}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (23)$$

由式(20)和式(23), h_2 的隶属度 $(\hat{y}_i(y_i))^{h_2^*}$ 为

$$\begin{aligned} (\hat{y}_i(y_i))^{h_2^*} &= 1 - (q_i^{h_2})^p = 1 - \left[\left(\frac{1-h_2}{1-h_1}\right)^{\frac{1}{p}} q_i^{h_1}\right]^p = 1 - \frac{1-h_2}{1-h_1} (q_i^{h_1})^p = \\ &= 1 - (q_i^{h_1})^p + \frac{h_2-h_1}{1-h_1} (q_i^{h_1})^p = \\ &= (\hat{y}_i(y_i))^{h_1^*} + \frac{h_2-h_1}{1-h_1} (q_i^{h_1})^p \end{aligned} \quad (24)$$

因此, 根据式(13), (16), (24), h_2 的预测模糊估计结果 $\hat{y}_i^{h_2^*}$ 的可靠性 $z_i^{h_2}$ 为

$$\begin{aligned} z_i^{h_2} &= \frac{(\hat{y}_i(y_i))^{h_2^*}}{\Delta \hat{y}_i^{h_2^*}} = \\ &= \frac{(\hat{y}_i(y_i))^{h_1^*} + \frac{h_2-h_1}{1-h_1} (q_i^{h_1})^p}{\left(\frac{1-h_1}{1-h_2}\right)^{\frac{1}{p}} \Delta \hat{y}_i^{h_1^*}} = \left(\frac{1-h_2}{1-h_1}\right)^{\frac{1}{p}} z_i^{h_1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{h_2-h_1}{1-h_1} \left(\frac{1-h_2}{1-h_1}\right)^{\frac{1}{p}} w_i^{h_1}, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ w_i^{h_1} &= \frac{(q_i^{h_1})^p}{\Delta \hat{y}_i^{h_1^*}} \end{aligned} \quad (26)$$

当 $y_i \in [\hat{y}_i^c - (\hat{y}_i^s)^{h_1^*}, \hat{y}_i^c + (\hat{y}_i^s)^{h_1^*}]$, 对于 h_2 在式(1)中的系统可靠性为

$$\begin{aligned} z^{h_2} &= \sum_{i=1}^m z_i^{h_2} = \left(\frac{1-h_2}{1-h_1}\right)^{\frac{1}{p}} z^{h_1} + \\ &\frac{h_2-h_1}{1-h_1} \left(\frac{1-h_2}{1-h_1}\right)^{\frac{1}{p}} w^{h_1} \end{aligned} \quad (27)$$

$$w^{h_1} = \sum_{i=1}^m w_i^{h_1} \quad (28)$$

若设 $h_1 = 0, h_2 = h$, 则式(15)~(17), (23)~(25), (27)整理为

$$\begin{aligned} \tilde{A}_j^{h^*} &= (\hat{a}_j^c, \left(\frac{1}{1-h}\right)^{\frac{1}{p}} (\hat{a}_j^s)^{0^*})_L, \\ j &= 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \Delta \hat{y}_i^{h^*} &= \left(\frac{1}{1-h}\right)^{\frac{1}{p}} \Delta \hat{y}_i^{0^*}, \\ i &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (30)$$

$$\Delta^{h^*} = \left(\frac{1}{1-h}\right)^{\frac{1}{p}} \Delta^{0^*} \quad (31)$$

$$q_i^h = (1-h)^{\frac{1}{p}} q_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (32)$$

$$\begin{aligned} (\hat{y}_i(y_i))^{h^*} &= (\hat{y}_i(y_i))^{0^*} + h (q_i^0)^p, \\ i &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} z_i^h &= (1-h)^{\frac{1}{p}} z_i^0 + h (1-h)^{\frac{1}{p}} w_i^0, \\ i &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (34)$$

$$z^h = (1-h)^{\frac{1}{p}} z^0 + h (1-h)^{\frac{1}{p}} w^0 \quad (35)$$

在式(1)中, 基于系统可靠性最大的准则, 为了推导出求解最优 h 值的公式, 需对式(35)关于 h 求导.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z^h}{\partial h} &= -\frac{z^0}{p} (1-h)^{\frac{1}{p}-1} + (1-h)^{\frac{1}{p}} w^0 - \\ &\frac{w^0}{p} h (1-h)^{\frac{1}{p}-1} = (1-h)^{\frac{1}{p}-1} \cdot \\ &\left[w^0 (1-h) - \frac{z^0}{p} - \frac{w^0}{p} h \right] \end{aligned} \quad (36)$$

令 $\frac{\partial z^h}{\partial h} = 0$, 得到关于 h 的驻点

$$h^* = \frac{p w^0 - z^0}{p w^0 + w^0} \quad (37)$$

其中, $z^0 \geq 0, w^0 \geq 0$. 若 $p w^0 \geq z^0$ 成立, 则 $0 \leq h^* < 1$. 一般情况下, 很难保证 $h^* \geq 0$, 当 $p w^0 < z^0$ 时, $h^* < 0$, 此时, 式(36)关于 h 继续求导, 得到

$$\frac{\partial^2 z^h}{\partial h^2} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)(1-h)^{\frac{1}{p}-2} \cdot \left[w^0(1-h) - \frac{z^0}{p} - \frac{w^0}{p}h\right] - (1-h)^{\frac{1}{p}-1} \left(w^0 + \frac{w^0}{p}\right) \quad (38)$$

