

极大值函数 Clarke 广义 Jacobi 计算的新算法

宋林森, 高 岩

(上海理工大学 管理学院, 上海 200093)

摘要: 基于计算 Clarke 广义 Jacobi 在非光滑优化数值方法中的必要性, 针对一类非光滑函数——极大值函数进行研究, 通过对一不等式系统具备特定形式解所需条件的考虑, 给出了计算此类函数 Clarke 广义 Jacobi 中一个元素的新方法. 数值试验表明, 与以往算法相比, 该算法减小了计算量、简单易行、容易实现.

关键词: 非光滑分析; 优化; 广义 Jacobi; 极大值函数

中图分类号: O 223 **文献标志码:** A

New Algorithm for Calculating the Clarke Generalized Jacobi for a Maximum Function

SONG Linsen, GAO Yan

(Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The calculation of the element of Clarke generalized Jacobi is necessary in nonsmooth optimization algorithms. By introducing a special solution of an inequality system, an algorithm for calculating the Clarke generalized Jacobi for a vector valued maximum function was proposed. Comparing with the existing algorithms, the results of numerical experiment indicate the cost of the computation with the present algorithm is less and the algorithm is easier to be implemented.

Keywords: nonsmooth analysis; optimization; generalized Jacobi; maximum function

非光滑优化是最优化理论与方法中的一个重要分支, 在经济计划、工程设计、交通运输及生产管理等方面都有着广泛的应用. 在非光滑优化问题中, 由于目标函数或约束函数不具备连续可微的性质, 传统的基于微分概念的优化理论和方法已经不再适用. 20 世纪 70 年代, 作为对连续可微函数梯度概念的推广, Clarke 针对局部 Lipschitz 函数首次提出了

广义梯度的概念^[1], 并随之推广产生了有限维向量值局部 Lipschitz 函数 Clarke 广义 Jacobi 的定义形式. 自此, 以 Lipschitz 函数为主的非光滑分析与优化理论逐步完备并成为了一个独立的研究方向.

目前, 针对非光滑优化问题已形成许多有效的算法^[2-7]. 然而, 在非光滑优化问题和非光滑方程组的非光滑数值方法中, Clarke 广义 Jacobi 的计算仍

收稿日期: 2015-09-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11171221); 高等学校博士学科点专项基金资助项目(20123120110004)

第一作者: 宋林森(1982-), 女, 博士研究生. 研究方向: 非光滑优化理论与算法. E-mail: slinsen@163.com

通信作者: 高 岩(1962-), 男, 教授. 研究方向: 非光滑优化、混杂系统控制等. E-mail: gaoyan@usst.edu.cn

是必须的子算法,它可用来保证算法是可执行的.例如,在求解非光滑方程的半光滑牛顿法中,需要计算函数在当前点 Clarke 广义 Jacobi 中的一个元素以产生下一步迭代点;在非光滑优化约束方法中需要通过计算来搜集 Clarke 广义 Jacobi 中的元素才能进一步获取下降方向等.但是,在通常情况下,一般类局部 Lipschitz 函数的 Clarke 广义 Jacobi 目前还无法算出,对其研究仅限于一些特殊的函数类型,如分片光滑函数^[8-11]、投影函数^[12]、上图正可达函数^[13]等.

考虑极大值函数

$$f(x) = (\max_{j \in J_1} f_{1j}(x), \max_{j \in J_2} f_{2j}(x), \dots, \max_{j \in J_m} f_{mj}(x))$$

式中: $x \in \mathbb{R}^n$; J_i 为有限指标集; $f_{ij}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续可微函数.

文献[8-10]对此类函数的 Clarke 广义 Jacobi 进行了研究.文献[8]中提出了通过判断不等式组是否相容来确定此类函数广义 Jacobi 中一个元素的方法,但由于在实际问题中,这种算法往往需要对较多个不等式组进行判断,计算量过大.文献[9-10]分别对算法进行了改进并提高了计算效率.本文通过对一不等式系统具备特殊形式解所需条件的考虑,给出了向量极大值函数 Clarke 广义 Jacobi 中一个元素的新算法及其合理性证明.数值试验表明,与文献[9-10]中的算法相比,本文算法的计算量更小,甚至在指标集中元素充分有限的情况下,可以通过观察直接得出其中的一个元素,简单易行.

