

基于龙格库塔法解析双液体变焦透镜的初始特性

汤征洋, 彭润玲, 陈家璧, 庄松林

(上海理工大学 光电信息与计算机工程学院, 上海 200093)

摘要: 双液体变焦透镜受电润湿效应驱动,其焦距的变化完全取决于两种液体之间接触面的变化.通过 Yang 方程推导得到描述接触面的微分方程并以此分析双液体变焦透镜内导电液体、绝缘液体、容器内壁三者间的物理化学性质对初始接触面形貌及初始特性的影响.利用 Matlab 结合龙格库塔法以数值解描述双液体变焦透镜的接触面特性,并且结合具体试剂的物理性质在 ZEMAX 中模拟单透镜成像.最后在实验中对比验证得到,存在密度差的双液体变焦透镜接触面的面型为非球面,且经过接触面形貌调制的双液体变焦透镜拥有更好的边缘成像质量,使得双液体变焦透镜在小型化成像系统中有着巨大的应用前景.

关键词: 双液体变焦透镜; 非球面; 龙格库塔法

中图分类号: TN 942.2+1

文献标志码: A

Analysis on the Initial Property of Double-liquid Lens Based on Runge-Kutta Method

TANG Zhengyang, PENG Runling, CHEN Jiabi, ZHUANG Songlin

(School of Optical-Electrical and Computer Engineering, University of Shanghai for
Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Double-liquid lens is based on the electro-wetting effect. The focal length of double-liquid lens is mainly decided by the refractive indexes of the two kinds of liquid and the interface between them. The differential equation describing the interface was derived with the aid of Yang function and on this basis, the influences of the physicochemical properties of conducting liquid, insulating liquid and container on the interface were analyzed. Using Matlab and ZEMAX, the numerical solution was calculated by Runge-Kutta method to describe the property of the initial interface. The results were compared with the experimental ones and prove that the double-liquid lens with density difference will shape the interface into an aspheric surface and it can perform better than the one without density difference, which makes double-liquid lens more potential in the field of mini optical system.

Keywords: double-liquid lens; aspheric surface; Runge-Kutta method

收稿日期: 2015-10-12

基金项目: 国家 973 计划资助项目(2005CB724304); 国家自然科学基金资助项目(60778031)

第一作者: 汤征洋(1991-), 男, 硕士研究生. 研究方向: 液体透镜. E-mail: 13788986898@163.com

通信作者: 彭润玲(1978-), 女, 副教授. 研究方向: 无机机械变焦运动. E-mail: pengrunling@gmail.com

当前光学系统对结构的要求越来越多地集中于体积小型化,在此基础上对自变焦元器件的研究逐渐加深,其中双液体变焦透镜是一个重要的研究方向.双液体变焦透镜通过外接的电压变化,增加或降低固-液张力,驱使液体接触面在初始面型基础上产生形变,形成新的光学折射面.变化的接触面在相同的高度具有变化的斜率,根据几何光学原理,光线在变化的入射角度下,形成不同程度的折转,最终光束的汇聚点在一定范围内产生前后位移,实现变焦.因此,接触面的初始面型对透镜焦距的变化范围,及变焦过程中成像的质量有着决定性作用.本文根据接触面的微分方程,重点分析两种液体密度差对初始面型及透镜初始焦距的影响.相比于等密度,球型接触面的液体透镜和非球型接触面的液体透镜,受顶点曲率半径、两种液体间密度差,以及固-液张力的影响,接触面方程影响因子更丰富,面型变化更多样,应用领域亦更广阔,使得双液体变焦透镜在小型化光学系统中具有极大的前景.

1 双液体变焦透镜原理与结构

当两种性质不同的相态共存时,两者之间必然产生一个界面.界面层的分子处于不均匀对称的力场中,会显示出一些独特的性质,浸润作用便是其中的一种^[1-2].例如当液体与固体接触时,在接触处会形成一个约几个分子厚度的过渡区,其内部的分子一方面受到本相内部相同物质分子的作用,另一方面受到另一相中不同分子的作用,两种分子作用力不能相互抵消,便会产生收缩或扩展的趋势.如图1所示,浸润作用两两存在于液体、气体与固体三者之间.这种情况下,当各个方向上的力达到平衡时,其表面张力的关系可以用 Young 方程来描述,即

$$\gamma_{sg} = \gamma_{sl} + \gamma_{lg} \cos \theta \quad (1)$$

式中: γ_{sg} 为固-气间的张力; γ_{sl} 为固-液间的张力; γ_{lg} 为液-气间的张力; θ 为液-气表面与固体层间的接触角大小.