根据式(36)~(38),可以推导出

$$\frac{\partial^2 z^h}{\partial h^2} \Big|_{h=h^*} = - \left(1 - \frac{pw^0 - z^0}{pw^0 + w^0}\right)^{\frac{1}{p}-1} \cdot \left(w^0 + \frac{w^0}{p}\right) = - \left(w^0 + \frac{w^0}{p}\right) \cdot \left(\frac{w^0 + z^0}{pw^0 + w^0}\right)^{\frac{1}{p}-1} < 0 \quad (39)$$

依据式(39)和极值条件可以得出 h^* 是式(35)的最大值点。

根据上述分析可以得出:在 $p > 0$ 的条件下,式(35)的最优解为

$$h^* = \begin{cases} \frac{pw^0 - z^0}{pw^0 + w^0}, & \text{若 } pw^0 \geq z^0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (40)$$

其系统可靠性

$$z^{h^*} = \begin{cases} \left(\frac{w^0 + z^0}{pw^0 + w^0}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{pw^0 + pz^0}{p+1}, & \text{若 } pw^0 \geq z^0 \\ z^0, & \text{其他} \end{cases} \quad (41)$$

2 实例分析

将理论应用于质量功能展开的案例,讨论在不同 p 值下,依据系统可靠性最大的准则,获得顾客需求(CR_s)和工程特性(EC_s)最优的函数关系。

2.1 相关说明

表1显示包装机的相关数据,其中, $CR_1 - CR_4$ 分别表示“提高炸药包装的质量”、“提高炸药包装的效率”、“减少包装的噪音”和“增加机器的硬度”; $EC_1 - EC_7$ 分别表示“提高模型修剪的精度”、“提高炸药包装的精密”、“增加炸药包装的控制力”、“增加炸药包装的效率”、“增加压锤的硬度”、“减少凸轮电力传输的噪音”和“减少机器床的高度”; Pro_c 表示第 c 种产品, $c = 1, 2, 3, 4, 5$; $CR_1, CR_2, \dots, CR_7$ 的单位分别为 $m^{-2}, m^{-2}, N, ns^{-1}, HRC, dB, m$ 。

表1 包装机的相关数据

Tab.1 Corresponding datas of the packing machine

变量	EC_1	EC_2	EC_3	EC_4	EC_5	EC_6	EC_7	Pro_1	Pro_2	Pro_3	Pro_4	Pro_5	Min	Max
CR_1	•	•	•					3.1	4.0	2.5	3.3	2.0	1	5
CR_2			•	•	•			3.1	3.0	1.8	2.9	3.9	1	5
CR_3						•		2.2	3.7	4.3	1.8	3.5	1	5
CR_4							•	1.6	3.7	3.3	3.7	4.0	1	5
Pro_1	11	7	58	90	55	75	1.9							
Pro_2	8	6	65	85	50	68	1.7							
Pro_3	12	9	60	70	50	55	1.8							
Pro_4	9	8	62	80	45	80	1.7							
Pro_5	10	10	65	75	55	70	1.6							
Min	6	4	55	60	40	50	1.5							
Max	15	12	70	100	60	90	2							

注: • 表示两者之间的关系显著。

2.2 识别函数关系

如表2所示,当 $h = 0$ 时,利用 Lingo 软件求解式(10)中的线性规划,得到模糊系数 $\tilde{A}_{kj}^0 = (\hat{a}_{kj}^c, (\hat{a}_{kj}^s)^0)_L, k = 1, 2, 3, 4, j = 0, 1, \dots, 7$ 。如表3所示,当 $p = 1$ 时,由式(9), (13), (20), (21)得到4个函数关系 f_1, f_2, f_3 和 f_4 的模糊性 $\Delta \hat{y}_{ik}^{0*}$, 隶属度 $(\hat{y}_{ik}(y_{ik}))^{0*}$, 可靠性 $z_{ik}^0, k = 1, 2, 3, 4$ 。 z_{ik}^0 表示 $h = 0$ 时, $\hat{y}_{ik}$ 预测 y_{ik} 的可靠性。

根据式(40)和式(41)以及表3,将上述4个模糊函数关系的最优 h 值,记为 $h_k^* (k = 1, 2, 3, 4)$,有

$$(h_1^*, h_2^*, h_3^*, h_4^*) = (0.5, 0.5, 0.4103, 0.5) \quad (42)$$

其系统可靠性

$$(z^{h_1^*}, z^{h_2^*}, z^{h_3^*}, z^{h_4^*}) = (9.8842, 5.6518, 3230, 4.6422) \quad (43)$$

因此,由表2和式(15)可得,当 $h = h_k^*$ 时,关于4个函数关系的最优模糊系数如表4所示。

表2 顾客需求(CR_s)和工程特性(EC_s)之间的函数关系($h=0$)Tab.2 Functional relationships between the customer requirements (CR_s) and the engineering characteristics (EC_s) ($h=0$)

系数	y_1	y_2	y_3	y_4
X_0	$(0.321\ 9, 0.000\ 0)_L$			$(0.000\ 0, 0.231\ 4)_L$
X_1	$(1.744\ 4, 0.000\ 0)_L$		$(0.000\ 0, 0.158\ 7)_L$	$(1.472\ 7, 0.000\ 0)_L$
X_2	$(3.074\ 8, 0.000\ 0)_L$			
X_3		$(0.000\ 0, 0.275\ 2)_L$	$(1.620\ 7, 0.000\ 0)_L$	
X_4		$(1.996\ 6, 0.000\ 0)_L$		
X_5		$(1.335\ 2, 0.000\ 0)_L$	$(0.556\ 5, 0.000\ 0)_L$	
X_6	$(0.354\ 3, 0.000\ 0)_L$	$(0.000\ 0, 0.224\ 5)_L$	$(4.021\ 9, 0.000\ 0)_L$	$(1.301\ 0, 0.000\ 0)_L$
X_7	$(0.000\ 0, 0.305\ 7)_L$	$(2.304\ 0, 0.000\ 0)_L$		$(3.519\ 8, 0.074\ 5)_L$