1 算法及有关定理

局部 Lipschitz 函数 $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$, 其中, $x \in \mathbb{R}^n$, $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 在任意点 x' 处的 Clarke 广义 Jacobi 定义为该函数在该点 B 微分 $\partial_B f(x')$ 的凸包,可记为 $\partial f(x')$. 其中, $\partial_B f(x') = \{\lim Jf(x_i)/x_i \rightarrow x', x_i \notin \Omega_f\}$, Ω_f 为 $\mathbb{R}^n$ 中 $f(x)$ 所有不可微点组成的集合^[14].

现给出计算极大值函数 Clarke 广义 Jacobi 的算法及相关定理.

首先,对于任意给定点 $x \in \mathbb{R}^n$, 定义如下指标集:

$$J_i(x) = \{j \in J_i / f_{ij}(x) = \max_{k \in J_i} f_{ik}(x)\}$$

$$T_i^0(x) = J_i(x)$$

$$T_i^1(x) = \{k \in T_i^0(x) / \nabla f_{ik}(x)^T e_1 = \max_{j \in T_i^0(x)} \nabla f_{ij}(x)^T e_1\}$$

$$T_i^2(x) = \{k \in T_i^1(x) / \nabla f_{ik}(x)^T e_2 =$$

$$\begin{aligned} & \max_{j \in T_i^1(x)} \nabla f_{ij}(x)^T e_2 \} \\ & \vdots \\ T_i^n(x) &= \{k \in T_i^{n-1}(x) / \nabla f_{ik}(x)^T e_n = \max_{j \in T_i^{n-1}(x)} \nabla f_{ij}(x)^T e_n\} \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $i = 1, 2, \dots, m$, $e_j = (0, \dots, \underset{j\text{-th}}{1}, \dots, 0)^T$.

显然,上述指标集具备如下性质:

a. $T_i^n(x) \subset T_i^{n-1}(x) \subset \dots \subset T_i^0(x) = J_i(x)$

b. 若 $k \in T_i^{j-1}(x) \setminus T_i^j(x)$, $t \in T_i^j(x)$, 有

$$\begin{aligned} \nabla f_{ik}(x)^T e_l &= \nabla f_{it}(x)^T e_l, 1 \leq l \leq j-1, j > 1 \\ \nabla f_{it}(x)^T e_j &> \nabla f_{ik}(x)^T e_j \end{aligned} \quad (2)$$

c. 若 $k, t \in T_i^n(x)$, 必有 $\nabla f_{ik}(x) = \nabla f_{it}(x)$,

且存在 $j \in T_i^n(x)$, 有 $j \in \bar{J}_i(x)$.

引理 1^[14] 假设存在指标集 $j_1 \in \bar{J}_1(x), \dots, j_m \in \bar{J}_m(x)$, 使得其对应的不等式系统 $L_{j_1 \dots j_m}(x)$ 相容, 则有 $\xi = (\nabla f_{1j_1}(x), \dots, \nabla f_{mj_m}(x))^T \in \partial_B f(x) \subset \partial f(x)$.

引理 1 中的 $\bar{J}_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$ 满足下面性质的指标集^[14]:

$$\left\{ \begin{aligned} & \bar{J}_i(x) \subset J_i(x), i = 1, 2, \dots, m \\ & \nabla f_{ij}(x) \neq \nabla f_{ik}(x), \forall j, k \in \bar{J}_i(x), \\ & \quad j \neq k, i = 1, 2, \dots, m \\ & \forall t_i \in J_i(x), \exists k_i \in \bar{J}_i(x), \text{使得} \\ & \quad \nabla f_{it_i}(x) = \nabla f_{ik_i}(x), i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right. \quad (3)$$

引理 1 中的不等式系统 $L_{j_1 \dots j_m}(x)$ 为

$$\left\{ \begin{aligned} & (\nabla f_{1k_1}(x) - \nabla f_{1j_1}(x))^T y < 0, \\ & \quad \forall k_1 \in \bar{J}_1(x) \setminus \{j_1\} \\ & (\nabla f_{2k_2}(x) - \nabla f_{2j_2}(x))^T y < 0, \\ & \quad \forall k_2 \in \bar{J}_2(x) \setminus \{j_2\} \\ & \quad \vdots \\ & (\nabla f_{mk_m}(x) - \nabla f_{mj_m}(x))^T y < 0, \\ & \quad \forall k_m \in \bar{J}_m(x) \setminus \{j_m\} \end{aligned} \right. \quad (4)$$

容易看出,系统 $L_{j_1 \dots j_m}(x)$ 是具有 n 个变量和

$\sum_{i=1}^m (\text{card } J_i(x) - 1)$ 个不等式的严格不等式组.