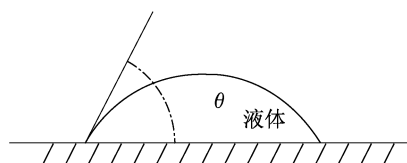


图1 浸润作用

Fig.1 Immersional wetting

电润湿效应是一种表面物理化学现象,通过变

化外加在固-液表面的电压,控制液体在固体表面的浸润性^[3-4].图2中的简易模型描述了在外加电压 U 作用下,导电液体与绝缘层间的浸润性发生改变,即式(1)中固-液间的张力 γ_{sl} 发生改变^[5].此时,三相接触点处形成新的力学平衡,使得固-液接触角从 θ 过渡到 θ_0 ,可用式(2)表示.因为液滴总体积恒定不变,故液滴的表面轮廓就由图2中实线变成了虚线.

$$\gamma_{sg} = \gamma_{sl} + \Delta\gamma_{sl} + \gamma_{lg} \cos \theta_0 \quad (2)$$

式中: $\Delta\gamma_{sl}$ 为固-液张力在外加电压下的变化量; θ_0 为液-气表面与固体层间新形成的接触角大小.

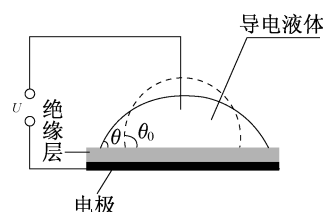


图2 电润湿现象

Fig.2 Electro wetting

双液体透镜采用圆柱形金属管作为容器,这样的结构可使液体间接触面的面型形成中心对称的圆弧面,用几何方法实现光学的中心对称,固定电极(金属管壁)亦可绕固定中心轴线形成环形对称电场^[6].如图3所示,首先在圆管内壁形成绝缘层,之后在圆管内封装互不相容的水溶性导电液体和油性绝缘液体,两种液体折射率互不相同,其结构类似于双胶合透镜,在材料确定的情况下焦距完全取决于液体间界面的面型.导电液体、金属外壁分别与外部电源相连,油性液体只与绝缘层接触.由于浸润作用,两种不同液体间产生一个圆弧面,称为双液体变焦透镜的初始接触面.当外部电压发生变化时,接触角 θ 响应电润湿效应发生变化,挤压绝缘液体,带动接触面发生形变.由于两种液体的折射率不同,接触面的面型发生变化,透镜的焦距发生改变,其过程等同于用若干焦距不同的双胶合透镜相互替换.

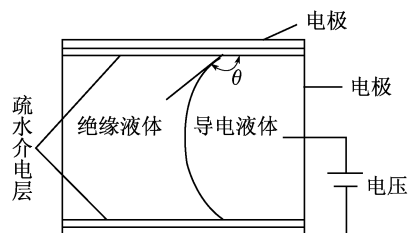


图3 双液体变焦透镜原理

Fig.3 Principle of double liquid lens

2 双液体变焦透镜的面型解析

双液体变焦透镜的接触面是一个中心对称结构,所以只需要一个过中心轴线截面的曲线方程即可描述整个曲面,双液体透镜的接触面如图4所示.两种液体的接触面关于 y 轴对称,选取如图4所示的坐标系,接触面中心截面上的曲线可用方程 $y(x)$ 表示.

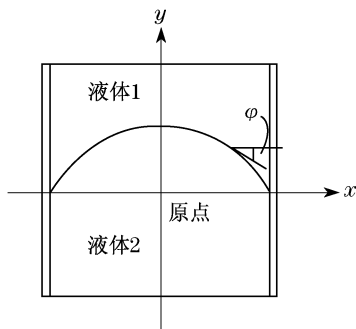


图4 双液体变焦透镜接触面
Fig.4 Interface of double liquid lens

根据 Laplace 公式^[6-8],液体接触面上任何一点都满足方程

$$\Delta P = \gamma_{12} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3)$$

式中: ΔP 为接触面上任意点的上下压力差; γ_{12} 为两种液体接触面上的张力; R_1 和 R_2 为接触面上任意点的两个正交法平面与接触面的交线在该点上的曲率半径.根据图4所示的曲线方程 $y(x)$,半径 R_1 和 R_2 分别表示为

$$\frac{1}{R_1} = \frac{|y'(x)|}{x[1 + y'(x)^2]^{1/2}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{|y''(x)|}{[1 + y'(x)^2]^{3/2}} \quad (5)$$