表3 f_1, f_2, f_3 和 f_4 的对应结果($h=0, p=1$)Tab.3 Corresponding results of f_1, f_2, f_3 and f_4 ($h=0, p=1$)

c	f_1				f_2			
	$\Delta \hat{y}_{i1}^{0*}$	w_{i1}^0	$(\hat{y}_{i1}(y_{i1}))^{0*}$	z_{i1}^0	$\Delta \hat{y}_{i2}^{0*}$	w_{i2}^0	$(\hat{y}_{i2}(y_{i2}))^{0*}$	z_{i2}^0
1	0.061 1	16.366 6	0	0	0.140 4	7.122 5	0	0
2	0.183 4	5.452 6	0	0	0.307 9	3.247 8	0	0
3	0.122 3	8.176 6	0	0	0.288 4	3.467 4	0	0
4	0.183 4	5.452 6	0	0	0.185 5	5.390 8	0	0
5	0.244 6	4.088 3	0	0	0.296 6	3.371 5	0	0

c	f_3				f_4			
	$\Delta \hat{y}_{i3}^{0*}$	w_{i3}^0	$(\hat{y}_{i3}(y_{i3}))^{0*}$	z_{i3}^0	$\Delta \hat{y}_{i4}^{0*}$	w_{i4}^0	$(\hat{y}_{i4}(y_{i4}))^{0*}$	z_{i4}^0
1	0.069 8	14.326 6	0	0	0.246 3	4.060 1	0	0
2	0.123 8	8.077 5	0	0	0.276 1	3.621 9	0	0
3	0.052 4	19.084 0	0	0	0.261 2	3.828 5	0	0
4	0.106 3	9.407 3	0	0	0.276 1	3.621 9	0	0
5	0.088 9	1.796 4	0.840 3	9.452 2	0.291 0	3.436 4	0	0

表4 顾客需求(CR_s)和工程特性(EC_s)之间的函数关系($h=h_k^*, p=1$)Tab.4 Functional relationships between the customer requirements (CR_s) and the engineering characteristics (EC_s) ($h=h_k^*, p=1$)

系数	y_1	y_2	y_3	y_4
X_0	$(0.321\ 9, 0.000\ 0)_L$			$(0.000\ 0, 0.462\ 8)_L$
X_1	$(1.744\ 4, 0.000\ 0)_L$		$(0.000\ 0, 0.269\ 1)_L$	$(1.472\ 7, 0.000\ 0)_L$
X_2	$(3.074\ 8, 0.000\ 0)_L$			
X_3		$(0.000\ 0, 0.550\ 4)_L$	$(1.620\ 7, 0.000\ 0)_L$	
X_4		$(1.996\ 6, 0.000\ 0)_L$		
X_5		$(1.335\ 2, 0.000\ 0)_L$	$(0.5565, 0.0000)_L$	
X_6	$(0.354\ 3, 0.000\ 0)_L$	$(0.000\ 0, 0.449\ 0)_L$	$(4.021\ 9, 0.000\ 0)_L$	$(1.301\ 0, 0.000\ 0)_L$
X_7	$(0.000\ 0, 0.611\ 4)_L$	$(2.304\ 0, 0.000\ 0)_L$		$(3.519\ 8, 0.149\ 0)_L$

2.3 h 值变化的相关分析

令 $p=1$, 当 h 从 0 变化到 1 时, 讨论模糊线性回归结果 $\hat{y}_{ik}^h$ 的模糊性 $\Delta \hat{y}_{ik}^h$, 隶属度 $(\hat{y}_{ik}(y_{ik}))^h$ 、可靠性 z_{ik}^h 和系统可靠性的变化规律. 图 2~5(见下

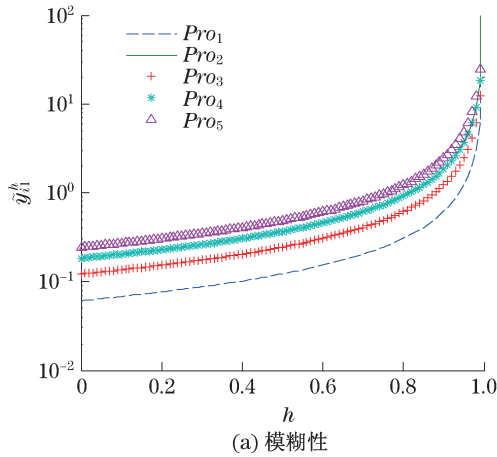
页)为函数 f_1^h, f_2^h, f_3^h 和 f_4^h 的参数变化.