引理 2 对于任意 $i \in \mathbb{N}^+$ 且 $1 \leq i \leq m$, 总存在 $p_i \in \mathbb{N}^+$, 使得 $T_i^{p_i}$ 为单点集或 T_i^n 为多点集, 其中, $1 \leq p_i \leq n$.

证明 先证 $J_i(x) \setminus \bar{J}_i(x) = \emptyset$, 即 $J_i(x) = \bar{J}_i(x)$ 的情形. 这时, 必然存在 $p_i \in \mathbb{N}^+$, 使得

$T_i^{p_i}(x)$ 为单点集. 否则, 设存在不同的指标 t_1, t_2 同时属于 $T_i^{p_i}(x)$, 则由式(1)的 $T_i^{p_i}(x)$ 的定义及其性质 a, 必有 $\nabla f_{it_1}(x) = \nabla f_{it_2}(x)$, 且 t_1, t_2 同时属于 $\bar{J}_i(x)$. 但是, 结合式(3)可知, 这是不可能的. 再证 $J_i(x) \setminus \bar{J}_i(x) \neq \emptyset$ 的情形. 一方面, 由于 $J_i(x) \setminus \bar{J}_i(x) \neq \emptyset$, 至少存在下指标 t_1 属于 $J_i(x)$ 但不属于 $\bar{J}_i(x)$; 另一方面, 结合 $\bar{J}_i(x)$ 的性质, 必然存在另一下指标 t_2 属于 $\bar{J}_i(x)$, 并且有 $\nabla f_{it_1}(x) = \nabla f_{it_2}(x)$. 于是, 结合式(1)的 $T_i^{p_i}(x)$ 的定义可得, t_1, t_2 同属于 $T_i^{p_i}(x)$, 也即 $T_i^{p_i}(x)$ 为多点集. 结论成立.

引理 3 对于任意 $p_i \in \mathbb{N}^+$ 且 $1 \leq p_i \leq n$, 如果 $j_i \in T_i^{p_i}$, $T_i^{p_i}$ 为单点集或 $p_i = n$, 总有

$$\nabla f_{ik_i}(x) - \nabla f_{ij_i}(x) = (0, \dots, \alpha_{q_i}, \alpha_{q_i+1}, \dots, \alpha_n)^T \quad (5)$$

成立, 其中, $\alpha_{q_i} < 0, k_i \in \bar{J}_i(x) \setminus \{j_i\}, 1 \leq q_i \leq n$.

证明 首先, 如果 $T_i^{p_i}$ 为单点集, 由式(1)的 $T_i^{p_i}$ 的定义可知, 对于任意 $k_i \in J_i(x) \setminus \{j_i\}$, 必有 $\nabla f_{ij_i}(x) \neq \nabla f_{ik_i}(x)$. 因此, $j_i \in \bar{J}_i(x)$; 若 $T_i^{p_i}$ 为多点集, 不失一般性, 不妨设 $\{j_i, \dots, j'_i\} = T_i^{p_i}(x)$, 同样, 由式(1)的 $T_i^{p_i}(x)$ 的定义可知, $\nabla f_{ij_i}(x) = \dots = \nabla f_{ij'_i}(x)$, 且对于任意 $k_i \notin T_i^{p_i}$, 必有 $\nabla f_{ij_i}(x) \neq \nabla f_{ik_i}(x)$. 因此, 一定存在 $j_i \in T_i^{p_i}(x)$ 满足 $j_i \in \bar{J}_i(x)$, 且有 $\bar{J}_i(x) \setminus \{j_i\} = \bar{J}_i(x) \setminus \{T_i^{p_i}(x)\}$.