式(4)~(5)中, $y'(x)$, $y''(x)$ 分别为方程 $y(x)$ 的一阶导数和二阶导数.因为接触面关于 y 轴中心对称,故假设曲线顶点在 $(0, y_0)$ 处,那么在曲线顶点处由于对称性 R_1 与 R_2 相等,表示为 R_0 ,且当容器较小时顶点处曲率半径近似等于容器半口径.此时在顶点处,上、下压力值分别为 P_{10} , P_{20} ,并且顶点处的 Laplace 方程表示为

$$P_{10} - P_{20} = \frac{2\gamma_{12}}{R_0} \quad (6)$$

根据液体压力公式,曲线 $y(x)$ 上每一点上下压力 P_1 和 P_2 都随 y 方向成线性变化关系,则

$$P_1 = P_{10} - \rho_1 g(y_0 - y) \quad (7)$$

$$P_2 = P_{20} - \rho_2 g(y_0 - y) \quad (8)$$

式(7)~(8)中, ρ_1 和 ρ_2 分别表示两种液体的密度, g 为重力加速度,因此任意点上下压力差可以表示为

$$\Delta P = P_1 - P_2 = P_{10} - P_{20} - (\rho_1 - \rho_2)g(y_0 - y) \quad (9)$$

联立式(3)~(6)和式(9),得到曲线 $y(x)$ 的微分方程为

$$\frac{1}{x} \frac{|y'(x)|}{[1 + y'(x)^2]^{1/2}} + \frac{|y''(x)|}{[1 + y'(x)^2]^{3/2}} = \frac{2}{R_0} - \frac{\Delta \rho g}{\gamma_{12}}(y_0 - y) \quad (10)$$

3 龙格库塔法求解液体接触面

为了求解式(10)的微分方程,引入弧长变量 s ,表示曲线上任意点离开曲线顶点的距离^[9-10];角度 φ ,表示任意点处切线与水平方向的夹角.如图4所示,根据三角关系,直角坐标系参数 x 和 y 分别与弧长 s 、角度 φ 有如下关系:

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi(s) \quad (11)$$

$$\frac{dy}{ds} = -\sin \varphi(s) \quad (12)$$

联立式(10)~(12),得到曲线化简的一阶微分方程为

$$\varphi'(s) = -\frac{\sin \varphi(s)}{x(s)} + \frac{2}{R_0} - \frac{\Delta \rho g}{\gamma_{12}}(y_0 - y(s)) \quad (13)$$

式中, $\varphi'(s)$ 是角度 φ 对弧长 s 的导数.经过替换之后,原来用于描述接触面的二阶微分方程(10)化简成式(13)所示的一阶微分方程,并且满足初始条件 $\varphi(0) = 0$.式(13)虽然化简成了一阶微分方程,但依然不能直接推导得到接触面方程的解析解,因此需要根据确定的常数项和初值求解微分方程的数值解,具体方法是利用差商代替导数使方程离散化,继而依次求得各个点的坐标值.对于微分方程(13)有如下关系:

$$\begin{cases} \varphi' = f(s, \varphi) \\ \varphi(s_0) = 0 \end{cases}, s \in [0, a] \quad (14)$$

a 为接触面过中心截面的半弧长,若在点 s_n 处列出该点方程,并用差商

$$\frac{\varphi(s_{n+1}) - \varphi(s_n)}{h} \quad (15)$$

代替 $\varphi'(s_n)$,结果近似有

$$\varphi(s_{n+1}) = \varphi(s_n) + hf(s_n, \varphi(s_n)),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

式中: $h = s_{n+1} - s_n$ 为步长; $K = f(s_n, \varphi(s_n))$ 为区间 $[\varphi_n, \varphi_{n+1}]$ 上的平均斜率. 在此基础上, 引入四阶龙格库塔法对平均斜率 K 提供一种算法, 用以提高计算精度.

龙格库塔法的设计思想是在相邻的两个点 S_n 和 S_{n+1} 之间多预报几个点的斜率值 K_1, K_2, K_3, K_4 , 然后将这几个斜率按照一定的方式加权平均, 其结果作为最终的平均斜率 K 的近似值^[11]. 接触面方程的四阶龙格库塔表达式如下:

$$K_1 = f(s_n, \varphi_n) \quad (17)$$

$$K_2 = f\left(s_{n+\frac{1}{2}}, \varphi_n + \frac{hK_1}{2}\right) \quad (18)$$

$$K_3 = f\left(s_{n+\frac{1}{2}}, \varphi_n + \frac{hK_2}{2}\right) \quad (19)$$

$$K_4 = f(s_{n+1}, \varphi_n + hK_3) \quad (20)$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \frac{h[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]}{6} \quad (21)$$

如设定容器内口径为 10 mm, 并将式 (13), (17)~(21) 在 Matlab 中实现^[12], 结果如图 5 所示.