图 2(a)~(c)显示函数 f_1^h, f_2^h, f_3^h 和 f_4^h 的模糊性 $\Delta \hat{y}_{ik}^h$, 隶属度 $(\hat{y}_{ik}(y_{ik}))^h$, 可靠性 z_{ik}^h 的变化趋势. 图 2(a)中的纵坐标为对数刻度, 以便观察模

糊性细微的变化. 由表3和式(16)可得, $\Delta \hat{y}_{ik}^h$ 是 h 的严格递增的非线性函数, 即

$$\Delta \hat{y}_{i1}^h = (\hat{y}_{i1}^s)^h = \frac{1}{1-h} \Delta \hat{y}_{i1}^0 \quad (44)$$

由表3可知, $(\hat{y}_{i1}(y_{i1}))^0 = 0, i=1,2,3,4,5$, 即



$$\left| \sum_{j=0}^n \hat{a}_{j1}^s x_{1j} - y_{i1} \right| = \sum_{j=0}^n (\hat{a}_{1j}^s)^0 |x_{ij}| \quad (45)$$

因此, 当 $p=1$, 对于给定的 h 值, 结合式(16), (19), (20)和(45), 推出 $\hat{y}_{i1}(y_{i1})$ 是 h 的线性函数, 即

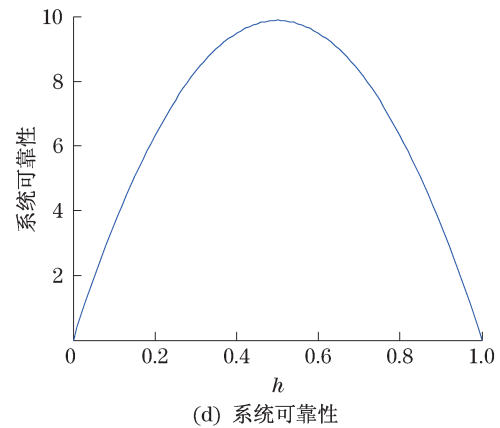
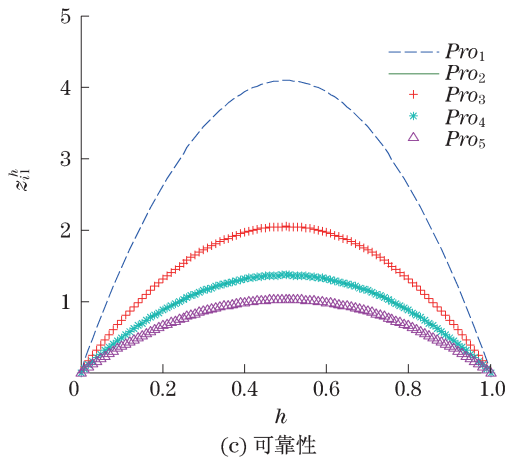
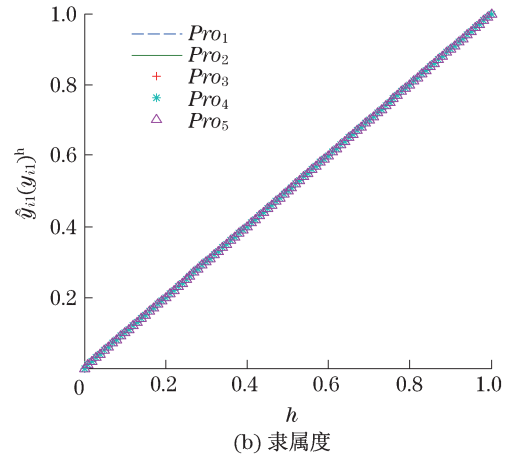


图2 f_1^h 的参数随 h 的变化图像

Fig.2 Parameter changing of f_1^h with respect to the h value

$$\begin{aligned} (\hat{y}_{i1}(y_{i1}))^h &= 1 - \frac{\left| \sum_{j=0}^n \hat{a}_{j1}^s x_{1j} - y_{i1} \right|}{\sum_{j=0}^n (\hat{a}_{1j}^s)^h |x_{ij}|} = \\ &= 1 - \frac{\left| \sum_{j=0}^n \hat{a}_{j1}^s x_{1j} - y_{i1} \right|}{\frac{1}{1-h} \sum_{j=0}^n (\hat{a}_{1j}^s)^0 |x_{ij}|} \end{aligned} \quad (46)$$

由式(13), (16)和(46)得, 这5种产品的可靠性 $z_{i1}^h (i=1,2,3,4,5)$ 为

$$z_{i1}^h = \frac{\hat{y}_{i1}(y_{i1})}{\Delta \hat{y}_{i1}} = \frac{h}{\frac{\Delta \hat{y}_{i1}^0}{1-h}} = \frac{h(1-h)}{\Delta \hat{y}_{i1}^0} \quad (47)$$