现证明对于任意 $k_i \in \bar{J}_i(x) \setminus \{j_i\}$, 总有 $\nabla f_{ik_i}(x) - \nabla f_{ij_i}(x) = (0, \dots, \alpha_{q_i}, \alpha_{q_i+1}, \dots, \alpha_n)^T$ 成立, 其中, $1 \leq q_i \leq n$. 考虑 $\bar{J}_i(x)$ 的性质, 对于任意 $k_i \in \bar{J}_i(x) \setminus \{j_i\}$, 必定存在 $q_i \in \mathbb{N}^+$, 使得 $k_i \in T_i^{q_i-1} \setminus T_i^{q_i}$, 进一步, 可以得到

$$\begin{aligned} \nabla f_{ik_i}(x)^T e_l &= \nabla f_{ij_i}(x)^T e_l, \\ 1 \leq l \leq q_i - 1, q_i > 1 \\ \nabla f_{ij_i}(x)^T e_{q_i} &> \nabla f_{ik_i}(x)^T e_{q_i} \end{aligned}$$

也即

$$\begin{aligned} \nabla f_{ik_i}(x)^T e_l &= \nabla f_{ij_i}(x)^T e_l, \\ 1 \leq l \leq q_i - 1, q_i > 1 \\ \nabla f_{ik_i}(x)^T e_{q_i} - \nabla f_{ij_i}(x)^T e_{q_i} &< 0 \end{aligned}$$

于是, $\nabla f_{ik_i}(x) - \nabla f_{ij_i}(x) = (0, \dots, \alpha_{q_i}, \alpha_{q_i+1}, \dots, \alpha_n)^T$, 其中, $\alpha_{q_i} < 0$, 结论成立.

现给出本文的主要结论(定理 1).

定理 1 对于任意 $i \in \mathbb{N}^+$ 且 $1 \leq i \leq m$, 如果 $j_1 \in T_1^{p_1}(x), \dots, j_m \in T_m^{p_m}(x)$, 则

$$\xi = (\nabla f_{1j_1}(x), \dots, \nabla f_{mj_m}(x))^T \in \partial_B f(x) \subset \partial f(x)$$

其中, $T_i^{p_i}$ 为单点集或 $p_i = n$.

证明 为方便起见, 当 $j_i \in T_i^{p_i}$ 时, 由引理 3, 先记

$$\begin{aligned} \nabla f_{ik_i}(x) - \nabla f_{ij_i}(x) &:= \\ (0, \dots, \alpha_{q_i}, \alpha_{q_i+1}, \dots, \alpha_n)^T \end{aligned}$$

这时, 由于 $\alpha_{q_i} < 0$, 必存在 $\varepsilon_i > 0$, 使得 $\alpha_{q_i} < -\varepsilon_i$.

现分两部分证明.

首先证明不等式系统 $L_{j_1 \dots j_m}(x)$ 中第 i 个不等式存在解 $y_i = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in})^T$, 其中, y_i 满足下面性质:

a. $\lambda_{ik} \geq 0$, 其中, $1 \leq k \leq n$;

b. $\frac{\lambda_{i(t+1)}}{\lambda_{it}} < \frac{\varepsilon_i}{M_i + \varepsilon_i}$, 其中, $M_i = \max_{q_i \leq q_j \leq n} \{|\alpha_{q_j}|\}$.

考虑不等式 $(\nabla f_{ik_i}(x) - \nabla f_{ij_i}(x))^T y_i < 0$, 其中, $k_i \in \bar{J}_i(x) \setminus \{j_i\}$.

因为

$$\begin{aligned} (\nabla f_{ik_i}(x) - \nabla f_{ij_i}(x))^T y_i &= \lambda_{iq_i} \alpha_{q_i} + \\ \sum_{t=q_i+1}^n \lambda_{it} \alpha_t &\leq \lambda_{iq_i} \alpha_{q_i} + \sum_{t=q_i+1}^n \lambda_{it} |\alpha_t| \leq \\ \lambda_{iq_i} \alpha_{q_i} + M_i \lambda_{iq_i} \sum_{t=q_i+1}^n \frac{\lambda_{it}}{\lambda_{iq_i}} &\leq \\ \lambda_{iq_i} \alpha_{q_i} + M_i \lambda_{iq_i} \sum_{t=q_i+1}^n \left(\frac{\varepsilon_i}{M_i + \varepsilon_i} \right)^{t-q_i} &\leq \\ \lambda_{iq_i} \alpha_{q_i} + M_i \lambda_{iq_i} \frac{\varepsilon_i}{M_i} &\leq \lambda_{iq_i} (\alpha_{q_i} + \varepsilon_i) < 0 \end{aligned}$$

所以, $f_i = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in})^T$ 是不等式 $(\nabla f_{ik_i}(x) - \nabla f_{ij_i}(x))^T y_i < 0$ 的一个解.