图中: 红线代表密度差为 0 的情况 ($\frac{\Delta\rho g}{\gamma_{12}} = 0$); 蓝线

代表密度差不为 0 的情况 ($\frac{\Delta\rho g}{\gamma_{12}} = 0.1$).

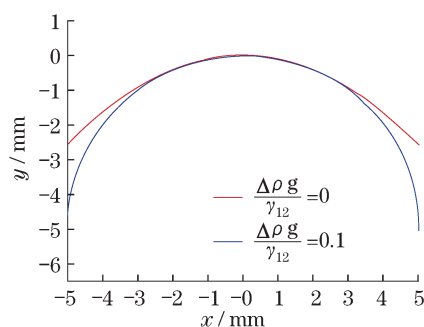


图5 龙格库塔法模拟接触面

Fig.5 Simulative interface based on Runge-Kutta method

根据图 5 可以得到: 当双液体变焦透镜的密度差为 0 时, 接触面为球面; 当双液体变焦透镜的两种液体间存在密度差时, 接触面呈现非球面, 并且距离对称轴越远则偏离球面越多.

4 双液体变焦透镜的实验分析

双液体变焦透镜在容器内封装等量的导电液体和绝缘液体, 绝缘液体密度固定不变, 导电液体的密

度可任意调配. 实验中选取内直径为 10 mm, 高度为 10 mm 的玻璃圆管作为容器, 方便观察初始面型的变化. 另外选取绝缘液体溴代十二烷 (折射率 1.458 0, 密度 1.037 5 g/cm³) 和导电液体硫酸钠溶液 (折射率 1.339 4, 密度可调). 双液体变焦透镜的初始结构及其性能可分为密度相等和密度不等两种情况.

4.1 密度相等的双液体变焦透镜

图 6(a) 中的竖线为双液体变焦透镜的中心对称线, 由于两种液体等量封装, 故图中灰色面积应与蓝色面积相等. 根据几何关系可以得到液体接触面顶点偏离中心对称线的距离 d 为

$$d = R(1 - \frac{\pi}{4}) \quad (22)$$

$R = 5$ mm 为容器的半口径, 此时 $d = 1.073$ mm. 图 6(b) 为密度相同的双液体变焦透镜的实物图.

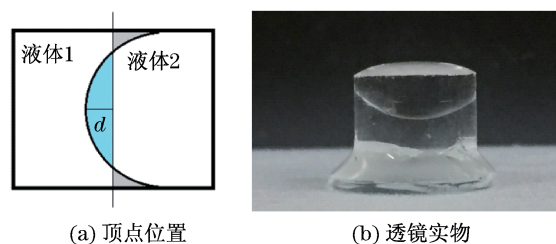


图6 球形接触面透镜结构分析

Fig.6 Analysis on the lens structure with spherical surface

根据选取液体的物理性质及接触面的面型在 ZEMAX 中模拟成像结果 (见图 7(a)), 透镜焦距为 42.15 mm, 弥散斑直径为 5.8 mm, 中心光束成像较好, 但是边缘处存在明显相差. 其实际成像效果如图 7(b) 所示.

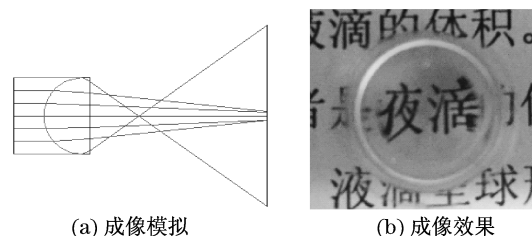


图7 球形接触面透镜成像分析

Fig.7 Analysis on the lens imaging with spherical surface

4.2 密度不等的双液体变焦透镜

当两种液体密度不同时, 双液体变焦透镜的液体接触面上各个点承受的力均与球面时不同, 其斜率亦不相同, 从而形成一个非球面型, 如图 8(a) 所示 (见下页). 黑色参考曲线为标准球面, 红色曲线为非球面的

接触面,由于两种液体的体积相同,灰色区域面积与蓝色区域面积相同.此时的顶点位置相对球面顶点的位移量无法由公式求得,需通过龙格库塔法得到的坐标值将各个面积微元求和并除以容器内直径后获得.实验中,将硫酸钠溶液配制到一定浓度使得式(13)中的常数项 $\frac{\Delta\sigma}{\gamma_{12}}=0.1$,则 $d'=0.1367\text{ mm}$,此时非球面的顶点在距离中心对称线 0.9363 mm 处.图8(b)为密度不同的双液体变焦透镜的实物图.