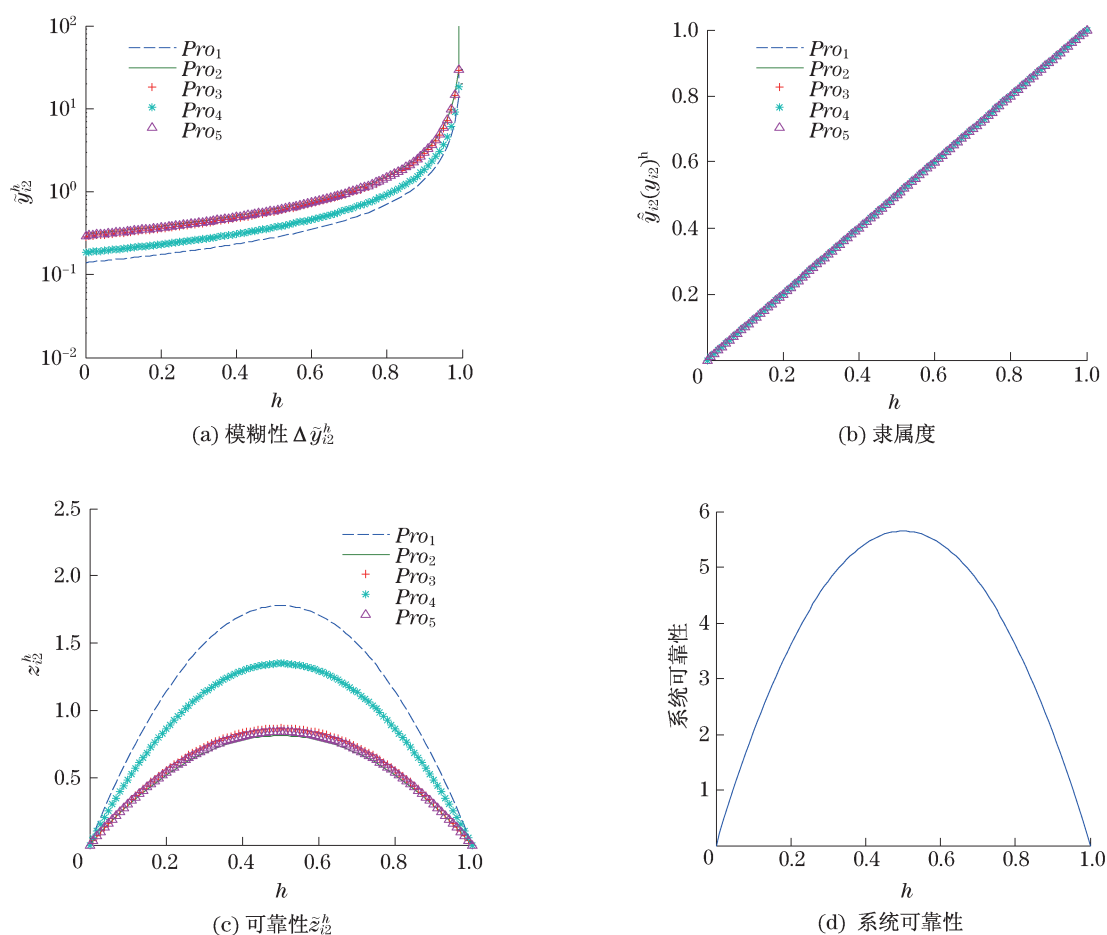
从而如图2(d)所示, 得到模糊函数关系 f_1^h 的系统可靠性随 h 的变化规律. 系统可靠性先严格递

增, 后严格递减, 在 $h = h_1^* = 0.5$ 时, 得到最大系统可靠性

$$\begin{aligned} z_{11}^{h_1^*} &= z_{11}^{0.5} = \sum_{i=1}^5 z_{i1}^{0.5} = \\ &= \sum_{i=1}^5 \frac{0.5 - 0.5^2}{\Delta \hat{y}_{i1}^0} = 9.8842 \end{aligned} \quad (48)$$

在函数关系 f_2^h 中, $\hat{y}_2$ 是 X_4, X_5, X_7 的函数.

由表2可知, 第3个系数 $\tilde{A}_{23}^0$ 和第6个系数 $\tilde{A}_{26}^0$ 是模糊系数, 其他的系数都是清晰值. 图3(a)表明, 模糊性 $\Delta \hat{y}_{i2}^h (i=1,2,3,4,5)$ 随着 h 值的增加而增大, 当 h 值接近于1时, 模糊性将收敛于1, 且 Pro_2 的模糊性最大, Pro_1 的模糊性最小. 图3(b)显示, 5种产品 y_{i2} 的隶属度和 f_1^h 的类似, 即 $(\hat{y}_{i2}(y_{i2}))^h =$

图3 f_2^h 的参数随 h 的变化图像Fig.3 Parameter changing of f_2^h with respect to the h value