类似地, 可以证明, 如果 $j_1 \in T_1^{p_1}(x), \dots, j_m \in T_m^{p_m}(x)$, 其对应不等式系统 $L_{j_1 \dots j_m}(x)$ 中任意不等式均存在满足性质 a 和性质 b 的解.

现证明 $j_1 \in T_1^{p_1}(x), \dots, j_m \in T_m^{p_m}(x)$ 时, 不等式系统 $L_{j_1 \dots j_m}(x)$ 相容, 其中, $T_i^{p_i}$ 为单点集或 $p_i = n$. 事实上, 考虑向量 $\bar{y} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$, 其中,

$$\lambda_i \geq 0, \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} < \frac{\varepsilon}{M + \varepsilon}, M = \max_{1 \leq i \leq m} M_i, \varepsilon = \min_{1 \leq i \leq m} \varepsilon_i.$$

因为

$$\begin{aligned} (\nabla f_{ik_i}(x) - \nabla f_{ij_i}(x))^T \bar{y} &\leq \lambda_{iq_i} \alpha_{q_i} + \\ M_i \lambda_{iq_i} \sum_{t=q_i+1}^n \frac{\lambda_t}{\lambda_{q_i}} &\leq \lambda_{iq_i} \alpha_{q_i} + \\ M \lambda_{q_i} \sum_{t=q_i+1}^n \left(\frac{\varepsilon}{M + \varepsilon} \right)^{t-q_i} &\leq \lambda_{q_i} \alpha_{q_i} + \end{aligned}$$

$$M\lambda_{q_i} \frac{\varepsilon_i}{M} \leq \lambda_{q_i} (a_{q_i} + \varepsilon_i) < 0$$

所以,当 $j_1 \in T_1^{p_1}(x), \dots, j_m \in T_m^{p_m}(x)$ 时,其为对应不等式系统 $L_{j_1 \dots j_m}(x)$ 的解. 进一步结合引理 1, 有 $\xi = (\nabla f_{1j_1}(x), \dots, \nabla f_{mj_m}(x))^T \in \partial_B f(x) \subset \partial f(x)$, 结论得证.

由定理 1 可知,寻求极大值函数 $f(x)$ 在某点 x 处 Clarke 广义 Jacobi 中元素 ξ 的关键在于确定指标集 $T_i^{p_i}$. 特别地,若 $T_i^{p_i}$ 为单点集,只需选出其中元素 j_i ; 若 $T_i^{p_i}$ 为多点集,由于对任意的 $j_i, j'_i \in T_i^{p_i}(x)$, 总有 $\nabla f_{ij_i}(x) = \nabla f_{ij'_i}(x)$, 若 $\xi = (\nabla f_{1j_1}(x), \dots, \nabla f_{ij_i}(x), \dots, \nabla f_{mj_m}(x))^T \in \partial f(x)$, 必有 $\xi = (\nabla f_{1j_1}(x), \dots, \nabla f_{ij'_i}(x), \dots, \nabla f_{mj_m}(x))^T \in \partial f(x)$, 因此,只需从集合 $T_i^{p_i}(x)$ 中任意选取一个元素即可.

结合定理 1,给出计算函数 $f(x)$ 在 x 处 Clarke 广义 Jacobi 中一个元素算法的具体步骤:

步骤 1 计算梯度 $\nabla f_{ij}(x), j \in J_i(x), i = 1, 2, \dots, m$;

步骤 2 依次确定指标集 $T_1^{p_1}(x), \dots, T_m^{p_m}(x)$. 若 $T_i^{p_i}(x)$ 为单点集,选出其中元素 j_i ; 否则,计算 $T_i^{p_i}$,选取其中任意元素作为下指标 j_i ;

步骤 3 计算 $\xi = (\nabla f_{1j_1}(x), \dots, \nabla f_{mj_m}(x))^T$.

由于在式 (1) 中 $\nabla f_{ij_i}(x)^T e_l$ 表示的是向量 $\nabla f_{ij_i}(x)$ 中的第 l 个坐标,因此,在 $\nabla f_{ij_i}(x)$ 确定的情况下,可以不需要计算,直接观察得出算法步骤 2 中的指标集 $T_j^{p_j}(x)$.