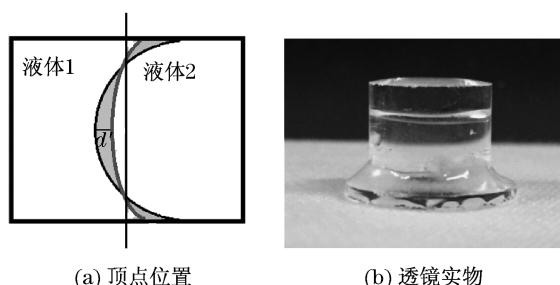


图8 非球形接触面透镜结构分析

Fig.8 Analysis on the lens structure with non-spherical surface

根据选取液体的物理性质及接触面的面型在ZEMAX中模拟成像结果(见图9(a)),相比球面时,边缘光线的相差变小,整体成像质量更好了,而焦距变化至 44.45 mm ,弥散斑直径减小至 0.2 mm .其实际成像效果如图9(b)所示.

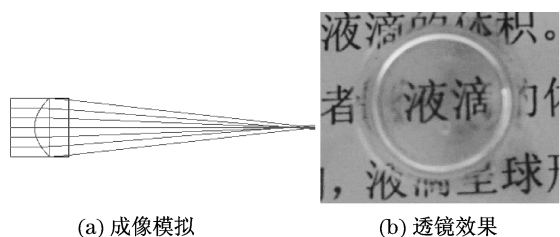


图9 非球形接触面透镜成像分析

Fig.9 Analysis on the lens imaging with non-spherical surface

通过对比得到,非球面的双液体变焦透镜通过改变导电液体的密度,可以变化初始接触面的曲率并调制透镜焦距,其初始状态的边缘光线成像质量更好,液体透镜拥有很高的灵活性.

5 结论

通过理论分析和实验对比可得,初始状态下的双液体变焦透镜,当液体间存在密度差时,接触面的面型为偏离球面的一个非球面,其偏移量可以根据

所选溶液间的张力与密度差进行调制,为双液体变焦透镜的接触面提供了更大的选择范围,并使得双液体变焦透镜的应用面更广阔.非球面的双液体变焦透镜在中心近轴的区域成像质量与球面液体透镜相差不大,但是在接触面边缘的地方有着明显的不同,其球差更小,相应的弥散斑更小,成像质量明显优于球面液体透镜.在后续的系统设计中,基于非球面的双液体变焦透镜很大程度上减小了光学系统设计难度,且给予无机械变焦系统更好的光学性能.

参考文献:

- [1] 亚当森.表面的物理化学[M].3版.顾惕人,译.北京:科学出版社,1984.
- [2] 张福田.分子界面化学基础[M].上海:上海科学技术文献出版社,2006.
- [3] LEE J, KIN C J. Liquid micro motor driven by continuous electrowetting [C] // Proceedings of the Eleventh Annual International Workshop on Micro Electro Mechanical Systems. Heidelberg: IEEE, 1998: 538 - 543.
- [4] 王刚,贾志海,贺吉昌,等.微结构疏水表面的液滴浸润特性[J].上海理工大学学报,2015,37(6): 557 - 562.
- [5] 詹珍贤,王克逸,丁志中,等.液滴透镜在电场中的变形研究[J].光子学报,2009,38(11):2900 - 2903.
- [6] 彭润玲,陈家璧,庄松林.电湿效应变焦光学系统的设计与分析[J].光学学报,2008,28(6):1141 - 1146.
- [7] YOUNG T. An essay on the cohesion of fluids [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1805, 95: 65 - 87.
- [8] ROURA P. Thermodynamic derivations of the mechanical equilibrium conditions for fluid surfaces: Young's and Laplace's equations [J]. American Journal of Physics, 2005, 73(12): 1139 - 1147.
- [9] 胡健伟,汤怀民.微分方程数值方法[M].北京:科学出版社,1999.
- [10] 时宝,张德存,盖明久.微分方程理论及其应用[M].北京:国防工业出版社,2005.
- [11] LIN R T, WANG C, LIU F, et al. A new numerical method of nonlinear equations by four order Runge-Kutta method [C] // Proceedings of the IEEE International Conference Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM). Macao: IEEE, 2010: 1295 - 1299.
- [12] 莫勒. MATLAB数值计算[M].张志涌,译.北京:北京航空航天大学出版社,2013.

(编辑:丁红艺)