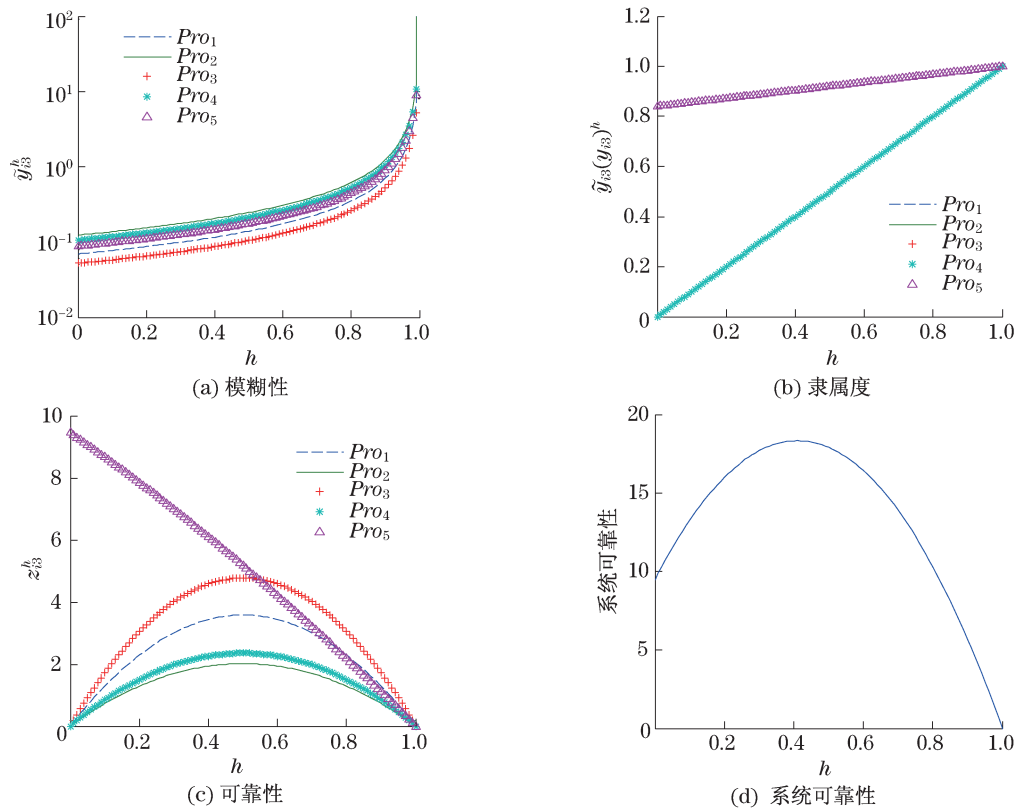
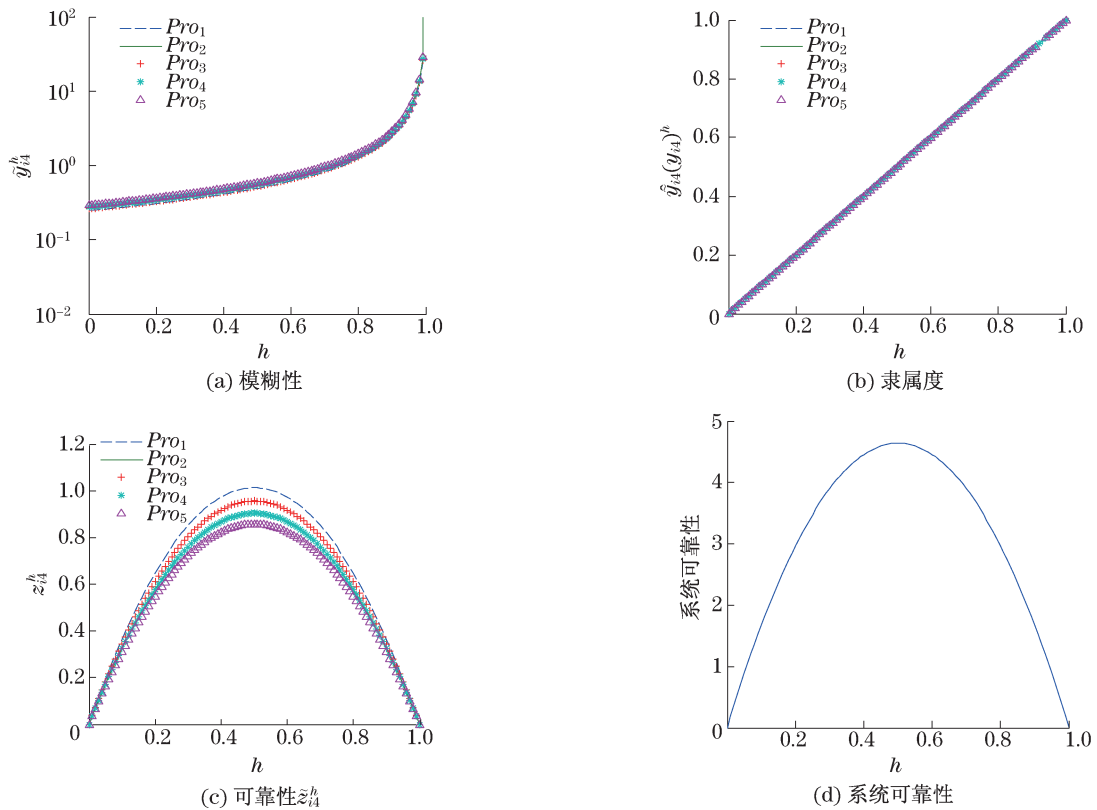
$h (i=1,2,3,4,5)$. 图 3(c) 表示 5 种产品的可靠性, 其中, 第 2 种产品的可靠性最小, 第 1 种产品的可靠性最大, 验证了模糊性越大, 可靠性越小的事实. 函数关系 f_2^h 的系统可靠性如图 3(d) 所示, 其形状类似于 f_1^h 的系统可靠性, 呈开口向下的抛物线. 当 $h = h_2^* = 0.5$ 时, 系统可靠性最大, 是 5.65.