2 数值试验

在相同的 Matlab 2010a 运行环境下,现通过一个例子将本文算法与文献[9-10]中提出的算法进行对比. 为方便起见,在进行数值试验时,将文献[9-10]中的算法分别记为算法 1 和算法 2,本文算法记为算法 3.

例 已知

$$f(x) = \left(\max_{j=1,2,3,4} f_{1j}(x), \max_{j=1,2,3,4} f_{2j}(x), \max_{j=1,2,3,4} f_{3j}(x), \max_{j=1,2,3,4} f_{4j}(x) \right)$$

其中, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

$$f_{11}(x) = x_1 - 1, f_{12}(x) = x_2, f_{13} = x_3 + 1$$

$$f_{14} = x_4, f_{21}(x) = 2x_1 + x_2^2$$

$$f_{22}(x) = x_3^2 + 2x_2 + 1, f_{23} = x_4^2 + 2x_3 + 4$$

$$f_{24} = x_3x_4 + 2, f_{31}(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3x_4$$

$$f_{32}(x) = x_3^2 + 2x_4^2 + x_1x_2$$

$$f_{33}(x) = x_3^2 + x_4^2 + x_1x_4 + x_2$$

$$f_{34}(x) = x_1^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_3 + x_2$$

$$f_{41}(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2 + 1$$

$$f_{42}(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 + 2$$

$$f_{43}(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 5x_4^2 - 2x_1x_3 + 2$$

$$f_{44}(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2 + 2$$

以 $x_1 = (1, 0, -1, 0)^T$ 为例,给出 $\partial f(x_1)$ 中一个元素的具体计算方法.

a. 通过计算 $f_{ij}(x)$ 在 x_1 处的函数值确定指标集 $J_1(x_1) = \{1, 2, 3, 4\}, J_2(x_1) = \{1, 2, 3, 4\}, J_3(x_1) = \{1, 2, 3, 4\}$ 和 $J_4(x_1) = \{1, 2, 3, 4\}$. 计算梯度

$$\nabla f_{11}(x_1) = (1, 0, 0, 0)^T$$

$$\nabla f_{12}(x_1) = (0, 1, 0, 0)^T$$

$$\nabla f_{13}(x_1) = (0, 0, 1, 0)^T$$

$$\nabla f_{14}(x_1) = (0, 0, 0, 1)^T$$

$$\nabla f_{21}(x_1) = (2, 0, 0, 0)^T$$

$$\nabla f_{22}(x_1) = (0, 2, -2, 0)^T$$

$$\nabla f_{23}(x_1) = (0, 0, 2, 0)^T$$

$$\nabla f_{24}(x_1) = (0, 0, 0, -1)^T$$

$$\nabla f_{31}(x_1) = (2, 0, 0, -1)^T$$

$$\nabla f_{32}(x_1) = (0, 1, -2, 0)^T$$

$$\nabla f_{33}(x_1) = (0, 1, -2, 1)^T$$

$$\nabla f_{34}(x_1) = (0, 1, -2, 0)^T$$

$$\nabla f_{41}(x_1) = (6, 0, -6, 0)^T$$

$$\nabla f_{42}(x_1) = (4, 0, -6, 0)^T$$

$$\nabla f_{43}(x_1) = (4, 0, -6, 0)^T$$

$$\nabla f_{44}(x_1) = (4, 0, -6, 0)^T$$

b. 确定指标集 $T_1^0(x_1) = \{1, 2, 3, 4\}, T_1^1(x_1) = \{1\}, T_2^0(x_1) = \{1, 2, 3, 4\}, T_2^1(x_1) = \{1\}, T_3^0(x_1) = \{1, 2, 3, 4\}, T_3^1(x_1) = \{1\}, T_4^0(x_1) = \{1, 2, 3, 4\}, T_4^1(x_1) = \{1\}$. 事实上,本例中,由于 $T_i^1(x_0)$ 为单点集,依次取 $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1$.

c. 结合定理 1,可知

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \in \partial f_B(x_1) \subset \partial f(x_1)$$

表 1 给出了计算 $\partial f(x_1)$ 中 1 个元素时 3 种算法所需的基本运算次数. 其中,表中“乘法”指的是算法运行中所需要的乘法运算;“比较”指的是算法运行中梯度的模及各元素坐标大小之间的对比.