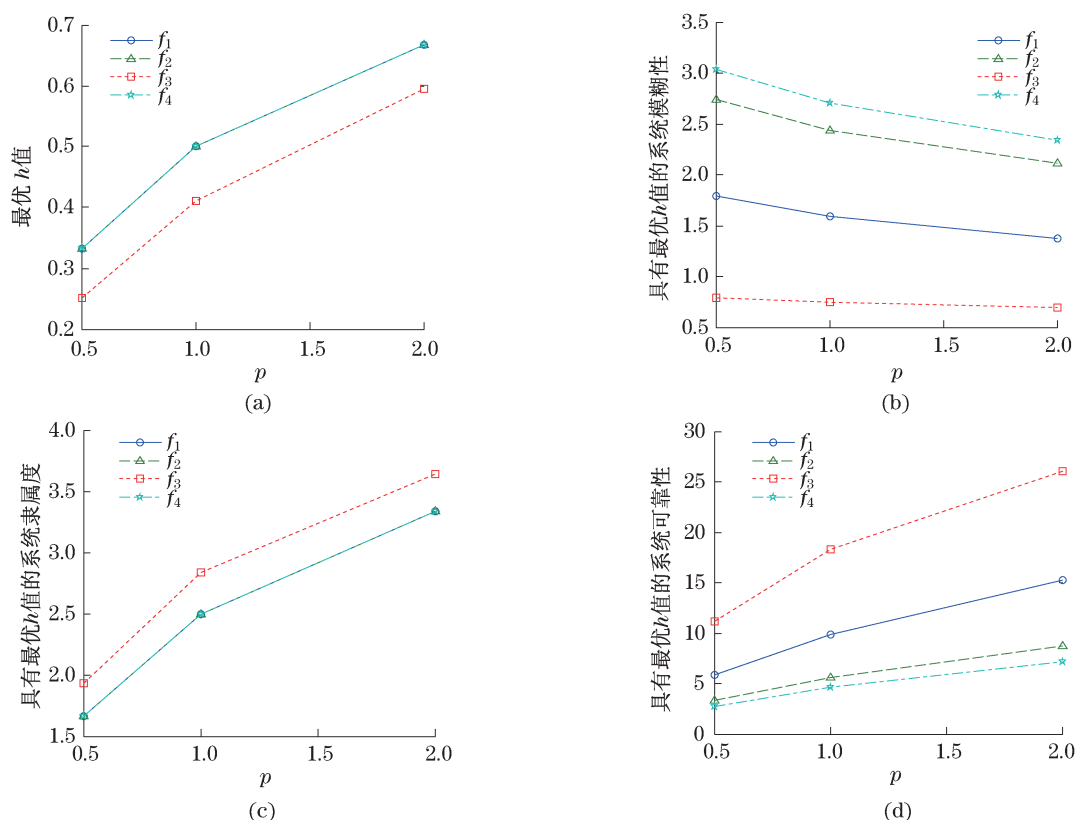
图 4(b) 表明, 函数关系 f_3^h 明显不同于 f_1^h 和 f_2^h 的是隶属函数. 由表 3 可知, $(\hat{y}_{i3}(y_{i3}))^0$ 是 0.840 3, 跟之前的不同. 如图 4(c) 所示, 在 h 从 0 变化到 1 的过程中, $(\hat{y}_{i3}(y_{i3}))^h$ 的图像一直位于其他隶属度的上方, 是所有产品中隶属度最大的, 但它的可靠性 z_3^h 并非一直都是最大的. 而是关于 h 的严格递减函数, 故隶属度与可靠性没有直接的相关关系. f_3^h 的系统可靠性呈抛物线型, 最优 h 值变成 $h_3^* = 0.410 3$, 不再是 0.500 0, 此时的最大系统可靠性是 18.323 0.

函数关系 f_4^h 类似于 f_1^h 和 f_2^h . 由表 3 可知, f_4^h

中对应于不同产品时的模糊性 $\Delta \hat{y}_{i4}^0 (i=1,2,3,4,5)$, 相差很小, 但还是有细小差别, 如图 5(a) 所示. 图 5(b) 表明, f_4^h 中不同产品的隶属度跟前 2 个函数关系的隶属度一样, 是随 h 值严格递增的线性函数, 即 $(\hat{y}_{i1}(y_{i1}))^h = (\hat{y}_{i2}(y_{i2}))^h = (\hat{y}_{i3}(y_{i3}))^h = h (i=1,2,3,4,5)$. 图 5(c) 表明, f_4^h 的可靠性是开口向下的抛物线, 当 h 趋于 1 时, 可靠性趋于 0. 由图 5(d) 可知, 当 $h_4^* = 0.500 0$ 时, f_4^h 的系统可靠性最大, 是 4.642 2.

除了对函数关系 f_1^h, f_2^h, f_3^h 和 f_4^h 相关参数分析外, 在 p 值给定的条件下, 还可以得出以下结论: 当 h 从 0 变化到 1 的过程中, $\Delta \hat{y}_{ik}^h (i=1,2,3,4,5, k=1,2,3,4)$ 的模糊性是 h 的严格递增的非线性函数, 且增加得越来越快. 当 h 趋于 1 时, $\Delta \hat{y}_{ik}^h$ 的模糊性趋于 1. 其次, 隶属度 $(\hat{y}_{ik}(y_{ik}))^h$ 是 h 的严格递增的线性函数. 根据不同的清晰输入值, 得到的模糊线性回归模型的模糊性 $\Delta \hat{y}_{ik}^h$ 或隶属度

图4 f_3^h 的参数随 h 的变化图像Fig.4 Parameter changing of f_3^h with respect to the h value图5 f_4^h 的参数随 h 的变化图像Fig.5 Parameter changing of f_4^h with respect to the h value

图6 不同 p 值时参数的变化Fig.6 Parameter changing with different p values

$(\hat{y}_{ik}(y_{ik}))^h$ 可能是不同的.可靠性 z_{ik}^h 不是 h 的单调函数,而是随 h 先严格递增或递减,然后严格递减至0.同时,模糊性越大,对应的可靠性越小.系统的可靠性 $z_k^h(k=1,2,3,4)$ 是样本个体的各个可靠性 z_{ik}^h 之和,函数关系 f_1^h, f_2^h, f_3^h 和 f_4^h 达到各自最大系统可靠性时的最优 h 值不完全相同.