表2给出了3种算法在5个不同点处计算 Clarke 广义 Jacobi 元素所需的 CPU 时间,其中, $x_1 = (1, 0, -1, 0)^T$, $x_2 = (1, 0, -1, 1)^T$, $x_3 = (1, 0, 0, -1)^T$, $x_4 = (2, 1, -1, 0)^T$, $x_5 = (2, 1, 0, 1)^T$.

从表1可以看出,算法2和算法3较算法1减少了乘法运算,算法3所需“比较”次数明显少于算法2.从表2中不同算法的CPU运行时间来看,算法

3在5个不同点处的CPU运行时间较算法1和算法2都普遍减少,计算效率普遍提高.

表1 3种算法的基本运算次数

Tab.1 Basic operation times of three algorithms

基本运算	算法1	算法2	算法3
乘法	14	0	0
比较	40	52	36

表2 不同算法在不同点处的 CPU 时间

Tab.2 CPU time of different algorithms at different points

算法	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
算法1	0.777 184	0.773 497	0.792 704	0.811 495	0.823 255
算法2	0.779 620	0.713 861	0.724 256	0.741 865	0.751 770
算法3	0.745 977	0.703 238	0.716 766	0.727 865	0.736 424

3 结 论

从不等式系统 $L_{j_1 \dots j_m}(x)$ 一个确定解的形式入手,给出了下指标 j_i 的选取方式,进而得到了极大值函数 Clarke 广义 Jacobi 中的一个元素,与文献[9-10]中的算法1和算法2一起扩大了极大值函数 Clarke 广义 Jacobi 的已知范围.但是,通过数值试验发现,算法3较算法2的优越性仅在 x_1, x_4, x_5 处相对明显,因此,算法的高效率仍与给定点有着密不可分的关系,在一些非光滑问题的数值算法中,要选择适当的计算 Clarke 广义 Jacobi 的方法,才能保证整个算法的有效运行.

参考文献:

- [1] CLARKE F H. Generalized gradients and applications [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1975, 205: 247 - 262.
- [2] QI L Q, SUN J. A nonsmooth version of Newton's method [J]. Mathematical Programming, 1993, 58 (1/2/3): 353 - 367.
- [3] GAO Y. Newton methods for solving nonsmooth equations via a new subdifferential [J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2001, 54 (2): 239 - 257.
- [4] HINTERMÜLLER M. A proximal bundle method based on approximate subgradients [J]. Computational Optimization and Applications, 2001, 20 (3): 245 - 266.
- [5] SAGASTIZÁBAL C. Composite proximal bundle method [J]. Mathematical Programming, 2013, 140 (1): 189 - 233.
- [6] 王伟伟,高岩.凸可行问题的一种次梯度投影算法 [J].上海理工大学学报,2009,31(5):422 - 426.
- [7] 张清叶,高岩,马良.求解非光滑优化问题的改进大洪水算法 [J].上海理工大学学报,2016,38(1):43 - 47.
- [8] GAO Y, XIA Z Q. Finding a Clarke subgradient for smooth composition of max-type functions [J]. Archives of Control Sciences, 1994, 3 (3/4): 181 - 191.
- [9] GAO Y. Calculating an element of B-differential for a vector-valued maximum function [J]. Numerical Functional Analysis and Optimization, 2001, 22 (5/6): 561 - 575.
- [10] HUANG Z D, MA G C. On the computation of an element of Clarke generalized Jacobian for a vector-valued max function [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2010, 72 (2): 998 - 1009.
- [11] KHAN K A, BARTON P I. Evaluating an element of the Clarke generalized Jacobian of a composite piecewise differentiable function [J]. ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), 2013, 39 (4): 1 - 28.
- [12] KONG L, TUNCEL L, XIU N. Clarke generalized Jacobian of the projection onto symmetric cones [J]. Set-Valued and Variational Analysis, 2009, 17 (2): 135 - 151.
- [13] COLOMBO G, MARIGONDA A, WOLENSKI P R. The Clarke generalized gradient for functions whose epigraph has positive reach [J]. Mathematics of Operations Research, 2013, 38 (3): 451 - 468.
- [14] 高岩.非光滑优化 [M].北京:科学出版社,2008.

(编辑:石 瑛)