2.4 对比分析

为了分析不同 p 值下对应的模糊线性回归模型的效果,分别对 $p=0.5, p=1$ 和 $p=2$ 的情况进行研究.图6(a)~(d)显示,当样本数据对相同时,不同 p 值下, f_1^h, f_2^h, f_3^h 和 f_4^h 的最优 h 值、系统模糊性、系统隶属度和系统可靠性的变化规律.

图6(a)表明, f_1^h, f_2^h, f_3^h 和 f_4^h 的最优 h 值随 p 值的增加而增大, f_1^h, f_2^h 和 f_4^h 的最优 h 值相同, f_3^h 的最优 h 值例外.如图6(b)所示, f_1^h, f_2^h, f_3^h 和 f_4^h 最优 h 值的系统模糊性是样本数据中个体模糊性之和,随着 p 值的增加而减小.在相同 p 值下, f_3^h 对应于最优 h 值的系统模糊性最小.图6(c)表明, f_1^h, f_2^h, f_3^h 和 f_4^h 最优 h 值的系统隶属度随 p 值的增加而增加,其变化趋势刚好与系统模糊性相反.在相同 p 值下, f_3^h 对应的最优 h 值的系统隶属

度最大. f_1^h, f_2^h, f_3^h 和 f_4^h 最优 h 值的系统可靠性是样本数据中个体的可靠性之和,并随 p 值的增加而增加,其变化趋势与系统隶属度相同.当 $p=2$,即含有抛物型模糊数的模糊线性回归模型时, f_1^h, f_2^h, f_3^h 和 f_4^h 对应于最优 h 值的系统可靠性最大,如图6(d)所示,分别是15.217 7, 8.698 7, 26.028 6, 7.147 1,比 $p=1$ 时各自的系统可靠性提高了54.0%, 54.0%, 42.1%和54.0%.

对称模糊数情况下的最优 h 值随 p 值的增加而增大,与系统隶属度和系统可靠性的变化趋势一致,与系统模糊性的变化趋势相反.当样本数据对一定的情况下, $p=2$ 时得到的 f_1^h, f_2^h, f_3^h 和 f_4^h 的系统可靠性最大,得到的模糊线性回归模型效果最好.

3 结论

通过分析对称模糊数的线性回归模型,当隶属函数含有参数 p 时,考虑系统模糊性和系统隶属度两个因素,根据系统可靠性最大的准则,推导选择最优 h 值的方法.将其理论应用到QFD的实例中,判断顾客需求与工程特性之间的函数关系,同时讨论

不同 p 值下相关参数的变化规律. 当 $p = 2$ 时, 即含有抛物型模糊数的模糊线性回归模型的系统可靠性最大, 此时得到的模型更合理, 有助于管理者作出正确高效的决策.

参考文献:

- [1] AKAO Y. Quality function deployment: integrating customer requirements into product design [M]. Cambridge, MA: Productivity Press, 1990.
- [2] FUNG R Y K, REN S J, XIE J X. The prioritisation of attributes in customer requirement management[C]// Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics. Beijing: IEEE, 1996, 2: 953 - 958.
- [3] BARNETT W D, RAJA M K. Application of QFD to the software development process [J]. International Journal of Quality & Reliability Management, 1995, 12 (6): 24 - 42.
- [4] ONUT S, TOSUN S. An integrated methodology for supplier selection under the presence of vagueness: a case in banking sector, Turkey[J]. Journal of Applied Mathematics, 2014, 8(10): 1 - 14.
- [5] CHEN C C, ZHANG Q. Applying quality function deployment techniques in lead production project selection and assignment [J]. Advanced Materials Research, 2014, 945: 2954 - 2959.
- [6] 靳忠伟, 叶舟, 陈康民, 等. α -加权模糊线性回归模型及其在电力需求预测中的应用[J]. 上海理工大学学报, 2005, 27(4): 319 - 322.
- [7] CELIK M, CEBI S, KAHRAMAN C, et al. An integrated fuzzy QFD model proposal on routing of shipping investment decisions in crude oil tanker market[J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36 (3): 6227 - 6235.
- [8] TANAKA H, UEJIMA S, ASAI K. Linear regression analysis with fuzzy model[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1982, 12 (6): 903 - 907.
- [9] ZADEH L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning- II [J]. Information Sciences, 1975, 8(4): 301 - 357.
- [10] KIM K J, MOSKOWITZ H, DHINGRA A, et al. Fuzzy multicriteria models for quality function deployment [J]. European Journal of Operational Research, 2000, 121(3): 504 - 518.
- [11] MOSKOWITZ H, KIM K. On assessing the h value in fuzzy linear regression[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1993, 58(3): 303 - 327.
- [12] KIM K J, MOSKOWITZ H, KOKSALAN M. Fuzzy versus statistical linear regression [J]. European Journal of Operational Research, 1996, 92 (2): 417 - 434.
- [13] LIU X L, CHEN Y Z. A systematic approach to optimizing h value for fuzzy linear regression with symmetric triangular fuzzy numbers[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2013, 9(6): 1 - 9.
- [14] LIU Y Y, CHEN Y Z, ZHOU J, et al. Fuzzy linear regression models for QFD using optimized h values [J]. Engineering Applications Artificial Intelligence, 2015, 39: 45 - 54.
- [15] CHEN F N, CHEN Y Z, ZHOU J, et al. Optimizing h value for fuzzy linear regression with asymmetric triangular fuzzy coefficients [J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2016, 47: 16 - 24.
- [16] 任丽丽, 陆秋君. 基于模糊线性回归的电子商务交易额预测[J]. 统计与决策, 2013(3): 31 - 34.

(编辑: 石 瑛)